래디알 타이어의 構造力學

韓國타이어製造(株) 技術開發部 課長
柳 根 宣 譯

1. 序 言

래디알 타이어(Radial tire, Gürtelreifen)는 1950年頃 開發되어 鋪裝道路上에서 從來의 바이어스 타이어보다도 耐久性 및 操縱性이 優秀하다는 것이 實證되면서부터 乘用車 및 트럭·버스 타이어로 急速히 伸張되었으며, 특히 유럽地域에서는 占有率이 높다. 래디알 타이어는 補强 cord를 半徑方向으로 配列시킨 Carcass에 Breaker라고 하는 bias 積層型 belt가 圓周方向으로 감겨 있는 構造이므로 어느 정도 自由로이 타이어의 斷面形을 扁平化할 수 있는 한편, 對路面强度 및 剛性을 向上시킬 수 있는 構造上의 큰 長點을 가지고 있다. 이것은 Breaker라고 하는 構造要素가 타이어 設計法에 하나의 새로운 自由度를 주고 있다는 것, 즉 타이어 設計方式의 多樣化를 意味하게 되므로 실로 劃期的인 變革이라 할 수 있다. 그러나 이로 인한 벨트와 Carcass間의 層間剪斷强度問題라든가, side wall의 屈曲變形이 크므로 Bead部의 補强策을 考慮하지 않으면 안 되는 點 등 構造上의 諸問題가 派生하고 있다.

從來의 바이어스 타이어가 比較的 單純한 membrane 構造인데 對해, 래디알 타이어는 屈曲剛性을 가진 breaker belt를 包含한 構造方式이므로 cord 强化고무層으로 된 積層型複合構造體로서의 構造力學이 타이어 設計上에 絕對로 必要하게 되었다.

元來 타이어의 構造力學的 硏究는 타이어의 斷面形狀이나 內壓에 依한 cord張力의 決定에 관한 設計理論과 타이어 構成要素의 複合材料力學 및 타이어의 靜的·動的 性能에 관한 構造理論의 두 分野로 大別할 수 있다. 타이어가 開發된지는 1世紀以上 되나 이들 構造力學의 硏究가 始作된 것은 겨우 20~30年前이다. 즉, 그 때까지는 H.F. Schippel[1], F. Martin[2], C. Wood[3], J. Rotta[4] 및 R. Hadeckel[5] 등의 타이어 構造에 관한 先驅的 硏究는 있으나, 고무의 剛性을 無視한 網目理論(Netting theory)에 의한 明確한 바이어스 타이어 設計理論을 展開한 W. Hofferberth[6] (1955)의 硏究는 타이어 構造力學의 基礎를 구축하였다고 볼 수 있다. 이와 前後해서 Standing wave에 관한 D.M. Turner[7] (1954)의 公式이 發表되고, J.E. Adkins-R.S. Rivlin[8] (1955)에 依한 一連의 고무力學에 관한 硏究中에 cord로 拘束된 고무의 變形理論이 提出되었으며, 또 E. Fiala[9] (1954)에 依해 spring 달린 ring model에 依한 cornering 特性에 관한 解析理論이 나오는 등, 이 時期에 타이어構造力學의 序頭를 장식하는 優秀한 硏究가 進行되었다. 그 후 cord의 不伸張으로써 고무의 剛性을 考慮한 bias 積層理論이 赤坂[10] (1959)에 依해 展開되어 重雙曲型의 直交異方性板으로 된다는 것이 밝혀졌다. 또 彈性을 가진 cord와 고무 matrix의 複合效果를 考慮한 bias 積層板의 理論이 S.K. Clark[11] (1963)에 의해 提示되었으나 이것은 本格的인 積層理論이다.

이와 같이 타이어 構造에 對해서 網目理論, 코오드 不伸張理論, 複合積層理論 등으로 發展해오고 있으나 점차로 解析的으로는 複雜해지므 컴퓨터의 依存度가 점차 높아지고 있는 現狀이로다.

래디알 타이어에 관한 硏究는 F. Böhm[12] (1967)에 依해서 그 斷面形狀理論이 提出되어 spring 달린 ring model에 依한 래디알 타이어의 振動特性이나 Standing Wave의 解析을 처음으로 하게 되었으며, 그 후 Shell 모델에 依한 解析도 進行되었다. 現在 래디알 타이어 뿐만 아니라, 바이어스 타이어나 belted bias 타이어를 包含하여 一般的으로 타이어는 FRR(Fiber Reinforced Rubber)의 積層型複合構造體라는 認識이 점차 정착될 段階이며 컴퓨터에 依한 타이어 性能의 解析까지도 意欲的으르 進行되고 있다. 以下 래디알 타이어에 關한 構造力學上의 成果에 대해서 설명하고자 하다.

