게임 理論的 결투
(Game-theoretic Duel : A State-of-the-Art)

金 汝 根*
朴 淳 達*

Abstract

The duel is an extreme case of game situations. The duel is of zero-sum type, but a infinite game. This duel situation appears not only in extreme competitive situations such as war, but also in economic situations such as bidding.

The study on duel situations started from late 1940's, but considerable contributions have been made in 1960's by Ancker, Restrepo, Yanovskaya, Kimeldorf among others. Specially Kimeldorf recently has made big contribution in developing the theory of the game-theoretic duel.

The purpose of this paper is to summarize and systemize the theory of the game-theoretic duel. In the first part, noisy duel situations shall be dealt with, and in the second part, silent duel shall follow. Finally these two situations shall be generalized in the form of continuous firing model.

1. 서 론

결투 (Duel)의 전형적 例로는 100 m 떨어져서 탄환 한발씩 가지고 다가오면서 쏘는 권총결투를 들 수 있다. 이 결투에서는 먼저 쏘아 상대방을 命中시키면 이기지만 그렇지 못하면 자기가 죽게된다. 그래서 어디에서 쏘는 것이 가장 좋겠는가 하는 문제가 대두된단.

이러한 형태의 결투는 전쟁상황에서 함対함 전투기미사일, 전차대전차 등의 형태로 나타난다. 더 나아가 경제적 상황으로는 bidding 문제가 이 결투모델과 깊은 관계가 있다.

게임이론적 결투는 이러한 결투상황을 2人 게임으로 模型化하면 零和게임이 되지만 戰略이 무한히 많이 있어 無限게임이 된다.

게임이론적 결투는 상대방의 戰略이 노출되는지의 여부에 따라 分類하며 그래서 상대방이 쏘았을 때 즉시 그 쏜 사실을 알 수 있으면 Noisy 모형이라 한다. 그러나 그 반대의 경우 즉 상대방이 쏘았는 지의 여부가 탐지되지 않는 경우는 Silent 모형이라 한다. 그리고 한쪽은 탐지되고 한쪽은 탐지되지 않으면 Noisy-Silent 모형이 된다.

이 논문은 결투모델에 관해 그 동안 발표되었던 논문을 정리하여 체계화하는 것이 목적이다. 이 게임이론적 결투모델은 최근에 상당한 발전이 이루어 지고 있으나 체계화되어 있지 않는 실정이다. 이 논문은 한국OR 학회지 제3권 제2호에 실렸던 워게임을 위한 Duel 모델연구의 후속으로 그 논문중 게임이론적 부분을 좀더 체계화시키고 일관적

* 서울공대 산업공학과

인 형태로 정리하였다.

2. 게임 理論的 결투의 槪念

게임 이론적 결투모델은 결투상황을 무한히 많은 전략을 가진 二人無限게임의 일종으로 다루려는 모형이다. 전략들은 보통 시간의 함수로 나타나는 데 시간이 지남에 따라 각 참가자들의 정확성 (accuracy) 이 높아져서 될 수 있는 대로 행동 (action) 을 늦출려고 하나 상대방의 정확성도 높아져 위험율이 시간에 따라 증가한다. 따라서 행동을 무작정 늦출 수 없는 상황에서 각 참가자들은 행동을 취할 최적의 시간을 결정해야 한다. 최적전략시간을 결정하는 결투모델은 전략을 취한 즉시 상대방에게 그 전략이 노출되는 Noisy duel, 전략이 상대방에게 노출되지 않는 Silent duel, 이용가능한 모든 탄알로 한번의 전략에 강도 (intensity) 를 달리하며 연속적인 반사가 가능한 Continuous firing duel로 크게 나눌 수 있다.

게임이론적 결투의 결과는 발사 탄알의 정확성, 탄알의 數, 상대방의 행동노출 여부, 각 참가자의 利得에 대한 비중 (weight) 등의 결투상황에 영향을 미치는 요소를 어떻게 취득하느냐에 따라 달라진다.

정확성은 시간 또는 거리의 함수로 나타낼 수 있는데 시간 0에서 1까지, 또는 거리 ∞에서 0까지로 각각 표현할 수 있다. 일반적으로 거리를 변수로 하면 그 상대적 값을 측정하기가 어려워 시간을 변수로 사용한다. 따라서 정확성 함수는 시간 [0, 1] 의 함수로 항상 증가하는 연속함수이고, 시간 t 에서 참가자 1 과 2 의 정확성은 $P_1(0) = P_2(0) = 0$, $P_1(1) = P_2(1) = 1$ 이라는 조건을 갖는다. 또한 상대방의 행동노출여부와 탄알의 數에 의해 각 참가자들의 전략이 달라진다. 그리고 각 참가자들이 얻는 利得에 항상 같은 비중을 둘 수는 없다. 예를 들어 결투상황이 비행기와 대공포라면 대공포만이 파괴될 때와 비행기만이 파괴될 때, 둘다 파괴되지 않을 때, 둘다 파괴될 때 각 참가자의 得失을 얼마로 두느냐 이다. 이에 따라 전략과 상대적 게임의 값이 변한다.

게임이론적 결투의 槪念은 Shiffman [20] 의 "Game of timing" 에서 비롯되었다. 한번의 전략을 취하는 경우 (즉, 하나의 탄알인 경우) 는 Bellman과 Girshick [1], Bezer [2], Blackwell [3, 4] 에 의해 연구되었다. 그 후 Karlin [13, 14] 에 의해 한번의 전략을 취하는 경우에 있어서 이득함수의 성질에 따라 각 참가자의 최적전략이 어떻게 변하는가에 대해 취할 수 있는 경우는 Silent duel 이 Restrepo [19], Noisy duel 이 Fox와 Kimeldorf [9] 에 의하여 연구되었다. Continuous firing duel 은 Karlin [13], Yanovskaya [25] 에 의해 연구가 시작되어 Lang과 Kimeldorf [15, 16] 가 발견적 방법 (heuristic method) 으로 개선된 정확성함수를 구하여 이산적 발사의 경우까지 고려한 모델로 확장시켰다.

3. (1, 1) Noisy duel

(1, 1) Noisy duel은 전략을 취한 즉시 그 전략이 상대방에게 알려지는 Noisy duel 중에서 각 참가자가 하나의 탄알만을 가진 경우를 나타낸다.

참가자 1 과 2 의 정확성함수는 시간의 함수로 항상 증가하는 연속함수 $P_1(x)$, $P_2(y)$, $0 \le x, y \le 1$ 이고 $P_1(0) = P_2(0) = 0$, $P_1(1) = P_2(1) = 1$이라는 조건을 갖는다. 그리고 참가자 1 이 x라는 전략을, 참가자 2 가 y 라는 전략을 취한다. 이득은 참가자 1에 혼자 살아 남으면 1, 참가자 2 가 혼자 살아 남으면 −1, 둘다 살아 남거나 살아 남지 못하면 0 이라는 이득을 갖는다. 이럴 때 아래의 定理가 성립된다.

[定理 1] (1, 1) Noisy duel 에서 참가자

1 과 2 의 정확성함수가 $P_1(x), P_2(y)$ 라면, 이득함수 $U(x,y)$ 는

$$U(x,y)=\begin{cases} 2P_1(x)-1 & , x<y \\ P_1(x)-P_2(x) & , x=y \\ 1-2P_2(y) & , x>y \end{cases} \cdots\cdots (1)$$

이고, 참가자 1 과 2 의 최적전략이 x^*, y^* 이고 게임의 값을 V라 할 때 참가자 1 의 최적전략 x^* 는

$$P_1(x^*)+P_2(x^*)=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

을 만족한다. 게임의 값 V는

$$V=P_1(x^*)-P_2(x^*) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

이다. 참가자 2 의 최적전략 y^*도 마찬가지로 $P_1(y^*)+P_2(y^*)=1$을 만족하고 게임의 값은 $V=P_1(y^*)-P_2(y^*)$ 이다. □

證明. 이득함수 $U(x,y)$ 는, $x<y$ 일때 $(+1)P_1(x)+(-1)[1-P_1(x)]=2P_1(x)-1$ 이고, $x=y$ 일때 $(+1)P_1(x)[1-P_2(x)]+(-1)P_2(x)[1-P_1(x)]=P_1(x)-P_2(x)$ 이며, $x>y$ 이면 $(-1)P_2(y)+(+1)[1-P_2(y)]=1-2P_2(y)$ 를 얻는다.

참가자 1은 참가자 2가 어떤 전략을 취하든지 최소한의 어떤 값 이상을 얻을려고한다. 즉, $U(x^*,y)\geq V$이고 참가자 2는 참가자 1이 어떤 전략을 취하든지 최대한의 어떤 값 이하를 얻을려고 한다. 즉, $U(x,y^*)\leq V$이다. 그래서

$$U(x^*,y)\geq V\geq U(x,y^*) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

를 만족하는 x^*, y^*는 최적전략이다. 그림 1. 에서 보면 $2P_1(x)-1$은 -1에서 $+1$로 증가하는 함수이고 $1-2P_2(y)$ 는 $+1$에서 -1로 감소하는 함수이다. 그러므로 (4)를 만족하는 x^*, y^*는

$$2P_1(x^*)-1=1-2P_2(x^*) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

이다. (5)를 정리하면 (2)를 얻는다. 그리고 (5)를 만족하는 x^*, y^*를 $U(x,y)$ 에 대입하면게임의 값 V를 얻는다. △

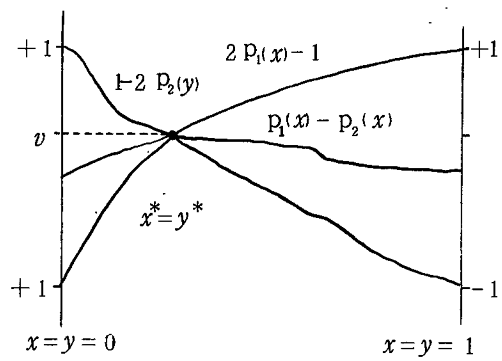

그림 1. (1, 1) Noisy duel

應用1. $P_1(x)=x, P_2(x)=x^2$, $0\leq x\leq 1$ 인 정확성 함수를 가질 때 (2), (3)과 같이 $x^*+x^{*2}=1$, $V=x^*-x^{*2}$에서 $x^*\fallingdotseq 0.618$, $V\fallingdotseq 0.236$ 을 얻는다. 즉, 두 참가자는 시간 0.618 에서 단순전략을 취하며 참가자 1 의 입장에서 0.236 의 상대적 이득을 얻는다.