2. 래디알 타이어의 斷面形狀

2.1 接觸壓

래디알 타이어뿐 아니라 一般的으로 타이어의 斷面形狀은 mold 形狀과 관련시켜 생각하지 않으면 안 된다. 바이어스 타이어에서는 Netting 理論에 依해 얻어지는 平衡形狀은 內壓에 無關한 幾何的 形狀이므로, 여기에 코오드의 彈性的 伸張이나 熱收縮 등의 影響을 補正함으로써 mold가 設計되어 왔다. 그것은 成長 후의 與壓狀態에서 발생하는 形狀誤差를 可及的 작게 하여 無益한 初期內力을 피할려고 하는 생각이다. 그러나 逆으로 racing tire의 成形에서 볼 수 있는 바와 같이 成形 후 一定全壓을 준 狀態에서 tread部를 幅넓게 편평하도록 미리 트레드의 屈曲剛性을 考慮하여 平衡形狀과는 다른 mold 形狀을 設計하는 方法도 쓰고 있다.

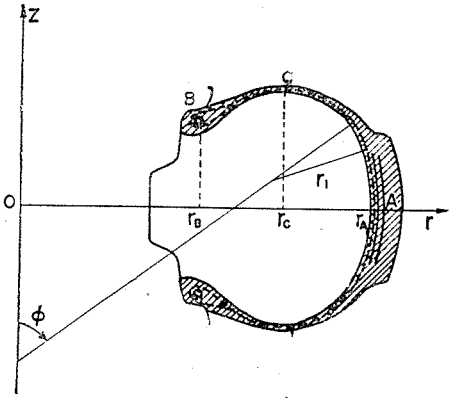
즉, 前者는 mold內에서의 加黃狀態에서 코오드가 거의 內壓만을 받아 mold 壁으로부터의 拘束反力을 받지 않는 경우이며, 後者는 오히려 mold 壁으로부터 拘束反力을 故意로 利用하고 있는 경우라고 할 수 있다.

래디알 타이어의 成形原理는 後者에 속한다. 즉, radial cord는 특히 트레드部에서 內壓과 함께 mold로부터이 反力을 받은 狀態에서 加黃成形되나, 이 形狀은 內壓만을 받았을 때의 래디알 코오드의 平衡形狀과는 明確히 다르기 때문이다. 여기서, 成形後 與壓된 狀態에서 Breaker belt로부터의 接觸壓이 成形時의 mold 反力에 代替되는 셈이나 그 接觸壓은 Breaker의 彈性變形量에 依存한다. 그러므로 래디알 타이어의 平衡狀態는 mold形狀과 成形 후의 Breaker 剛性에 의해 좌우되므로 그 決定은 극히 어렵다. 그러나 便宜的으로는 內壓으로 假定된 接觸壓을 同時에 받는 래디알 코오드의 平衡形狀으로써 일단 정할 수 있다. 단, 接觸壓에 관한 硏究는 거의 하지 않고 있다.

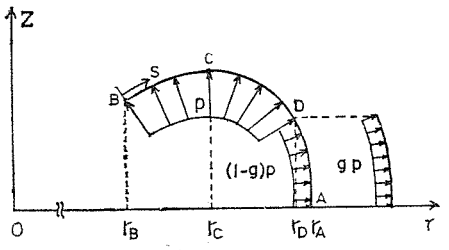
2.2 斷面形狀의 解析

래디알 타이어를 포함한 一般 타이어의 斷面形狀에 對해서는 吉村[13]의 詳細한 解說이 있으므로 여기에서는 補充記述을 하고자 한다. 래디알 타이어의 斷面形狀에 對해서는 Netting 理論에 의한 F. Böhm[12]과 F. Frank[14]의 硏究가 있다. Böhm에 의해 주어진 式은 子午線曲率半徑 r_1이 Breaker의 바이어스角 β_G, Carcass의 코오드角 β_K, Turning point G點, 半徑座標 r_C 및 Breaker의 內壓分擔率 $g(s)$를 파라메터로 하여 r, ϕ의 函數로 表示되어 있다(그림 1, 2).

한편 Frank의 式은 $g(s)$ 代身 트레드中心의 曲率半徑 r_{1A}가 파라메터로 되어 있으므로 $g(s)$는 自然히 다르게 된다. 어쨌든 어느 것이나 數値積分을 함으로써 $Z=f(r)$形의 斷面形狀이 된다.



〔그림 1〕 래디알 타이어의 斷面形



〔그림 2〕 Breaker와 Carcass의 內壓分擔率 g

前者에서는 g(s)抛物線形으로 가정한 경우이고, 後者에서는 r_{1A}를 적당히 가정한 경우의 數値計算結果는 實測斷面形과 잘 一致하고 있다. 이들 解析에서는 다같이 코오드 張力은 side wall 部와 트레드部에서 不連續的으로 變化되나 成形加工後의 與壓狀態에서는 트레드部의 幅方向引張剛性은 작으므로 子午線方向張力은 거의 래디알 코오드가 負擔한다고 생각된다. 따라서 近似的으로 코오드 張力은 連續이며 一定하다고 가정할 수 있다.

또, g(s)는 抛物線보다도 사다리꼴에 가깝다는 것이 Frank의 計算結果로도 알 수 있다. 따라서 近似的으로 g(s)는 트레드幅에 걸쳐서 一定値를 취한다고 가정된다.

이와 같은 假定을 導入하면 斷面形狀은 다음과 같은 式으로 구할 수 있다[15].