應用2. $P_1(x)=x, P_2(x)=P(x)$ 일때 최적전략과 게임의 값을 알아보면 〔定理 1〕로 부터 도표 1. 과 같이 얻는다.

P(x)	최 적 전 략	게임의 값
x	0.500	0.000
x^2	0.618	0.236
x^3	0.682	0.365
x^4	0.725	0.449
x^5	0.755	0.510

도표 1. (1, 1) Noisy duel의 최적전략과 게임의 값.

도표 1. 에서 보면 정확성의 차이가 크면 클수록 전략을 늦출 수가 있다.

〔定理 1〕의 경우는 두 참가자가 얻는 이득의 비중(weight)이 같을 경우였으나, 그 비중이 다를 경우 즉 참가자 1이 혼자 살아 남으면 α, 참가자 2가 혼자 살아 남으면 β ($\alpha>0, \beta<0$), 둘 다 살아 남지 못하면 γ, 둘 다 살아 남으면 0 인 이득을 갖는 (1, 1) Noisy duel 은 定理 2. 가 성립한다.

［定理 2］ 각 참가자가 얻는 이득의 비중이 다를 경우 이득함수는

$$U(x,y)=\begin{cases}(\alpha-\beta)P_1(x)+\beta & ,x<y\\ \alpha P_1(x)+\beta P_2(x)+(\gamma-\alpha-\beta)P_1(x)P_2(x) & ,x=y\\ \alpha-(\alpha-\beta)P_2(y) & ,x>y\end{cases} \quad (6)$$

이다. (6)은 $P_1(x^*)+P_2(y^*)=1$, $P_1(y^*)+P_2(y^*)=1$인 $x^*=y^*$가 존재하고

i) $\gamma-\alpha-\beta>0$이면 참가자 1은 x^*인 최적전략과 게임의 값 $V=(\alpha-\beta)P_1(x^*)+\beta$를 갖지만 참가자 2는 최적전략을 갖지 못하고 될 수 있는 대로 x^*에 가깝게 전략을 취한다.

ii) $\gamma-\alpha-\beta=0$이면 참가자 1과 2가 $x^*=y^*$에서 최적전략을 갖고 게임의 값은 $V=(\alpha-\beta)P_1(x^*)+\beta$를 갖는다.

iii) $\gamma-\alpha-\beta<0$이면 참가자 2는 최적전략 y^*와 게임의 값 $V=\alpha-(\alpha-\beta)P_2(y^*)$를 갖지만 참가자 1은 최적전략을 갖지 못하고 될 수 있는 대로 y^*에 가깝게 전략을 취한다. □

證明. 이득함수 $U(x,y)$는 〔定理 1〕에서 $(+1)$에 α, (-1)에 β와 $x=y$일때 $\gamma P_1(x)\cdot P_2(x)$를 더하면 (6)를 얻는다. (5)에서 처럼 $(\alpha-\beta)P_1(x^*)+\beta=\alpha-(\alpha-\beta)P_2(x^*)$로 놓으며 $P_1(x^*)+P_2(x^*)=1$을 얻는다. 게임의 값 V는

$$V=(\alpha-\beta)P_1(x^*)+\beta=\alpha-(\alpha-\beta)P_2(x^*) \quad \cdots\cdots\cdots (7)$$

인데, minimax 理論으로 부터

i) $\gamma-\beta-\alpha>0$이면

$$\max_x \min_y U(x,y)=V,\ \min_y \max_x U(x,y)>V$$

가 되어 鞍点(Saddle point)이 존재하지 않아 참가자 1은 최적전략이 존재하나 참가자 2는 최적전략이 존재하지 않는다.

ii) $\gamma-\alpha-\beta=0$이면 〔定理 1〕과 같다.

iii) $\gamma-\alpha-\beta<0$이면

$$\max_x \min_y U(x,y)<V,\ \min_y \max_x U(x,y)=V$$

가 되어 참가자 2는 최적전략이 존재하나 참가자 1은 최적전략이 존재하지 않는다. △

應用3. $\alpha=3$, $\beta=-2$, $\gamma=2$이고, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=x^2$이면 $P_1(x^*)+P_2(x^*)=1$을 만족하는 $x^*=0.618$이고, $\gamma-\alpha-\beta>0$이므로 참가자 1만이 최적전략 $x^*=0.618$을 갖고 게임의 값은 $V=(\alpha-\beta)P_1(x^*)+\beta=1.09$이다. 참가자 2는 될 수 있는 대로 $x^*=0.618$에 가깝게 전략을 취하려 한다.

4. (*m*,*n*) Noisy duel

(m, n) Noisy duel은 참가자 1과 참가자 2가 각각 m, n 개의 탄알을 가지고 이산적 발사를 하는 Noisy duel을 나타낸다.
이득은 참가자 1이 혼자 살아 남으면 $+1$, 참가자 2가 혼자 살아 남으면 -1, 둘다 살아 남거나 살아 남지 못하면 0을 갖는다.
각 참가자의 정확성 함수 $P_1(t)$, $P_2(t)$, $0\le t\le 1$은 $P_1(0)=P_2(0)=0$, $P_1(1)=P_2(1)=1$인 연속적으로 증가하는 함수다. 이러한 (m,n) Noisy duel 의 최적전략과 게임의 값을 구하기 위하여 먼저 〔定理 3〕에 관하여 알아보자 〔9〕

［定理 3］ P, Q는 구간 〔0, 1〕에서 $P(0)=Q(0)=1$, $P(1)=Q(1)=0$인 연속적으로 감소하는 $t\ (0\le t\le 1)$의 함수이고, $P(t)=0$일때 $Q(t)\ne 1$, $Q(t)=0$일 때 $P(t)\ne 1$이다. $m>0$, $n>0$에 대해

$$\prod_{i=1}^{m} P(t_{in})+\prod_{j=1}^{n} Q(t_{mj})=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

$$0<P(t_{mn})<1,\ 0<Q(t_{mn})<1 \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

$$\begin{aligned}&t_{on}=t_{mo}=1\\ &t_{mn}<\min(t_{m-1\,n},\ t_{mn-1})\end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

을 만족하는 집합 $\{t_{ij},\ i, j=1, 2, \cdots\cdots\}$이 존재한다. 여기서 t_{ij}는 참가자 1이 i개, 참가자 2가 j개의 탄알을 보유하고 있을 때 전략을 취하는 시간을 나타낸다. □

證明. 수학적 귀납법에 의하여 증명하면 다음과 같다.

i) $m=n=1$ 일 때 〔定理 1〕에서 증명한 바와 같다.

ii) $n=1, m=1, 2, \cdots\cdots, k-1$ 일때 성립한다고 가정하고 $n=1, m=k$ 일때 t_{k1} 이 존재함을 보이기 위하여

$$P(t)\prod_{i=1}^{k-1} P(t_{i1}) + Q(t) = 1 \quad \cdots\cdots\cdots (11)$$

을 만족하는 t가 존재함을 보이면 된다.

F(t)를

$$F(t) = P(t)\prod_{i=1}^{k-1} P(t_{i1}) + Q(t) \quad \cdots\cdots (12)$$

라 정의하면

$$F(0) = \prod_{i=1}^{k-1} P(t_{i1}) + 1 > 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

이고

$$F(t_{k-1\,1}) = P(t_{k-1\,1})\prod_{i=1}^{k-1} P(t_{i1}) + Q(t_{k-1\,1}) < \prod_{i=1}^{k-1} P(t_{i1}) + Q(t_{k-1\,1}) = 1 \quad \cdots\cdots\cdots (14)$$

이다. (13)과 (14)로 부터 (11)을 만족하는 t가 존재함을 보였다.

iii) $m=k, n=l$ 일때 t_{kl} 가 존재함을 보이기 위하여

$$P(t)\prod_{i=1}^{k-1} P(t_{il}) + Q(t)\prod_{i=1}^{l-1} Q(t_{kj}) = 1 \quad (15)$$

를 만족하는 t가 존재함을 보이면 된다.

수식을 간단히 하기 위하여 다음과 같이 정의를 한다.

$$a_{\alpha\beta} = P(t_{k-\alpha\;l-\beta}), \quad A_{\alpha\beta} = \prod_{i=1}^{k-\alpha} P(t_{i\;l-\beta})$$

$$b_{\alpha\beta} = Q(t_{k-\alpha\;l-\beta}), \quad B_{\alpha\beta} = \prod_{i=1}^{l-\beta} Q(t_{k-\alpha\;j})$$

이다. 물론 $0 \leq \alpha < k$, $0 \leq \beta < l$ 이고, α, β 는 둘 다 0은 아니다. 정의에 의하여

$$A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

$$0 < a_{\alpha\beta} < 1, \; 0 < b_{\alpha\beta} < 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

$$a_{\alpha\beta} \geq \max(a_{\alpha+1\,\beta}, a_{\alpha\,\beta+1}) \quad \cdots\cdots\cdots (18)$$

$$b_{\alpha\beta} \geq \max(b_{\alpha+1\,\beta}, b_{\alpha\,\beta+1}) \quad \cdots\cdots\cdots (19)$$

$$A_{\alpha\beta} = A_{\alpha+1\,\beta}\; a_{\alpha\beta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

$$B_{\alpha\beta} = B_{\alpha\,\beta+1}\; b_{\alpha\beta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

이 성립한다. (16), (21)로 부터

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1-A_{\alpha\beta}}{1-A_{\alpha\,\beta+1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

이고 (17), (20), (22)로 부터

$$A_{\alpha\,\beta+1} < A_{\alpha\beta} < A_{\alpha+1\,\beta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

이고 (15)의 좌변을 H(t)라 정의하면

$$H(t) = A_{10}P(t) + B_{01}Q(t)$$

로 되어

$$H(0) = A_{10} + B_{01} > A_{11} + B_{01} > A_{01} + B_{01} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (24)$$

이다. 따라서 $0 < t_{kl} < \min(t_{k\,l-1}, t_{k-1\,l})$ 임을 보이기 위하여 시간 0에서 H(t)가 1보다 큼을 보였다。 이제 $H(t_{k-1\,l}) < 1$, $H(t_{k\,l-1}) < 1$ 임을 보이면 t가 (15)를 만족하는 t_{kl} 가 존재함을 보이는 것이다. (16), (20) (22)로 부터

$$H(t_{k-1\,l}) = a_{10}^2 A_{20} + (1-a_{10}A_{20})\frac{1-A_{01}}{1-A_{11}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$

가 되어 $k=2$ 라면 $A_{20}=1$, $A_{1\beta} = a_{1\beta}$, $A_{01} \geq A_{11}a_{11} = A_{11}^2$ 가 되어

$$H(t_{k-1\,l}) \leq a_{10}^2 + (1-a_{10})(1+A_{11}) < a_{10}^2 + (1-a_{10})(1+a_{10}) = 1 \quad \cdots\cdots\cdots (26)$$

이다. 마찬가지로 $H(t_{k\,l-1}) < 1$도 증명이 된다. 따라서 $k>2$인 경우도 이와같은 방법으로 증명하면 된다. △

〔定理 3〕을 이용하여 아래 〔定理 4〕가 성립한다.

〔定理 4〕 $P_1(t), P_2(t)$가 각 참가자의 정확성 함수일때

$$V_{ij} = P_1(t_{ij}) + [1-P_1(t_{ij})]V_{i-1\,j} = -P_2(t_{ij}) + [1-P_2(t_{ij})]V_{i\,j-1} \quad (27)$$

이 되는 최적전략의 집합 $\{t_{ij}, i, j = 1, 2\cdots\}$ 과 유일한 게임의 값의 集合 $\{V_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots\}$ 이 존재한다. 단,

$$V_{io} = 1, \quad i > 0$$

$$V_{oj} = -1, \quad j > 0$$

이다. □

證明. 〔定理 3〕에서 $P(t) = 1-P_1(t)$, $Q(t) = 1-P_2(t)$로 변형하면 (8)은

$$\prod_{i=1}^{m}[1-P_1(t_{in})] + \prod_{j=1}^{n}[1-P_2(t_{mj})] = 1$$

을 얻어, 변형하면 (27)을 얻는다. 〔定理 3〕으로 부터 (27)을 만족하는 t_{ij} 가 존재하고 그 t_{ij} 는 최적전략이다. △

참가자 1과 2의 전략에 관하여 구체적으

로 알아보면 〔定理 4〕에서 t_{mn}이 주어지는데 참가자 2가 t_{mn}이 되기 전에 발사하지 않으면 참가자 1은 t_{mn}에 발사한다. 그리고 참가자 2가 t_{mn}이 되기 전에 발사하여 실패했으면 $t_{m\,m-1}$, 참가자 1이 t_{mn}에 발사했는데 참가자 2가 t_{mn}에 발사하지 않으면 참가자 1은 $t_{m-1\,n}$에 발사한다. 참가자 2의 입장에서도 마찬가지다. 이와같이 각 참가자들의 전략은 상대방의 전략에 따라 변하므로 유일한 집합으로 나타낼 수 없으나 게임의 값은 유일한 집합이다. 그 例로 응용 4에서 설명하고 있다. 위에서 동시에 전략을 취할 확률은 거의 0에 가까우므로 무시되었다.

그리고 $P_1(t) = P_2(t)$인 경우는 다음 〔系〕가 성립한다.

〔系〕 $P_1(t) = P_2(t)$인 (m, n) Noisy duel 에서는 게임의 값 V_{mn}과 그 최적전략이

$$V_{mn} = \frac{m-n}{m+n} \quad \cdots\cdots (28)$$

$$P_1(t_{mn}) = P_2(t_{mn}) = \frac{1}{m+n} \quad \cdots\cdots (29)$$

이다. □

證明. 수학적 귀납법으로 증명하면 다음과 같다.

i) $i = j = 1$ 일때 〔定理 4〕에서

$$2P_1(t_{11}) - 1 = -2P_2(t_{11}) + 1 \quad \cdots\cdots (30)$$

로 부터 $P_1(t_{11}) = P_2(t_{11}) = \frac{1}{2}$, $V = 0$을 얻는다.

ii) $i = 1, 2, \cdots, m-1,\ j = 1, 2, \cdots, n-1$ 이 성립한다고 가정하고 $i = m,\ j = n$일때 〔定理 4〕으로 부터

$$P_1(t_{mn}) + [1 - P_1(t_{mn})]\frac{m-n-1}{m+n-1} = -P_2(t_{mn}) + [1 - P_2(t_{mn})]\frac{m-n+1}{m+n-1} \quad \cdots\cdots (31)$$

을 정리하면 $P_1(t_{mn}) = \frac{1}{m+n}$이다. 이를 (31)에 代入하면 $V_{mn} = \frac{m-n}{m+n}$을 얻는다. △

應用 4. 참가자 1이 2개의 탄알, 참가자 2가 3개의 탄알을 가진 (2, 3) Noisy duel 에서 $P_1(t) = P_2(t) = t$라 할 때 도표 2. 와 도표 3으로 전략과 게임의 값을 비교하여 보자.

전략	정확성	시간	참가자 1의 승율	참가자 2의 승율
t_{23}	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
t_{13}	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$
t_{12}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$
t_{11}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$	0
t_{01}	1	1	0	$1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$
승율			0.4	0.6

도표 2. 참가자 1이 t_{23} t_{11}, 참가자 2가 t_{13}, t_{11}, t_{01}의 전략을 취하는(2, 3) Noisy duel.

전략	정확성	시간	참가자 1의 승율	참가자 2의 승율
t_{23}	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
t_{13}	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$	0
t_{02}	1	1	0	$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$
승율			0.4	0.6

도표 3. 참가자 1이 t_{23}, t_{13}에서 참가자 2가 시간 1에서 전략을 취하는(2, 3) Noisy duel.

위 두 도표에서 전략은 다르지만 게임의 값은 다같이 −0.2이다. 즉 도표 2. 의 전략은 참가자 1이 t_{23}, t_{11}에서, 참가자 2가 t_{13}, t_{11}, t_{01}에서 전략을 취하고 도표 3. 의 전략은 참가자 1이 t_{23}, t_{13}에서 참가자 2가 시간 1에서 전략을 취한다. 위의 비교에서 처럼 게임의 값은 유일하게 존재하나 최적의 전략은 유일한 집합이 아니다.

應用 5. $P_1(t) = t$, $P_2(t) = t^4$ 일때 〔定理 4〕를 이용하여 m,n에 따른 게임의 값과 최적전략을 알아보면 도표 4. 도표 5. 와 같다.

n \ m	$m=1$	$m=2$	$m=3$
1	0.449	0.770	0.883
2	0.237	0.637	0.802
3	0.117	0.546	0.741
4	0.036	0.478	0.692
5	− 0.023*	0.424	0.651
31	− 0.394	0.005	0.275
32	− 0.399	− 0.002*	0.268
121	− 0.572	− 0.248	0.0005
122	− 0.573	− 0.249	− 0.0010*

*는 게임의 값이 처음으로 陰이 될때를 나타냄.

도표 4. (m,n)Noisy의 게임값Vmn

n \ m	$m=1$	$m=2$	$m=3$
1	0.725	0.582	0.491
2	0.618	0.524	0.455
3	0.558	0.518	0.430
4	0.518	0.459	0.410
5	0.448	0.437	0.394
31	0.303	0.286	0.271
32	0.301	0.284	0.269
121	0.2140	0.2061	0.1991
122	0.2135	0.2059	0.1986

도표 5. (m,n)Noisy duel의 최적전략 t_{mn}

도표 4. 에서 보면 (* 참조) 참가자 1이 한 개의 탄알을 가질 때 참가자 2가 유리한 입장에 놓이려면 5개이상의 탄알을 가져야 하고 참가자 1이 2개, 3개의 탄알을 가질 때 참가자 2는 32개, 132개 이상의 탄알을 가져야만 유리한 입장에 놓인다. 또한 도표 1. 과 도표 5. 를 비교해 볼 때 탄알이 고정된 상황에서 정확성의 차이가 크면 클수록 전략을 늦추어야 좋고, 정확성이 각 참가자에게 일정하게 주어졌을 때는 탄알의 수가 많아짐에 따라 초기전략이 빨라져야 좋다. 초기전략 시간은 전략을 취할 때 중요한 의미를 갖는다.

예를 들어 폭격기와 대공포의 대결에서 폭격기가 접근해 옴에 따라 어느 정도 떨어진 거리에서 대공포를 발사해야 하는 가를 결정할 때 초기전략 시간이 중요한 의미를 갖는다.

5. (1, 1) Silent duel

(1, 1) Silent duel은 상대방에게 전략이 알려지지 않는 Silent duel중에서 각 참가자가 하나의 탄알을 갖는 경우를 나타낸다. 정확성 함수는 Noisy duel인 경우와 같이 나타내기로 하고, 참가자 1이 x ($0 \leq x \leq 1$) 라는 전략을, 참가자 2가 y ($0 \leq y \leq 1$) 라는 전략을 취한다. 이득은 참가자 1이 혼자 살아 남으면 $+1$, 참가자 2가 혼자 살아 남으면 -1, 둘 다 살아 남거나 살아 남지 못하면 0인 이득을 갖는다.

정확성 함수는 Noisy duel과 같이 나타내기로 할때 참가자 1의 이득함수 $U(x, y)$는

$$U(x,y)=\begin{cases} P_1(x)-P_2(y)+P_1(x)P_2(y), & x<y \\ P_1(x)-P_2(y), & x=y \\ P_1(x)-P_2(y)-P_1(x)P_2(y), & x>y \end{cases} \quad \cdots\cdots (32)$$

로 된다.