(i) $r_B \leqq r \leqq r_D$

$$z=z_C-\int_{r_C}^{r}\frac{r^2-r_C^2}{\sqrt{\{(r_D^2-r_C^2)+\zeta(r_A^2-r_D^2)\}^2-(r^2-r_C^2)^2}}dr \quad \cdots\cdots(1)$$

(ii) $r_D \leqq r \leqq r_A$

$$z=z_D-\int_{r_D}^{r}[(r_D^2-r_C^2)+\zeta(r^2-\zeta_D^2)/\sqrt{\{(r_D^2-r_C^2)+\zeta(r_A^2-r_D^2)\}^2-\{(r_D^2-r_C^2)+\zeta(r^2-r_D^2)\}^2}dr] \quad \cdots(2)$$

여기서 $\zeta \equiv 1-g$이다. 다시 윗式은 楕圓積分으로 다음과 같이 表示된다[16]. 단, 각각 두 가지 경우로 나누어서 다른 形으로 주어진다.

(i) $r_B \leqq r \leqq r_D$

(a) $r_E^2-2r_C^2 \leqq 0$인 경우

$$z=r_E E(k_1,\theta)-\frac{r_C^2}{r_E}F(k_1,\theta) \quad \cdots\cdots(3)$$

여기서

$$\begin{cases} r=r_E\sqrt{1-k_1^2\sin^2\theta}, \quad k_1=\sqrt{\dfrac{2(r_E^2-r_C^2)}{r_E^2}} \\ r_E^2=\zeta r_A^2+(1-\zeta)r_D^3, \quad \zeta=1-g=\text{const} \end{cases} \quad \cdots\cdots(4)$$

이다. 또 $F(k,\theta)$, $E(k,\theta)$는 각각 제 1종, 제 2종 楕圓積分으로 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{cases} F(k,\theta)=\displaystyle\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \\ E(k,\theta)=\displaystyle\int_0^\theta \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta \end{cases} \quad \cdots\cdots(5)$$

(b) $r_E^2-2r_C^2 \geqq 0$ 인 경우

$$z=\sqrt{2(r_E^2-r_C^2)}\,E(k_1',\psi)-\sqrt{\frac{r_E^2-r_C^2}{2}}F(k_1',\psi) \quad \cdots\cdots(6)$$

여기서

$$r=r_E\cos\psi, \quad k_1'=\sqrt{\frac{r_E^2}{(2r_E^2-r_C^2)}} \quad \cdots\cdots(7)$$

이다.

(ii) $r_D \leqq r \leqq r_A$

(a) $r_F^2-2r_C^2 \leqq 0$인 경우

$$z=z_D+\frac{r_D^2(1-\zeta)-r_C^2}{\zeta r_A}\{F(k_2,\theta)-F(k_2,\theta_D)\}+r_A\{E(k_2,\theta)-E(k_2,\theta_D)\} \quad \cdots\cdots(8)$$

여기서

$$\begin{cases} r=r_A\sqrt{1-k_2^2\sin^2\theta}, \quad k_2=\sqrt{\dfrac{2(r_E^2-r_C^2)}{\zeta r_A^2}} \\ r_F^2=\zeta r_A^2+2(1-\zeta)r_D^2=r_E^2+(1-\zeta)r_D^2 \end{cases} \quad \cdots\cdots(9)$$

이다.

(b) $r_F^2-2r_C^2 \geqq 0$ 인 경우

$$z=z_D+\sqrt{\frac{2(r_E^2-r_C^2)}{\zeta}}\{E(k_2',\psi)-E(k_2',\phi_D)\}-\sqrt{\frac{r_E^2-r_C^2}{2\zeta}}\{F(k_2',\psi)-F(k_2',\phi_D)\} \quad \cdots\cdots(10)$$

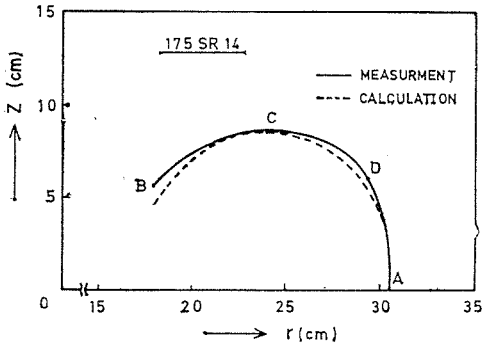
여기서

$$r=r_A\cos\psi, \quad k_2'=\sqrt{\frac{\zeta r_A^2}{2(r_E^2-r_C^2)}} \quad \cdots\cdots(11)$$

이다.

그림 3은 이 理論에 依한 斷面의 計算曲線과 實測曲線을 比較한 例를 표시한 것이다.

bead部와 breaker end部에서 多少 벗어나는 것 같다.



〔그림 3〕 래디알 타이어(175 SR 14)의 斷面形과 計算曲線과의 比較

한편 코오드 張力 t 는

$$t=\frac{\pi p}{N}[(r_D^2-r_C^2)+\zeta(r_A^2-r_D^2)] \quad \cdots\cdots(12)$$

로 주어진다. N은 래디알 코오드의 總本數이다.