[定理 5] (32)의 이득함수를 갖는 Silent duel에서 참가자 1과 2의 최적전략의 밀도함수 $f_a(x)$, $g_a(y)$와 게임의 값 V는 다음과 같이 구한다.[13] f_a, g_a는 구간 $[a, 1]$의 分布이고, f_{a_1}, f_{a_2}는 각각 구간 $[a_1, 1]$, $[a_2, 1]$의 分布이다. $0<a$, a_1, $a_2<1$이다.

$$f_{a_1}(x)=\begin{cases} \dfrac{K_1 P_2'(x)}{P_1(x)[P_2(x)]^2}, & a_1 \leq x \leq 1 \\ 0, & 0 \leq x < a_1 \end{cases} \quad \cdots\cdots (33)$$

$$g_{a_2}(y)=\begin{cases} \dfrac{K_2 P_1'(y)}{P_2(y)[P_1(y)]^2}, & a_2 \leq y \leq a_1 \\ 0, & 0 \leq y < a_2 \end{cases} \quad \cdots\cdots (34)$$

$$V=\begin{cases} \dfrac{1-3P_2(a)}{1+P_2(a)}, & a=a_1 \\ \dfrac{-1+3P_1(a)}{1+P_1(a)}, & a=a_2 \end{cases} \quad \cdots\cdots (35)$$

위에서 K_1, K_2, a_1, a_2, a는

$$\frac{1}{K_1} = 1 + \frac{1}{P_2(a_1)} = \int_{a_1}^{1} \frac{P_2'(x)\ dx}{P_1(x)\,[P_2(x)]^2} \quad \cdots\cdots (36)$$

$$\frac{1}{K_2} = 1 + \frac{1}{P_1(a_2)} = \int_{a_2}^{1} \frac{P_1'(y)\ dy}{P_2(y)\,[P_1(y)]^2} \quad \cdots\cdots (37)$$

이고

$$a = max\,(a_1,\ a_2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (38)$$

이다.

i) $a = a_1 = a_2$ 이면 (33), (34)는 최적전략밀도함수이고 V는 게임의 값이다.

ii) $a = a_1$ 이면 (33)은 참가자 1의 최적전략 밀도함수이고 참가자 2의 최적전략 밀도함수는

$$g_a(y) = \begin{cases} \dfrac{K\,P_1'(y)}{P_2(y)\,[P_1(y)]^2}, & a \le y \le 1 \\ 0, & 0 \le y < a \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (39)$$

를 따르고 시간 1에서 β로 전략을 취할 확률을 갖는다. 이 경우의 K, β는

$$K\left(\frac{1}{P_1(a)} + 1\right) = 1 + \beta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (40)$$

$$\int_{a_1}^{1} \frac{K\ P_1(y)\ dy}{P_2(y)\,[P_1(y)]^2} = 1 - \beta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (41)$$

으로 부터 얻어진다.

iii) $a = a_2$ 경우는 (34)는 참가자 2의 최적전략 밀도함수 이고 참가자 1의 최적전략 밀도함수 $f_a(x)$와 시간 1에서 전략을 취할 확률 α는 ii)의 경우와 같이 구한다. □

證明. i)의 경우 구간 $[a, 1]$의 $f(x)$를 선형적분 등식(linear integral equation)으로 고치면

$$f(x) = \int_a^x \left\{\frac{-P_2(x)\,[-1+P_1(t)]}{2\,P_1(x)\,P_2(x)}\right\} f(t)\,dt + \int_x^1 \frac{-P_2'(x)\,[-1-P_1(t)]}{2\,P_1(x)\,P_2(x)}\ f(t)\,dt$$
$$= \frac{P_2'(x)}{2\,P_1(x)\,P_2(x)} \left[\int_a^1 f(t)\ dt - \int_a^x P_1(t)\ f(t)\ dt + \int_x^1 P_1(t)\,f(t)\,dt\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (42)$$

이다. (42)에서 $\int_a^1 f(t)\,dt = 1$ 이고 $h(t)$를

$$h(t) = P_1(t)\ f(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (43)$$

로 정의한다. $h(t)$를 대입하여 (42)를 정리하면

$$1 - \int_a^x h(t)\,dt + \int_x^1 h(t)\ dt = \frac{K}{P_2(x)} \cdots\cdots (44)$$

로 되어 (44)를 미분하여 정리하면

$$2\,h(x) = 2f(x)\ P_1(x) = \frac{K\ P_2'(x)}{[P_2(x)]^2} \cdots\cdots (45)$$

이다. (45)를 정리하면 (33)을 얻는다. (33)의 K_1은 $K_1 = \frac{K}{2}$이다. (33)를 (44)에 대입하면 (36)을 얻는다. $g_a(y)$도 같은 방법으로 구한다.

$a = a_1$ 이면

$$g_a(y) = \int_a^y \frac{P_1(y)\,[1-P_2(t)]}{2\,P_1(y)\ P_2(y)}\ g_a(t)\,dt - \int_y^1 \frac{P_1'(y)\,[1+P_2(t)]}{2\,P_1(y)\ P_2(y)}\ g_a(t)\,dt$$
$$= \beta \cdot \frac{2\,P_1'(y)}{2\,P_1(y)\ P_2(y)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (46)$$

의 선형적분 등식 (linear integral equation)이 된다. (46)으로 부터

$$g_a(y) = \frac{K\ P_1'(y)}{P_2(y)\,[P_1(y)]^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (47)$$

를 얻는다. K를 구하기 위하여 (36)에 유도과정과 같이 하면

$$K\left(\frac{1}{P_1(a)} + 1\right) = 1 + \beta$$

이고 밀도 함수의 성질로 부터 (41)을 구한다.

또한 게임의 값 V는

$$V = \int_a^y L(x,\ y)\ f_a(x)\,dx + \int_y^1 M(x,\ y)\ f_a(x)\ dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (48)$$

로 부터 유도하면 (35)를 얻는다.

$a_1 = a_2$ 일때도 $a = a_1$의 경우와 같은 방법으로 유도 한다. △

應用 6. 참가자 1과 2가 $P_1(x) = P_2(x)$ x인 (1, 1) Silent duel 일때 〔定理 5〕의 (33)와 (34)를 이용하면

$$f_{a_1}(x) = \frac{K_1}{x_3}, \quad g_{a_2}(y) = \frac{K_2}{y_3}$$

이다. a_1과 K_1를 구하기 위하여 (36)을 이용하여 풀면 $a_1 = \frac{1}{3}$, $K_1 = \frac{1}{4}$이다. a_2, K_2도 (37)을 이용하면 $a_2 = \frac{1}{3}$, $K_2 = \frac{1}{4}$이다.

게임의 값은 (35)를 이용하여 풀면 0이다.
참가자 1의 전략밀도 함수는

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4x^3}, & \dfrac{1}{3}\le x\le 1\\ 0, & 0\le x<\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

이다. 참가자 2도 참가자 1과 똑같은 전략을 취한다.

應用 7. 참가자 1이 $P_1(x)=x$, 참가자 2는 $P_2(x)=x^2$의 정확성 함수를 사용한 (1, 1) Silent duel 일때, 〔定理 5〕의 (36)을 이용하면

$$5a_1^3+3a_1-2=0$$

이고 a_2도 (37)을 이용하면

$$4a_2^3+3a_2^2-1=0$$

이다. 따라서 $a_1 \fallingdotseq 0.481$, $a_2 \fallingdotseq 0.455$ 이다. $a=\max(a_1, a_2)=0.481$ 이므로, K_1은 (36)으로 부터

$$K_1=0.1879$$

이고, K_2는 (40)과 (41)로 부터

$$K_2 \fallingdotseq 0.3485$$

이다. 게임의 값은 (35)로 부터 $V=0.248$을 얻는다. $P_1(x)=x$ 이고 $P_2(x)=P(x)$ 일때 〔定理 5〕를 이용하여 도표 6.을 얻는다.

$P(x)$	a	α	β	K_1	K_2	V	V*
$P_2(x)=x$	0.333	0	0.0000	0.2500	0.2500	0.000	0.000
$P_2(x)=x^2$	0.481	0	0.0728	0.1879	0.3485	0.248	0.012
$P_2(x)=x^3$	0.568	0	0.1239	0.1548	0.4071	0.381	0.016
$P_2(x)=x^4$	0.626	0	0.1617	0.1334	0.4474	0.466	0.017
$P_2(x)=x^5$	0.669	0	0.1916	0.1182	0.4777	0.527	0.018

V*=Silent duel 게임의 값 −Noisy duel게임의 값.

도표 6. $p_1(x)=x$, $p_2(x)=p(x)$일때(1, 1) Silent duel

$P_1(x)=x$, $P_2(x)=P(x)$의 전략밀도 함수는 (33)과 (34)로 쉽게 얻을 수 있다. 도표 6. 으로 부터 정확성의 차이가 크면 전략이 늦추어 지며, 게임의 값은 Noisy duel의 그것과 차이가 점점 커진다. 그리고 정확성이 낮은 참가자는 시간 1에서 전략을 취할 확률이 정확성이 낮으면 낮을수록 높아진다.

6. (m, n) Silent duel

(m, n) Silent duel은 Silent duel중에서 참가자 1과 2가 m, n개의 탄알을 가지고 이산적 발사를 하는 경우를 나타낸다. 각 참가자가 얻는 이득의 비중과 정확성 함수는 (1,1) Silent duel과 같이 나타낸다. 참가자 1과 2의 단순전략은 각각 $\bar{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, $\bar{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$라 하고 그 집합을 X, Y라 하며, 혼합전략(mixed strategy)은 $F(\bar{x})$, $G(\bar{y})$라 한다. 이득함수를 $U(\bar{x}, \bar{y})$라 할 때

$$\int U(\bar{x}, \bar{y})\, dF(\bar{x}) \ge V, \ \forall \bar{y} \in Y$$
$$\int U(\bar{x}, \bar{y})\, dG(\bar{y}) \le V, \ \forall \bar{x} \in X \qquad \cdots\cdots(49)$$

를 만족하는 $F(\bar{x})$, $G(\bar{y})$가 존재하면 그것은 최적전략이고 V는 게임의 값이다.

이득함수 $U(\bar{x}, \bar{y})$를 $U(z)$라 하면 이득함수는 아래와 같이 순환형(recursive form)으로 표현된다.[19]

$$U(z_1, z_2, \cdots, z_k)=r(z_1)+[1-s(z_1)]\,U(z_2, \cdots, z_k)$$
$$U(z_2, z_3, \cdots, z_k)=r(z_2)+[1-s(z_2)]\,U(z_3, \cdots, z_k)$$
$$\cdots\cdots$$
$$U(z_k)=r(z_k)$$

이다. 여기서 $k=m+n$이고, $r(z_k)$와 $s(z_k)$는 아래와 같다.

$$r(z_k)=\begin{cases} P_1(x_i), & z_k=x_i \\ -P_2(y_j), & z_k=y_j \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (51)$$

$$s(z_k)=\begin{cases} P_1(x_i), & z_k=x_i \\ P_2(y_j), & z_k=y_j \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (52)$$

혼합전략 $F(\bar{x})$는

$F(\bar{x})=\prod_{i=1}^{m} F_i(x_i)$로 표현되며 각 F_i의 합은 0이다. F_i는 i가 1부터 $m-1$까지 각기 연속인 함수이고 F_m은 $x_m=1$에서 α를 갖는 불연속이다. $G(\bar{y})$도 이와 같은 성질은 가지며 G_n은 $y_n=1$에서 β를 갖는 불연속이다. 또한 x_i는 $a_i \le x_i \le a_{i+1}$에서 $F_i(x_i)$의 확률분포를 선택하고 y_j도 $b_j \le y_j < b_{j+1}$에서 $G_j(y_j)$의 확률분포에 따라 선택된다.

$a_i\ (i=1, 2, \cdots, m)$, $b_j\ (j=1, 2, \cdots, n)$을 아래와 같은 방법으로 나열시켜 보자.

$$\begin{aligned} &a_1 \le b_{11} < b_{12} < \cdots < b_{1r_1} < a_2 \\ &a_2 \le b_{21} < b_{22} < \cdots < b_{2r_2} < a_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_m \le b_{m_1} < b_{m_1} < \cdots < b_{mr_m} < a_{m+1}=1 \end{aligned} \quad \cdots\cdots (53)$$

이고

$$a_i = b_{io} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (54)$$

로 표현된다. 인접한 b가 구간 $[b_{ij}, b_{i\,j+1}]$에 있다면 $\bar{y}$의 요소 y_{ij}를 나타내고, 인접한 b가 a_i에 의하여 구분되면 $a_i=b_{io}$로 나타내다. 즉, y_{i-1}, r_{i-1}과 y_{io}는 $\bar{y}$의 같은 요소이다.

앞으로 필요한 수식의 정의는 다음과 같이 한다.

$$D_i=\int_{a_i}^{a_{i+1}} P_1(t)\, dF_i(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (55)$$

$$R(\bar{y})=\int U(\bar{x}, \bar{y})\, dF(\bar{x}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (56)$$

으로 벡터 $\bar{D}^k$와 함수 $\phi(\bar{D}^k)$는

$$\bar{D}^k=(D_{k+1}, D_{k+2}, \cdots, D_m) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (57)$$

$$\left.\begin{aligned} &\phi(\bar{D}^k)=D^k+[1-D_k]\,\phi(\bar{D}^k) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\phi(\bar{D}^m)=0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (58)$$

으로 정의 된다. 정의에 의해 $\phi(\bar{D}^k)$는

$$\phi(\bar{D}^k)=\int U(x_{k+1}, \cdots, x_m)\, dF_{k+1}(x_{k+1}) \cdots dF_m(x_m) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (59)$$

로 된다.

[定理 6] $F(\bar{x}), G(\bar{y})$가 참가자 1과 2의 혼합전략일때

$$\int U(\bar{x}, \bar{y})\, dF(\bar{x}) \ge V,\ \forall \bar{y} \in Y,\ y_n \neq 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (60)$$

일려면

$$dF_i(x_i)=h_{ij}\frac{P_2'(x_i)}{P_2^2(x_i)\,P_1(x_i)}\,dx_i, \quad b_{ij}<x_i<b_{i\,j+1} \quad \cdots\cdots\cdots (61)$$

과 위의 계수 h_{ij}는

$$1+2\alpha=D_m+2h_{mr_m} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (62)$$

$$h_{i\,j+1}=[1-P_2(b_{ij})]\,h_{ij} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (63)$$

$$j=1, 2, \cdots, r_i, \quad r_i=1, 2, \cdots, m$$

$$h_{ir_i}=[1-D_i]\,h_{i+1\,0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (64)$$

$$i=1, 2, \cdots, n-1$$

을 만족하면 된다. 초기 조건은 $a_1 \le b_1$이다. □

證明. $\bar{y}=(y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{mr_m})$일때 K_{ij}를

$$K_{ij}=\prod_{s=1}^{i-1}[1-D_s]\prod_{y_{st}<y_{ij}}[1-P_2(y_{st})] \cdots (65)$$

로 정의하면

$$R(\bar{y})=R(y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{m\,r_{m-1}})-K_{m\,r_m}\cdot P_2(y_{mr_m})\left\{2\int_{y_{mr_m}}^{1} P_1(x_m)\,dF_m(x_m)+(1-D_m)\right\} \cdots\cdots (66)$$

으로 된다.

$R(\bar{y})$가 y_{mr_m}에 독립일려면

$$P_2(y_{mr_m})\left\{2\int_{y_{mr_m}}^{1} P_2(x_m)\,dF_m(x_m)+1-D_m\right\}=2h_{mr_m} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (67)$$

인 h_{mr_m}이 상수여야 한다. (67)은 y_{ij}에 대해서도 (67)과 같이 h_{ij}로 표현할 수 있다. 따라서

$$2\int_{t}^{a_{i+1}} P_2(x)\,dF_i(x)+C=\frac{2h_{ij}}{P_2(t)}, \quad b_{ij}<t<b_{i\,j+1} \quad \cdots\cdots\cdots (68)$$

이다. (68)의 C는 상수이다.

(68)의 양변을 미분하여 정리하면 (61)을얻

는다. 그리고 (67)에서 $x_m=1$에서 α ($0\leq\alpha<1$)의 값을 가진다면 (62)를 쉽게 얻을 수 있다.

그리고 (63)을 구하기 위하여

$$R(\bar{y})=R(y_{11},\cdots,y_{ij})-2K_{ij+1}W_{ij+1} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (69)$$

로 놓는다. W_{ij+1}은 상수이다. (65)로 부터

$$K_{ij+1}=[1-P_2(y_{ij})]K_{ij} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (70)$$

로 된다. (69)에 (70)를 대입하면

$$R(\bar{y})=R(y_{11},\cdots,y_{ij-1})-2K_{ij}W_{ij+1}-K_{ij}P_2(y_{ij})\left\{2\int_{y_{ij}}^{a_{i+1}}P_1(x_i)dF_i(x_i)+[1-D_i][1+\phi(\bar{D}^i)]-2W_{ij+1}\right\}\cdots(71)$$

이다. 따라서

$$P_2(y_{ij})\left\{2\int_{y_{ij}}^{a_{i+1}}P_1(x_i)dF_i(x_i)+[1-D_i][1+\phi(\bar{D}^i)]-2W_{ij+1}\right\}=2h_{ij},$$
$$b_{ij}<y_{ij}<b_{ij+1} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (72)$$

로 된다. 또한 (69)와 같이

$$R(\bar{y})=R(y_{11},\cdots,y_{ij-1})-2K_{ij}\ r_{ij+1}\cdots(73)$$

로 주어지므로 (73)과 (71)로 부터

$$W_{ij}=h_{ij}+r_{ij+1} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (74)$$

를 구한다. 또한 (72)와 같이 h_{ij+1}을 구하여 (72)와 (74)를 이용하여 h_{ij}와의 관계를 구하면 (63)을 얻는다. (64)도 같은 방법으로 얻는다. △

$G(\bar{y})$도 똑같은 방법으로 얻어진다. 〔定理6〕의 (63), (64)를 (60)에 대입하면 다음과 같이 용이한 式을 얻을 수 있다.

$$dF_i(x_i)=h_i\ f^*(x_i)\ dx_i\ ,\ a_i\leq x_i<a_{i+1},\quad i=1,2,\cdots,m \quad\cdots\cdots\cdots (75)$$

$$1+2\alpha=D_m+2h_m \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (76)$$

$$h_i=(1-D_i)\ h_{i+1} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (77)$$

이다. (75)~(77)에서 $f^*(x_i)$와 D_i는

$$f^*(x_i)=\prod_{b_j>x_i}[1-P_2(b_j)]\frac{P_2'(x_i)}{P_2^2(x_i)P_1(x_i)} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (78)$$

$$D_i=\int_{a_i}^{a_{i+1}}P_1(t)\ dF_i(t) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (79)$$

이다. 또한 참가자 2도 마찬가지로

$$dG_j(y_j)=K_j\ g^*(y_j)\ dy_j\ ,\ b_j\leq y_j<b_{j+1},\quad j=1,2,\cdots,n \quad\cdots\cdots (80)$$

$$1+2\beta=E_n+2K_n \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (81)$$

$$K_j=(1-E_j)K_{j+1} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (82)$$

이다. (80)~(82)에서, $g^*(y_j)$와 E_j는

$$g^*(y_j)=\prod_{a_i>y_j}[1-P_1(a_i)]\frac{P_1'(y_j)}{P_1^2(y_j)P_2(y_j)} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (83)$$

$$E_j=\int_{b_j}^{b_{j+1}}P_2(t)\ dG_j(t) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (84)$$

이다. 그리고 $a_1=b_1$이고 $\alpha\beta=0$이다.

위의 최적전략 $F(\bar{x})$, $G(\bar{y})$를 구하는 것은 결국 $a_1,\cdots a_m,\ b_1,\cdots,b_n$과 $h_1,\cdots,h_m$, $K_1,\cdots,K_n$을 구하는 것이다.