또 코오드 길이 L 은 B~D 間의 길이 L_1과 D~A 間의 길이 L_2의 合으로 表示되나 이 때에도 斷面形狀에 의해 다음과 같이 두 가지 모양으로 주어진다.

$$L_1=\begin{cases}\dfrac{r_E^2-r_C^2}{r_E}\{F(k_1,\theta_B)-F(k_1,\theta_D)\}, \\ \qquad (r_E^2-2r_C^2\leqq 0) \quad \cdots\cdots(13) \\ \sqrt{\dfrac{r_E^2-r_C^2}{2}}\{F(k_1',\phi_B)-F(k_1',\phi_D)\}, \\ \qquad (r_E^2-2r_C^2\geqq 0)\end{cases}$$

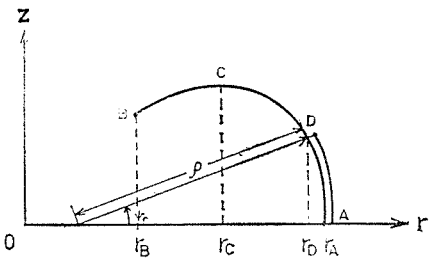
$$L_2=\begin{cases}\dfrac{r_E^2-r_C^2}{\zeta r_A}F(k_2,\theta_D), \quad (r_F^2-2r_C^2\leqq 0) \\ \sqrt{\dfrac{r_E^2-r_C^2}{2\zeta}}F(k_2',\phi_D), \quad (r_F^2-2r_C^2\geqq 0)\end{cases}$$
$$\cdots\cdots(14)$$

2.3 圓弧形 트레드를 가진 斷面形

여기서 前節과 같이 코오드 張力을 一定하게 하고 트레드部의 形狀을 便宜的으로 一定曲率半徑 ρ 인 圓弧로 假定함으로써 Side Wall部의 斷面形狀에 對해서 간단한 表式을 나타낼 수 있다[16]. (그림 4) 즉,

$$z=z_D+\int_r^{r_D}\frac{r^2-r_C^2}{\sqrt{(r_D^2-r_C^2)z\sec^2\phi_0-(r^2-r_C^2)^2}}dr$$
$$\cdots\cdots(15)$$

이다. 여기서 $z_D=\rho\sin\phi_0$이다. 이 積分形도 다음과 같이 楕圓積分으로 두 가지로 表示된다.



〔그림 4〕 圓弧形트레드를 가진 래디알 타이어의 斷面形

(a) $R^2-2r_C^2\leqq 0$ 인 경우

$$z=z_D+\frac{r_C^2}{R}\{F(k,\theta_D)-F(k,\theta)\}$$
$$-R\{E(k,\theta_D)-E(k,\theta)\} \quad \cdots\cdots(16)$$

여기서

$$\begin{cases}R^2=(r_D^2-r_C^2)\sec\phi_0-r_C^2 \\ r=R\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}, \quad k=\sqrt{\dfrac{2(R^2-r_C^2)}{R^2}}\end{cases}$$
$$\cdots\cdots(17)$$

이다.

(b) $R^2-2r_C^2\geqq 0$ 인 경우

$$z=z_D+\sqrt{\frac{R_2-r_C^2}{2}}\{F(k',\phi_D)-F(k',\psi)\}$$
$$-\sqrt{2(R^2-r_C^2)}\{E(k',\phi_D)-E(k',\psi)\}$$
$$\cdots\cdots(18)$$

여기서

$$r=R\cos\psi, \quad k'=\sqrt{\frac{R^2}{2(R^2-r_C^2)}} \quad \cdots\cdots(19)$$

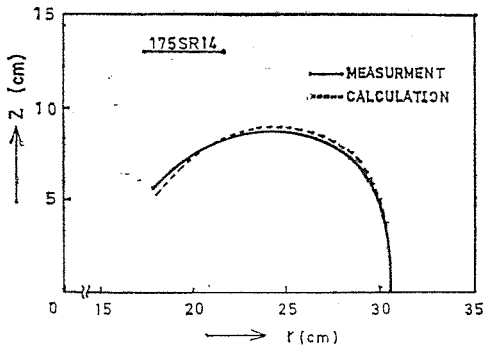
이다. 이 때의 內壓分擔比 ζ는 一定하지 않고 다음 式으로 나타난다.

$$\zeta=\frac{r_D^2-r_C^2}{2(\rho-r_A+r_D)r} \quad \cdots\cdots(20)$$

또 코오드 張力 t 는

$$t=\frac{p\cdot\pi}{N}\frac{\rho(r_D^2-r_C^2)}{\rho-r_A+r_D} \quad \cdots\cdots(21)$$

이다. 式 (16), (18)에서 주어진 B~D曲線은 D點에서 圓弧形트레드와 共通接線을 가지나 曲率은 不連續이다. 그림 5는 計算曲線과 實測曲線을 比較한 例(175 SR 14)인데 計算曲線이 약간 Side Wall部에서 나오고 bead部에서 안쪽으로 들어간 傾向이 보인다.