〔応用 8〕 $P_1(t)=P_2(t)$, $n=m$ 일때는 $\alpha=\beta=0$, $a_k=b_k$, $k=1,2,\cdots,n$인 아래와 같은 전략을 갖는다.

$$P(a_{n-k})=\frac{1}{2k+3}\ ,\ k=0,1,\cdots,n-1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (85)$$

$$dF_{n-k}(t)=\frac{1}{4(k+1)}\cdot\frac{P_1'(t)}{P_1^3(t)}dt\ ,\quad a_{n-k}\leq t<a_{n-k+1} \quad\cdots\cdots\cdots (86)$$

(풀이) (75)와 (76)으로 부터

$$\int_{a_n}^{1}[1-P_1(t)]\frac{P_1'(t)}{P_1^3(t)}dt=\left[-\frac{1}{2P_1^2(t)}+\frac{1}{P_1(t)}\right]_{a_n}^{1}=2$$

이다. 전개하여 풀면 $P_1(a_n)=\frac{1}{3}$이다. (75)로 부터 $h_n=\frac{1}{4}$이다. (77)과 (75)로 부터 $P_1(a_{n-1})=\frac{1}{5}$, (75)로 부터 $h_{n-1}=\frac{3}{16}$을 얻는다. 이렇게 하여 구하면

$P_1(a_{n-k})=\frac{1}{2k+1}$이고, (75)로 부터

$$\int_{a_{n-k}}^{a_{n-k+1}}\frac{P_1'(t)}{P_1^3(t)}dt=\left[-\frac{1}{2P_1^2(t)}\right]_{a_{n-k}}^{a_{n-k+1}}=4(k+1)$$ 이므로

$$dF_{n-k}(t)=\frac{1}{4(k+1)}\frac{P_1'(t)}{P_1^3(t)}dt$$ 이다.

応用 8 과 Noisy duel의 $P_1(t)=P_2(t)$, $m=n$인 경우와 그 전략을 비교하여 볼 때 Noisy duel의 〔系〕에서 $P_1(t_{mn})=\frac{1}{m+n}$로 된다. 예를들어 각 참가자가 5발의 탄알

을 가졌다면 Noisy duel의 전략은 $t=\frac{1}{10}$, $\frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$에서 취한다. 그리고 Silent duel의 전략은 應用 8 로 부터 $\frac{1}{11} < t_1 < \frac{1}{9}$, $\frac{1}{9} \leq t_2 < \frac{1}{7}$, $\frac{1}{7} \leq t_3 < \frac{1}{5}$, $\frac{1}{5} \leq t_4 < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} \leq t_5 < 1$의 시간에 취한다. 일반적으로 $P_1(t) = P_2(t)$이고 $m=n$이면 $(n-k+1)$ 번째의 전략은 Noisy duel 일 때 $\frac{1}{2k}$에서 취하고 Silent duel 일때 $\frac{1}{2k+1} \leq t < \frac{1}{2k-1}$의 시간에 $\frac{1}{4k}, \frac{P'(t)}{P^3(t)}$의 확률분포에 의하여 취해진다. 이러한 비교로 보아 탄알이 많아지면 거의 같은전략을 취한다고 보아도 좋을 것이다.

그리고 전략결정에 있어서 탄알이 많으면 Silent duel은 Noisy duel에서와 같이 첫전략을 취하는 시간과 마지막 전략을 취하는 시간이 중요한 의미를 갖는다.

7. Continuous firing duel

앞의 이산적 Noisy duel과 Silent duel의 전략들은 단발씩 취해져서 이용 가능한 탄알의 数만큼의 전략들로 나타났다. 이에 반해 Continuous firing duel은 이용 가능한 모든 탄알로 한번의 전략에 강도 (intensity)를 달리하며 연속적인 발사가 가능한 경우로써 단순전략으로 나타난다. 연속발사의 例로는 高速연발총, 화염방사기 및 여러 총으로 상대를 대결하는 경우를 들 수 있다. 워•게임 外에도 두경쟁 회사의 광고전(10)을 펼때도 연속발사와 비슷한 현상이 일어난다.

각 참가자의 정확성 함수 $P_1(t)$, $P_2(t)$는 항상 증가하는 함수이고 $P_i(0)=0$, $P_i(1)=1$, $i=1, 2$라는 조건을 갖는다. 참가자의 이득은 참가자 1이 혼자 살아 남으면 $+1$, 참가자 2가 혼자 살아 남으면 -1, 둘다 살아 남거나 살아 남지 못하면 0인 이득을 갖는다. 강도함수 $f_i(t)$, $i=1, 2$, 또는 강도함수의 누적함수 $F_i(t)$, $i=1, 2$, 로 표현된다.

Continuous firing duel은 Karlin [13]과 Yanovskaya [25]에 의해 연구가 시작되어 Lang과 Kimeldorf [15, 16]에 의해 이산적 발사까지 고려한 모델로 확장 시켰다. 먼저 Karlin의 모델에 관하여 간단히 알아보자. Karlin [13]은 $Q(f_i, P_i, t, h)$를 거리 t까지 각 참가자가 살아 있다는 조건하에 거리 t와 $t+h$ 사이에 살해할 조건부 확률로

$$Q(f_i, P_i, t, h) = P_i(t) f_i(t) h + o.h \quad \cdots\cdots (87)$$

로 나타냈다. 그리고 $F_i(0)=0$, $F_i(1)=1$, $i=1, 2$를 만족하는 누적강도함수를 사용하였다. 이에 반해 Lang과 Kimeldorf는 Karlin의 모델을 개선하여 정확성 함수 및 강도함수를 거리의 함수 대신 시간의 함수로 나타냈다. 그리고 정확성 함수 $P_i(t)$, $i=1,2$ 대신 개선된 정확성 함수 $A_i(t)$, $i=1,2$를 사용하였다. 참가자 i의 누적 강도함수에서 $F_i(1)=1$이 아니라, 참가자 1과 2가 이용 가능한 탄알이 m, n일때 개선된 정확성 함수 $A_i(t)$를 사용함에 의하여 $F_1(1)=m$, $F_2(1)=n$으로 개선하였다. 그러면 개선된정확성 함수 $A_i(t)$를 유도하여 보자. 새로운 定義로 $P(t)$는 시간 t에서 이용가능한 모든 탄알을 발사하여 상대방을 살해할 확률을 나타내고 $P_T(f, P, t, h)$는 (87)에서 처럼 강도함수 f와 정확성 $P(t)$로 시간 t까지 각 참가자가 살아 있다는 조건하에 구간$(t, t+h)$에 살해할 조건부 확률로

$$P_T(f, P, t, h) = f(t) A(t) h + o.h \quad \cdots (88)$$

로 표현한다. $A(t)$는 $P(t)$의 함수이다. $S_I(f)$가 시간 구간 I에서 살해할 확률을 나타낼때 (88)로 부터

$$S_I(f) = 1 - \exp\left[-\int_I A(s) f(s) ds\right] \cdots (89)$$

이고, 강도함수 f는

$$f_{nt}(s) = \begin{cases} n, & t < s < t + \frac{1}{n} \\ 0, & \text{그 외의 영역} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (90)$$

이다. (89)는

$$S_{(0,1)}(f_{nt}) = 1 - \exp\left[-n\int_t^{t+\frac{1}{n}} A(s) ds\right] \cdots (91)$$

로 표현되어 $n \to \infty$이면 (91)은

$$1 - \exp[-A(s)] = P(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (92)$$

이다. 따라서 (92) 로 부터

$$A(t) = -\log[1-P(t)] \quad \cdots\cdots(93)$$

을 얻는다. 이와같이 발견적 방법(heuristic method)으로 개선된 정확성 함수 $A_i(t)$, $i=1, 2$ 는

$$A_i(t) = -\log[1-P_i(t)] \quad \cdots\cdots(94)$$

를 얻는다. (94) 의 $A_i(t)$ 는

$$A_i(0) = 0 \quad \cdots\cdots(95)$$

$$A_i(1-) = \infty \quad \cdots\cdots(96)$$

의 성질을 갖는다. 개선된 정확성 함수에 의한 이득함수. $U(f_1, f_2)$ 는

$$U(f_1, f_2) = \int_0^1 [f_1(t)A_1(t) - f_2(t)A_2(t)] \exp\left[-\int_0^t f_1(s)A_1(s)\,ds - \int_0^t f_2(s)A_2(s)\,ds\right] \cdots\cdots (97)$$

을 얻는다. (97) 에서 $\exp\left[-\int_0^t f_1(s)A_1(s)\,ds - \int_0^t f_2(s)A_2(s)\,ds\right]$는 시간 t 까지 두 참가자가 살아 있을 확률이다.

[定理 7] 참가자 1과 2가 각각 m, n개의 탄알을 갖고, $P_i(t)$, $i=1, 2$ 의 정확성 함수를 가지며, 연속발사가 가능하다. 그리고 각 참가자의 전략은 강도함수 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 이고 이득함수는 (97) 과 같이 주어진다. 그러면 최적전략은 $f_1(t)$가 $f_{\lambda a}(t)$, $f_2(t)$ 가 $g_{\lambda a}(t)$ 일때 이고 아래와 같이 주어진다.

$$f_{\lambda a}(t) = \begin{cases} \dfrac{A_2'(t)}{A_2(t)[A_1(t)+A_2(t)/\lambda]}, & a \le t < 1 \\ 0, & \text{그 외의 영역} \end{cases} \quad \cdots\cdots(98)$$

$$g_{\lambda a}(t) = \begin{cases} \dfrac{A_1'(t)}{A_1(t)[\lambda A_1(t)+A_2(t)]}, & a \le t < 1 \\ 0, & \text{그 외의 영역} \end{cases} \quad \cdots\cdots(99)$$

이다. 여기서 $A_i(t) = -\log[1-P_i(t)]$ 이다. $\int_a^1 f_{\lambda a}(t)\,dt = m$, $\int_a^1 g_{\lambda a}(t) = n$ 를 만족하는 $(\lambda, a) \epsilon (0, \infty) \times (0, 1)$ 이 존재하며 게임의 값 V는

$$V = [\lambda A_1(a) - A_2(a)] / [\lambda A_1(a) + A_2(a)] \cdots (100)$$

이다.

證明.

위 정리를 증명하기 위해 다음의 보조정리를 사용한다.

[보조정리 7-1] $\Phi_\lambda(t) = \int_t^1 f_\lambda$, $\Gamma_\lambda(t) = \int_t^1 g_\lambda$ 라 정의하면

i) Φ_λ 와 Γ_λ 는 $(0, 1)$ 에서 연속하며

ii) $\Phi_\lambda(1-) = \Gamma_\lambda(1-) = 0$

iii) $\Phi_\lambda(0+) = \Gamma_\lambda(0+) = \infty$

이다. □

證明.

$t \epsilon (0, 1)$ 에 대해 $\Phi_\lambda(t) \le \lambda \int_t^1 [A_2' / A_2^2] = \lambda / A_2(t)$ 이다. 따라서 Φ_λ는 유한하고 연속이다. (106) 으로 부터 $\Phi_\lambda(1-) = 0$ 이고 $S \epsilon (t, 1)$ 에 대해서는

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(t) &\ge \int_t^s \left\{ A_2' [A_2 (A_1 + A_2/\lambda)] \right\} \\ &\ge [A_1(s) + A_2(s)/\lambda]^{-1} \int_t^s [A_2'/A_2] \\ &= [A_1(s) + A_2(s)/\lambda]^{-1} [\log A_2(s) - \log A_2(t)] \end{aligned}$$

이 되어 t가 0에 접근함에 따라 Φ_λ는 ∞에 접근한다. Γ_λ 도 마찬가지로 증명된다. □

위의 보조정리 [7-1] 에 의해 어떤 양수 λ 에 대해

$$\int_{a(\lambda)}^1 g_\lambda = n \quad \cdots\cdots(101)$$

인 $a = a(\lambda)$ 가 존재한다.

[보조정리 7-2] a가 (101) 에 의해 정의되고, $B(\lambda) = \Phi_\lambda(a(\lambda))$ 라 정의하면

i) $a(\infty) = 0$

iii) $B(0+) = 0$

iii) $B(\infty) = \infty$

이다. □

證明. 고정된 t에서 λ가 증가하면 g_λ 는 감소한다. 따라서

$$\int_{a(\lambda)}^1 g(\lambda) = n \le \int_{a(\lambda)}^1 \frac{A_1'}{\lambda A_1^2} = [\lambda A_1(a(\lambda))]^{-1}$$

을 만족하는 a도 감소해야 한다. $A_1(a(\infty))$

$= 0$ 이므로 (95)로 부터 $a(\infty)=0$ 이고, λ가 0에 가까워지면 〔보조정리 7-1〕로 부터 $B(\lambda) \leq \lambda / A_2(a(\lambda))$는 0이다. 또한 고정된 t에 대해 f_λ는 λ가 증가 함에 따라 증가하므로, λ가 ∞에 가까워지면 $B(\lambda) = \Phi_\lambda(a(\lambda)) \geq \Phi_1(a(\lambda))$이 된다. $\Phi_\lambda(0+) = \infty$이므로 $B(\infty)=\infty$이다. △

〔보조정리 7-1〕과 〔보조정리 7-2〕를 위하여 모든 λ에 대하여 (101)을 만족하는 $a = a(\lambda)$가 선택되며, λ가 0에서 ∞로 가면 $B(\lambda)$는 0에서 ∞로 감으로 $B(\lambda) = m$인 λ를 선택할 수 있다. 따라서 $\int_a^1 f_{\lambda a} = m$, $\int_a^1 g_{\lambda a} = n$인 $(\lambda, a) \varepsilon (0, \infty) \times (0,1)$이 존재한다. 그리고 참가자 2가 (99)의 g_0을 택하고 참가자 1은 임의의 $F(t)$를 택할때

$$Q_1(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t A_1 \, dF\right)$$

$$Q_0(t) = 1 - \exp\left(-\int_Q^t A_2 \, g_0\right)$$

이고, $\overline{Q}_1 = 1 - Q_1$, $\overline{Q}_0 = 1 - Q_0$라 정의한다.

이득함수를 $U(F, g_0)$라 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
U(F, g_0) &= \int_0^1 \overline{Q}_0 \, dQ_1 - \int_0^1 \overline{Q}_1 \, dQ_0 \\
&= \int_{(0,a)} \overline{Q}_0 \, dQ_1 + \int_{(a,1)} \overline{Q}_0 \, dQ_1 - \int_{(0,a)} \overline{Q}_1 \, dQ_0 \\
&\quad - \int_{(a,1)} \overline{Q}_1 \, dQ_0 \\
&= Q_1(a) + \int_{(a,1)} \overline{Q}_0 \, dQ_1 - 0 - \overline{Q}_1(a) \\
&\quad \int_{(a,1)} \exp\left(-\int_{(a,t)} A_1 \, dF\right) dQ_0 \\
&= 1 + \int_{(a,1)} \overline{Q}_0 \, dQ_1 - \overline{Q}_1(a) \left(1 + \right. \\
&\quad \left. \int_{(a,1)} \exp\left(-\int_{(a,t)} A_1 \, dF\right)\right) dQ_0 \leq 1 + \\
&\quad \int_{(a,1)} \overline{Q}_0 \, dQ_1 - \exp[-F(a) A_1(a)] \\
&\quad \left(1 + \int_{(a,1)} \exp\left(-\int_{(a,t)} A_1 \, dF\right) dQ_0\right) \\
&= U(G, g_0)
\end{aligned}$$

G가 시간구간 $[a, 1]$이면 G는 (98)의 $f_{\lambda a}$다. 따라서 $f_{\lambda a}, g_{\lambda a}$는 최적전략이며 게임의 값 V는 최적전략인 $f_{\lambda a}, g_{\lambda a}$를 (97)에 대입하면 쉽게 얻어진다. △

〔定理 7〕의 개선된 정확성 함수 $A_i(t)$에 의한 최적전략은 각 참가자의 누적강도함수가 $F_1(1)=m$, $F_2(1)=n$을 만족시켜야 한다. 따라서 강도함수는 연속이므로 참가자 1의 경우 누적강도함수가 1이되는 m개의 점들 $0 < S_1 \leq S_2 \cdots\cdots \leq S_m < 1$로 나타낼 수 있으며 참가자 2도 n개의 점들 $0 < r_1 \leq r_2 \cdots\cdots \leq r_n < 1$로 나타낼 수 있다. 위의 $(S_1, S_2, \cdots\cdots S_m)$, $(r_1, r_2, r_3 \cdots\cdots r_n)$의 두 집합을 이산적 경우의 두 참가자 m, n개의 전략의 집합 또는 강도를 달리할 수 있는 전략으로 간주할 수 있다. Continuous firing duel의 解는 Noisy duel과 Silent duel의 이산적 발사 解의 수렴점(応用 10과 応用 11참조)으로 해석할 수 있어 게임 이론적 결투모델의 가장 일반적인 解로 볼 수 있다.

応用 9. $U(f_1, f_2) = -U(f_2, f_1)$인 경우로, 즉 $P_1(t) = P_2(t)$, $m=n$인 Continuous firing duel에서 일반성을 잃지 않고 $P_i(t) = t$, $i = 1, 2$, $m = n = 1$이 되게 변형시킨다. 그러면 게임의 값은 대칭이기 때문에 0이고 최적전략은 각 참가자가 똑같이 아래 누적강도함수를 갖는다.

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , t < a \\ 1 + [2\log(1-t)]^{-1}, & a \leq t \leq 1 \\ 1 & , t = 1 \end{cases} \qquad \cdots(102)$$

위에서 $a = 1 - \exp(-\frac{1}{2})$이다.

풀이. (98)을 $\int_a^1 f_{\lambda a} = 1$에 대입하면

$$\frac{\lambda}{\lambda+1} \int_a^1 \frac{A'(t)}{A^2(t)} \, dt = \frac{\lambda}{\lambda+1} \left[-\frac{1}{A(t)}\right]_a^1 = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(103)$$

이다. 정리하면 $a(\lambda) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{\lambda+1}}$를 얻어 $\int_{a(\lambda)}^1 g_{\lambda a} = 1$에 대입하면, $\lambda = 1$을 얻는다. 따라서 $F(t) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{A(s)}\right]_a^t = 1 + \frac{1}{2\log(1-t)}$이다.

앞에서 연속발사의 경우는 이산발사의 수렴으로 고려되며, 또한 이산발사의 각 전략들도

고려할 수 있음을 설명하였다. 다음 應用 10 과 應用 11 을 통하여 알아보자.

應用10. (n, n) Silent duel 의 이산적 발사에서 대칭인 경우 최적혼합전략에 의하여 취해진 단순전략들을 $(t_{n1}, t_{n2} \cdots\cdots t_{nn})$이라 하자. t_{nk} $(k=1, 2, \cdots\cdots, n)$에서 $\frac{1}{n}$씩 증가하는 이산밀도함수를 F_n라 하면 F_n는 (102)의 F에 수렴한다. 따라서 n개의 탄알을 가진 대칭인 Silent duel 이 $P_n(t)=1-(1-t)^{\frac{1}{n}}$의 정확성을 가질 때 그 解는 $P(t)=t$ 이고 대칭인 Continuous firing duel 의 解 (102)에 수렴한다.

풀이, Silent duel 에서 최적전략을 취하는 구간을 나누는 점들을 $0 < a_{n1} < a_{n2} < \cdots\cdots < a_{nn} < 1$ 이라 할때 (應用 8)로 부터

$$a_{nk}=1-\left[1-\frac{1}{2(n-k)+3}\right]^n \cdots\cdots\cdots (104)$$

로 주어진다. 따라서 a_{n1}은 $a=1-e^{-\frac{1}{2}}$에 수렴한다. 그래서 시간 $(a, 1)$ 구간에서, 정의에 의해

$$\frac{K_n(t)-1}{n} \leq F_n(t) \leq \frac{K_n(t)}{n} \cdots\cdots (105)$$

이다. 여기서 K_n은 다음 조건을 만족한다.

$$a_n K_n(t)-1 \leq t \leq a_n K_n(t) \cdots\cdots\cdots (106)$$

이다. (104)로 부터

$$1-\left[1-\frac{1}{2(n-K_n)+5}\right]^n \leq t \leq 1-\left[1-\frac{1}{2(n-K_n)+3}\right]^n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (107)$$

이다. (107)을 정리하면

$$1+\frac{3}{2n}-\frac{1}{2n[1-(1-t)^{\frac{1}{n}}]} \leq \frac{K_n(t)}{n}$$

$$\leq 1+\frac{5}{2n}-\frac{1}{2n[1-(1-t)^{\frac{1}{n}}]}$$

로 되어,

$$2n[1-(1-t)^{\frac{1}{n}}] \rightarrow -2\log(1-t)$$

이므로 ($a \rightarrow b$는 a가 b에 수렴함을 나타냄)

$$\frac{K_n(t)}{n} \rightarrow 1+[2\log(1-t)]^{-1}=F(t) \cdots (108)$$

이다. 따라서 $F_n(t)$는 $F(t)$ 즉 (102)에 수렴한다.