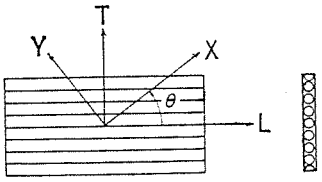


〔그림 5〕 래디알 타이어(175 SR 14)의 斷面形과 理論曲線과의 比較

3. Breaker belt의 構造力學

3.1 一方向코오드强化고무板

래디알 타이어에 있어서 Breaker belt의 構造特性은 設計上·性能上 극히 重要한 意味를 갖는다. 특히 接觸壓 및 Cornering特性과 密接한 關係를 가지므로 그 力學的 特性을 明確히 해둘 必要가 있다. Breaker belt는 比較的 작은 바이어스角으로 積層된 帶板이나, 그 構造特性은 그 構成層인 Calender, 즉 一方向纖維强化고무層(UDFRR ; Unidirectional Fiber Reinforced Rubber, Layer)이 갖는 性質로써 明確히 해둘 必要가 있다. 그림 6은 UDFRR層에서, 纖維方向座標를 L(longitudinal), 直交方向을 T(transverse)라 할 때 直交異方性을 가지므로 獨立된 4個의 彈性定數가 定義된다. 즉, Young 率 E_L, E_T, Poison 比 ν_L, (ν_T) 및 剪斷剛性率 G_{LT}이다. 단, Maxwell-Betti의 相反定理 ; $E_L/E_T=\nu_L/\nu_T$가 成立함을 알 수 있다. 이제 코오드 및 고무의 體積含有率을 각각 V_f, $V_m(=1-V_f)$, 각각의 等方性彈性定數를 E_f, ν_f, $G_f=E_f/2(1+\nu_f)$ 및 E_m, ν_m, $G_m=E_m/2(1+\nu_m)$라 하면 複合理論으로부터 다음과 같은 關係를 알 수 있다.



〔그림 6〕 一方向코오드强化고무板과 座標系

$$\begin{cases} E_L=E_fV_f+E_mV_m \\ \dfrac{1}{E_T}=\dfrac{V_f}{E_f}+\dfrac{V_m}{E_m}-V_fV_m\dfrac{\left(\dfrac{\nu_m}{E_m}-\dfrac{\nu_f}{E_f}\right)^2}{\dfrac{V_f}{E_m}+\dfrac{V_m}{E_f}} \\ \nu_L=\nu_fV_f+\nu_mV_m,\quad \nu_T=\nu_L\dfrac{E_T}{E_L} \\ \dfrac{1}{G_{LT}}=\dfrac{V_f}{G_f}+\dfrac{V_m}{G_m} \end{cases} \quad \cdots\cdots(22)$$

특히 FRR에서는 $E_f\gg E_m$, $\nu_m\fallingdotseq 1/2$ 이므로 윗식은 다음과 같이 近似된다.

$$\begin{cases} E_L\approx E_fV_f\gg E_T \\ E_T\approx\dfrac{E_m}{V_m}\dfrac{1}{(1-\nu_m^2)}\approx\dfrac{4}{3}\dfrac{E_m}{V_m} \\ \nu_T\approx 0 \\ G_{LT}\approx\dfrac{G_m}{V_m}=E_T\dfrac{1-\nu_m}{2}\approx\dfrac{E_T}{4} \end{cases} \quad \cdots\cdots(23)$$

이와 같은 近似化는 고무를 매트릭스로 하는 複合材料特有의 것으로, 例컨대 플라스틱 매트릭스에 對해서는 成立하지 않는다는 것을 注意해야 한다.

일반적으로 直交異方性의 Hooke 法則은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_L\\ \sigma_T\\ \tau_{LT}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}E_L/(1-\nu_L\nu_T), & \nu_LE_T/(1-\nu_L\nu_T), & 0\\ \nu_TE_L/(1-\nu_L\nu_T), & E_T/(1-\nu_L\nu_T), & 0\\ 0 & 0 & G_{LT}\end{bmatrix}\times\begin{Bmatrix}\varepsilon_L\\ \varepsilon_T\\ \gamma_{LT}\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(24)$$

이제 그림 6과 같이 θ만큼 回轉된 直交座標系 $O-x,y$에 對한 Hooke 法則은 다음과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{xx} & E_{xy} & E_{xs}\\ E_{xy} & E_{yy} & E_{ys}\\ E_{xs} & E_{ys} & E_{ss}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix};$$

$$\{\sigma_x\}=[E]\{\varepsilon_x\} \quad \cdots\cdots(25)$$

혹은

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{xx} & C_{xy} & C_{xs}\\ C_{xy} & C_{yy} & C_{ys}\\ C_{xs} & C_{ys} & C_{ss}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix};$$

$$\{\varepsilon_x\}=[C]\{\sigma_x\} \quad \cdots\cdots(26)$$

여기서 $[E]$, $[C]$는 다같이 對稱 matrix로서

각각 剛性 매트릭스 및 컴플라이언스 매트릭스라고 하며 서로 逆매트릭스 關係에 있다. 또 그들의 element는 $E_L, E_T, \nu_L, \nu_T, G_{LT}$ 및 回轉角 θ의 函數로 주어져 있다[17]. 특히 고무 매트릭스의 경우, 式 (23)에 依해 簡略化하면 다음과 같이 近似化된다[18].