應用11. (n, n) Noisy duel 의 이산적 발사에서 대칭인 경우 단순전략들을 $(t_{n1}, t_{n2}, t_{n3}, \cdots\cdots t_{nn})$이라 하자. t_{nk} $(k=1, 2, 3, \cdots\cdots, n)$에서 $\frac{1}{n}$씩 증가하는 이산밀도 함수를 G_n이라 하면 G_n은 (102)의 F에 수렴한다. 따라서 n개의 탄알을 가진 대칭인 Noisy duel 이 $P_n=1-(1-t)^{\frac{1}{n}}$의 정확성을 가질때 그 解는 $P(t)=t$ 이고 대칭인 Continuous firing duel 의 解 (102)에 수렴한다.

풀이. Noisy duel 의 〔系〕로 부터 $P_n(t)=1-(1-t)^{\frac{1}{n}}$ 이므로

$$t_{nk}=1-\left[1-\frac{1}{2(n-k+1)}\right]^n, \quad k=1, 2, 3, \cdots\cdots, n \quad \cdots\cdots\cdots (109)$$

이므로 應用 10의 풀이로 부터 $G_n(t)$는 (102)에 수렴함을 알 수 있다.

위의 應用 10과 應用 11은 $F_1(1)=m$, $F_2(1)=n$에서 F_i, $i=1, 2$가 1이 되는 m개의 전략 $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \cdots\cdots \leq S_m < 1$ 과 n개의 전략 $0 < r_1 < r_2 \cdots\cdots \leq r_n < 1$ 으로 나타냄에 있어서 〔定理 7〕의 일반성을 잃지 않고 있다. 應用 10과 應用 11을 통하여 연속발사가 가능한 경우에 각 참가자가 전부 Silent duel, 일부 Silent duel 이고 나머지 Noisy duel, 전부 Noisy duel 인 탄알을 가지더라도 그 解가 같음을 알 수 있다. 연속발사의 解는 이산적 발사의 수렴점으로 고려되므로 Continuous firing duel 의 解는 게임이론적 결투모델의 가장 일반적인 解로 볼 수 있다.

8. (1, 1) Silent - Noisy duel

앞에서 알아 본 Noisy duel, Silent duel, Continuous firing duel 은 두 참가자 모두 Noisy duel 이거나 Silent duel 또는 Continuous firing duel 인 경우였다. 그러나 참가자 1이 Silent duel, 참가자 2가 Noisy duel 이고 각기 하나의 탄알을 가진 (1, 1) Silent - Noisy duel 에 관해 알아 보자.

[定理 8] 참가자 1이 Silent duel, 참가자

2가 Noisy duel이고 각 참가자가 한발의 탄약을 가지고 있으며, 정확성 함수는 $P_1(x)=P_2(x)=x$라 한다. 참가자 1이 x라는 전략을 참가자 2가 $y\,(0\leq x,\ y\leq 1)$라는 전략을 취할 때 이득함수 $U(x,y)$는

$$U(x,y)=\begin{cases} x[1]+(1-x)\,y[-1], & x<y \\ 0, & x=y \\ y[-1]+(1-y)[1], & x>y \end{cases} \quad \cdots(110)$$

이며 참가자 1과 2의 최적전략 $f(x), g(y)$는 아래와 같이 혼합전략을 갖는다.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \sqrt{6}-2<x \\ \dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\,(x^2+2x-1)^{-\frac{3}{2}}, & \sqrt{6}-2<x\leq 1 \end{cases} \quad \cdots\cdots(111)$$

$$g(y)=\begin{cases} 0, & \sqrt{6}-2>y \\ \dfrac{3}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\,(y^2+2y-1)^{\frac{3}{2}}, & \sqrt{6}-2\leq y\leq 1 \end{cases} \quad \cdots\cdots(112)$$

게임의 값 V는

$V=5-2\sqrt{6}$ 이다. 그리고 참가자 1과 2가 시간 1에서 전략을 취할 확률은 각각 0과 $\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$ 이다. □

証明 참가자 1과 2가 시간 1에서 전략을 취할 확률이 각각 α, β라면

$$\int_a^1 U(x,y)\,f(x)\,dx+\alpha\,U(1,y)=V,\quad a\leq y\leq 1 \cdots\cdots(113)$$

$$\int_a^1 U(x,y)\,g(y)\,dy+\beta\,U(x,1)=V,\quad a\leq x\leq 1 \cdots\cdots(114)$$

이다. 그러므로

$$\int_a^t (x-t+xt)\,f(x)\,dx+\int_t^1 (1-2t)\,f(x)\,dx+\alpha(1-2t)=V \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (115)$$

$$\int_a^t (1-2y)\,g(y)\,dy+\int_t^1 (t-y+ty)\,g(y)\,dy+\beta\,(2t-1)=V \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (116)$$

이다. (115)와 (116)을 두번 미분하여 정리하면 $f(x)$, $g(y)$를 구하고, 구한 $f(x)$, $g(y)$를 (115)와 (116)에 대입하면 〔定理 8〕을 얻는다. △

위의 (1, 1) Silent－Noisy duel과 도표 6.의 $P_1(x)=P_2(x)=x$인 (1, 1) Silent duel과 비교하여 보면, (1, 1) Silent duel에서는 시간 $\frac{1}{3}$부터 게임이 시작되는데 (1,1) Silent－Noisy duel에서는 $\sqrt{6}-2\ (>\frac{1}{3})$에서 게임이 시작된다. 이로부터 정보를 모름에 따라 전략이 늦추어 짐을 알 수 있다. 또한 참가자 2는 Noisy duel을 사용하기 때문에 시간 1에서 전략을 취할 확률 $\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$를 갖는다. 한 참가자가 Silent duel, 다른 참가자가 Noisy duel을 취하는 Silent－Noisy duel은 앞으로 많은 연구가 요청된다.

9. 그 외의 게임理論的 결투

앞에서 알아 본 여러 형태의 duel 모델 외에도 결투상황에 영향을 미치는 요소들을 고려함에 따라 모델을 확장해 나갔다.

Bellman과 Girshick에 의해 (1, 1) Silent duel에서 초기 정확성이 주어진 모델〔1〕이 연구되었으며 Sweat에 의해 각 참가자가 하나의 탄알을 가진 Noisy duel에서 탐지(detection)가 고려된 모델〔23〕, 허위 목표물 (false target)을 갖는 모델〔22〕, 허위 목표물을 가지며 상대방이 두 종류의 무기를 갖는 모델〔24〕이 연구되었다. 그리고 Smith에 의해 참가자 1이 첫 행동을 Silent duel로 두번째는 Noisy duel을 취하는 두 발의 탄약을 가지며 참가자 2는 Noisy duel을 취하는 한 발의 탄약을 가진 경우의 모델〔21〕을 개발하였다.

지금까지 연구된 결투형태의 게임은 앞으로 연구되어야 할 대상이 많다. 각 참가자의 정보량이 다른 Silent－Noisy duel의 일반적인 解와 각 참가자의 이득비중이 다른 경우가 바로 그것이다.

参考文献

1. Bellman, R. And Girshick," An extension

of results on duels with two opponents, one bullet each, Silent gun, equal accuracy," The RAND Corporation, D-405, 1949.

2. Bezer, R. L., "The silent duels, specified accuracies, one bullet each," The RAND Corporation, RAD-301, 1948.

3. Blackwell, D., "The silent duel, one bullet each, arbitrary accuracy," The RAND Corporation, RM-302, 1948.

4. Blackwell, D., "The Noisy duel, one bullet each, arbitrary, non-monotone accuracy," The RAND Corporation, D-442, 1949.

5. Blackwell, D. And Girshick, M. A., Theory of Games and Statistical Decisions, New York, Wiley, 1954.

6. Dresher, M., Games of strategy: Theory and Applications, Princeton-Hall, 1961.

7. Everett, H., "Recursive games," Annals of mathematics studies No. 39., 1957.

8. Flemming, W.H., "On a class of games over function space and related variation problems," Annals of mathematics, Vol, 60, No. 3 (1954), pp. 578-594.

9. Fox, M. And Kimeldorf, G., "Noisy duels,". SIAM J. of Applied Mathematics, Vol. 17, No. 2 (1969), pp. 353-361.

10. Gillman, L., "Operations analysis and the theory of games: An advertising example," J. of Amer. Stat. Assoc., Vol. 45, No. 252 (1950), pp. 541-546.

11. Glicksberg, I., "Noisy duel, one bullet each, with simultaneous fire and unequal worths," The RAND Corporation, RM-474, 1950.

12. Issacs, R., Differential games, Wiley, New York, 1965.

13. Karlin, S., Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics Vol. II., Addison-wesley Reading Massachusetts, 1959.

14. Karlin, S., "Reduction of certain classes of games to integral equation," Annals of Mathematics Studies No. 28, 1953.

15. Lang, J. P. And Kimeldorf, G., "Duels with continuous firing," Management Science, Vol. 22, No. 4 (1975), pp. 470-476.

16. Lang, J. P. And Kimeldorf, "Silent duels with nondiscrete firing," SIAM J. Applied Mathematics, Vol. 13, No. 1 (1976), pp. 99-110.

17. Luce, R. D. And Raiffa, H., Games and Decision, John, Wiley and Sons, Inc., New York, 1957.

18. Owen, G., Game Theory, W.B. Saunders Company, Philadelphia, 1968.

19. Restrepo, R., "Tactical involving several action," Annal, of mathematical studies, Vol. 39 (1959), pp. 313-335.

20. Shiffman, M., "Games of timing," Annals of Math. Studies No. 28, 1953, pp. 97-123

21. Smith, G., "A duel with silent-noisy gun versus noisy gun," Colloquium Mathematicum, Vol. 17 (1967), pp. 131-146

22. Sweat, C. W., "A duel involving false targets." Operations Research, Vol. 17 (1969), pp. 478-488.

23. Sweat, C. W., "A duel complicated by false targets and uncertainty as to opponent type," Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 19, No. 2 (1972), pp. 355-367.

24. Yanovskaya, YE. B., "Duel-type games with continuous firing," Engineering Cybernetics, Vol. 7, No. 1 (1969), pp. 15-18.