$$\begin{cases} E_{xx}\approx E_T+E_L\cos^4\theta \\ E_{yy}\approx E_T+E_L\sin^4\theta \\ E_{ss}\approx E_T/4+E_L\sin^2\theta\cos^2\theta \\ E_{xy}\approx E_T/2+E_L\sin^2\theta\cos^2\theta \\ E_{xs}\approx -E_L\sin\theta\cos^3\theta \\ E_{ys}\approx -E_L\sin^3\theta\cos\theta \end{cases} \quad \cdots\cdots(27)$$

이제, x 軸方向의 一軸引張($\sigma_x\neq 0,\ \sigma_y=\tau_{xy}=0$) 狀態를 생각하면 式 (26)에서 軸方向伸張 ε_x, y 方向收縮 ε_y 외에 다음과 같은 剪斷變形이 일어나게 된다.

$$\gamma_{xy}=C_{xs}\sigma_x \quad \cdots\cdots(28)$$

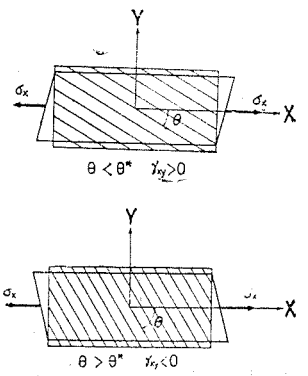
이와 같은 現象을 面內 Coupling이라고 하나 그의 基인 C_{xs}는 式(23)의 近似式을 이용하면 다음과 같이 簡單化된다.

$$\begin{aligned} C_{xs}&=-2\cos^3\theta\sin\theta\frac{1+\nu_L}{E_L}+2\cos\theta\sin^3\theta\frac{1+\nu_T}{E_T} \\ &\quad+\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{1}{G_{LT}} \\ &\approx\frac{2\sin\theta\cos^3\theta}{E_T}(2-\tan^2\theta) \quad \cdots\cdots(29)\end{aligned}$$

즉, Coupling 變形은 $\theta=0,\ \pi/2$ 외에, 그 中間의 바이어스角 θ^*에서 소멸된다.

$$\theta^*\equiv\tan^{-1}\sqrt{2}=54.7^\circ \quad \cdots\cdots(30)$$

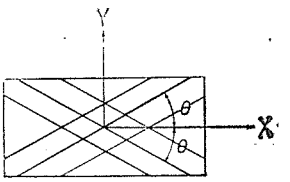
그림 7은 $\theta\gtrless\theta^*$에 對한 Coupling 變形을 표시한 것이다. 이와 같은 Coupling 變形의 逆轉은 UDFRR特有의 現象이다.



〔그림 7〕 一軸引張에 의한 커플링 剪斷變形 γ_{xy}와 코오 드方位角 θ와의 關係

3.2 바이어스 積層板

3.2.1 彈性定數 그림 8과 같이 UDFRR層을 2層바이어스로 積層한 板도 역시 直交異方性이 되나 그 彈性定數는 積層理論에 依해 구한다. 즉 1層, 2層의 區別을 $^{(1)},^{(2)}$로 表示하면 式 (25)에서



〔그림 8〕 Bias角 θ의 積層板

$$\begin{aligned}\{\sigma_x^{(1)}\}&=[E(-\theta)]\{\varepsilon_x^{(1)}\},\ \{\sigma_x^{(2)}\} \\ &=[E(\theta)]\{\varepsilon_x^{(2)}\} \quad \cdots\cdots(31)\end{aligned}$$

으로 되나 層間의 미끄름을 생각지 않는다면 $\{\varepsilon_x^{(1)}\}=\{\varepsilon_x^{(2)}\}\equiv\{\varepsilon_x\}$로 된다. 平均應力 ; $\{\sigma_x\}=(\{\sigma_x^{(1)}\}+\{\sigma_x^{(2)}\})/2$에 對해서 Hooke 法則은

$$\begin{aligned}\{\sigma_x\}&=\frac{1}{2}\{[E(-\theta)]+[E(2)]\}\{\varepsilon_x\} \\ &\equiv[E^*(\theta)]\{\varepsilon_x\} \quad \cdots\cdots(32)\end{aligned}$$

로 된다. 여기서 剛性 matrix는 다음과 같은 對稱 matrix로 된다.

$$[E^*(\theta)]=\begin{bmatrix} E_{xx}^* & E_{xy}^* & 0 \\ E_{xy}^* & E_{yy}^* & 0 \\ 0 & 0 & E_{ss}^* \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(33)$$

이리하여 彈性定數는 다음과 같은 式으로 주어진다.

$$\begin{cases} E_x=E_{xx}^*-\dfrac{(E_{xy}^*)^2}{E_{yy}^*},\quad E_y=E_{yy}^*-\dfrac{(E_{xy}^*)^2}{E_{xx}^*} \\ \nu_x=\dfrac{E_{xy}^*}{E_{yy}^*},\quad \nu_y=\dfrac{E_{xy}^*}{E_{xx}^*},\quad G_{xy}=E_{ss}^* \end{cases} \quad \cdots\cdots(34)$$

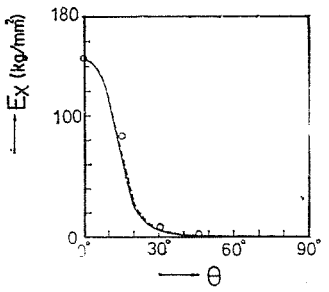
특히 고무 matrix의 경우, 式 (27)의 近似表式을 이용하면 다음 近似式을 얻을 수 있다[18].

$$\begin{cases} E_x=\dfrac{E_LE_T(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)+\frac{3}{4}E_T^2}{E_L\sin^4\theta} \\ E_y=\dfrac{E_LE_T(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)+\frac{3}{4}E_T^2}{E_L\cos^4\theta} \end{cases}$$

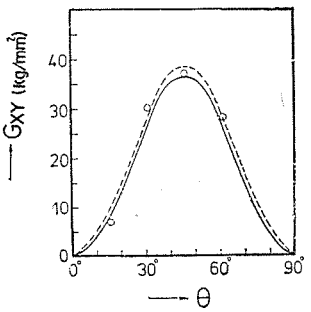
$$\left\{\begin{aligned}\nu_x &= \frac{E_L\sin^2\theta\cos^2\theta+\frac{1}{2}E_T}{E_L\sin^4\theta+E_T}\\ \nu_y &= \frac{E_L\sin^2\theta\cos^2\theta+\frac{1}{2}E_T}{E_L\cos^4\theta+E_T}\\ G_{xy} &= E_L\sin^2\theta\cos^2\theta+\frac{1}{4}E_T\cos^2 2\theta\end{aligned}\right. \quad \cdots\cdots(35)$$

式(35)의 表式 사이에는 Maxwell-Betti의 相反性定理 ; $E_x/E_y=\nu_x/\nu_y$가 成立함을 알 수 있다.

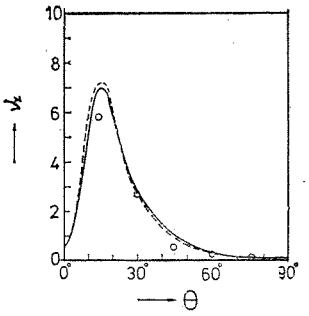
數値例($E_L=147\text{kg/mm}^2$, $E_T=0.7\text{kg/mm}^2$)에 對한 彈性定數 E_x, ν_x, G_{xy}의 바이어스角 θ에 의한 變化를 그림 9, 10, 11에 表示하였다. 그림 중의 波線은 엄밀한 理論曲線, ○표는 實驗値로서 다같이 S.K. Clark[11]에 의해 구해진 것이다. 그림 중의 實線은 式(35)에서 計算된 近似曲線이다. 잘 一致하고 있음을 알 수 있다.



〔그림 9〕 바이어스 積層고무板의 Young率 E_x와 바이어스角 θ 와의 關係 [Ref. (11) : Clark]



〔그림 10〕 바이어스積層고무板의 剪斷剛性率 G_{xy}와 바이어스角 θ 와의 關係 [Ref. (11) : Clark]



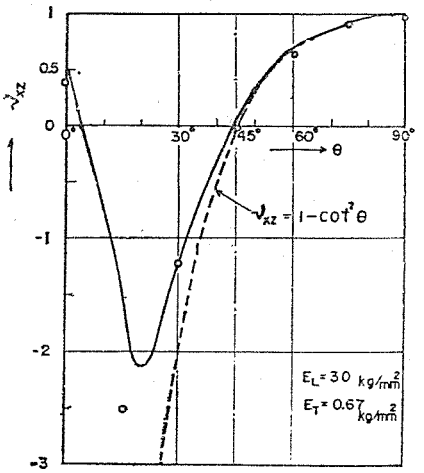
〔그림 11〕 바이어스積層고무板의 Poison比 ν_x 와 바이어스角 θ 와의 關係 [Ref. (11) : Clark]

3.2.2 두께 變化 바이어스積層板에서는 彈性軸方向으로 均一한 引張을 받게 되면 바이어스角 θ가 45°以下의 경우, 두께가 두꺼워지는 現象이 일어난다. 이것은 두께方向 Poison比 ν_z가 (−)임을 뜻한다. 이 때 바이어스 積層板에 있어서는 고무 matrix 自體가 非壓縮性이고, 또 變形機構가 펜타그래프效果에 의해 코오드의 伸縮變形이 極히 작기 때문에 總體的으로 體積變化가 거의 없다고 볼 수 있다. 따라서 $\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=0$으로 쓸 수 있다. 이와 같이 하여

$$\nu_{xz}\equiv-\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}=1+\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}=1-\nu_x \quad \cdots\cdots(36)$$

을 구한다. 式(35)를 고려하여

$$\nu_{xz}=1-\frac{E_L\sin^2\theta\cos^2\theta+E_T/2}{E_L\sin^4\theta+E_T}\approx 1-\cot^2\theta \quad \cdots\cdots(37)$$



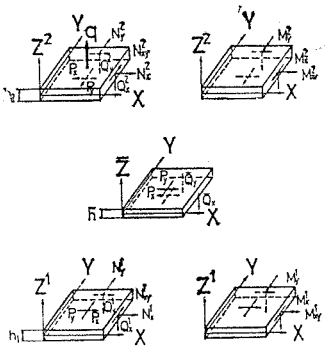
〔그림 12〕 板두께方向 Poison比 ν_{xz}와 바이어스角 θ 와의 關係

으로 表示된다[19]. 윗식에서 $\theta \fallingdotseq 45°$에서 $\nu_{xz}=0$임을 알 수 있다. 그림 12는 ν_{xz}의 θ에 의한 變化를 나타낸 것으로 實驗結果와 잘 一致한다. 바이어스角 $\theta=20°$ 부근에서는 현저한 두께 增加, 즉 構成層間의 離間現象에 주의하여야 한다.

3.3 바이어스積層帶板의 基礎方程式

여기서 接着層에 의한 層間剪斷變形을 考慮한 바이어스積層板의 一般的인 基礎方程式을 구해 두고자 한다. 단, 接着層은 얇은 고무層으로 그 引張剛性은 無視할 수 있는 것으로 보고, 단지 剪斷變形에 對한 剛性만을 考慮한다. 그림 13에 表示된 構成層($i=1,2$)에 對한 平衡條件式은 다음과 같이 쓸 수 있다[20].

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_x^{(i)}}{\partial x}+\dfrac{\partial N_{xy}^{(i)}}{\partial y}=(-1)^i p_x \\ \dfrac{\partial N_{xy}^{(i)}}{\partial x}+\dfrac{\partial N_y^{(i)}}{\partial y}=(-1)^i p_y \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(Q_x^{(1)}+Q_x^{(2)}+\bar{Q}_x)+\dfrac{\partial}{\partial y}(Q_y^{(1)} \\ \qquad +Q_y^{(2)}+\bar{Q}_y)=q \\ \dfrac{\partial M_x^{(i)}}{\partial x}+\dfrac{\partial M_{xy}^{(i)}}{\partial y}=Q_x^{(i)}+p_x\dfrac{h}{2} \\ \dfrac{\partial M_{xy}^{(i)}}{\partial x}+\dfrac{\partial M_y^{(i)}}{\partial y}=Q_y^{(i)}+p_y\dfrac{h}{2} \\ \bar{Q}_x=-p_x\bar{h},\ \bar{Q}_y=-p_y\bar{h} \end{cases} \quad \cdots\cdots(38)$$



〔그림 13〕 2層積層板에 作用하는 合應力, Moment 및 外力

여기서 p_x, p_y는 각각 x,y 方向의 層間剪斷應力이다. 膜力 N과 Moment M은 다음 式으로 주어진다.

$$\begin{cases} (N_x^{(i)},\ N_y^{(i)},\ N_{xy}^{(i)}) \\ \quad =\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x^{(i)},\ \sigma_y^{(i)},\ \tau_{xy}^{(i)})dz^{(i)} \\ (M_x^{(i)},\ M_y^{(i)},\ M_{xy}^{(i)}) \\ \quad =-\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x^{(i)},\ \sigma_y^{(i)},\ \tau_{xy}^{(i)})z^{(i)}dz^{(i)} \end{cases} \quad \cdots\cdots(39)$$

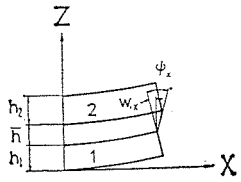
각 構成層에 對한 Hooke 法則은 각 中央面의 x,y 方向의 變位成分 $u^{(i)}$, $v^{(i)}$와 휨(굽힘) w에 의해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(i)} \\ \sigma_y^{(i)} \\ \tau_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{x_x}^{(i)} & E_{xy}^{(i)} & E_{xs}^{(i)} \\ E_{xy}^{(i)} & E_{yy}^{(i)} & E_{ys}^{(i)} \\ E_{xs}^{(i)} & E_{ys}^{(i)} & E_{ss}^{(i)} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u,_x^{(i)}-z^{(i)}w,_{xx} \\ v,_y^{(i)}-z^{(i)}w,_{yy} \\ u,_y^{(i)}+v,_x^{(i)}-2z^{(i)}w,_{xy} \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(40)$$

또 層間剪斷應力에 對해서는

$$\begin{cases} p_x=G_m\phi_x=\dfrac{G_m}{\bar{h}}(u^{(2)}-u^{(1)}+Hw,_x) \\ p_y=G_m\phi_y=\dfrac{G_m}{\bar{h}}(v^{(2)}-v^{(1)}+Hw,_y) \end{cases} \quad \cdots\cdots(41)$$

이다. 여기서 ϕ_x와 ϕ_y는 接着層의 剪斷變形이다(그림 14)). 또 $H\equiv h+\bar{h}$ 이다. 이와 같이 하여 變位成分에 對해 다음과 같은 聯立偏微分方程式을 얻을 수 있다.



〔그림 14〕 接着層의 剪斷變形 ϕ_x

$$\begin{cases} \{A_{xx}^{(i)}u,_{xx}^{(i)}+2A_{xs}^{(i)}u,_{xy}^{(i)}+A_{ss}^{(i)}u,_{yy}^{(i)}]\} \\ \quad +\{A_{xs}^{(i)}v,_{xx}^{(i)}+(A_{xy}^{(i)}+A_{ss}^{(i)})v,_{xy}^{(i)} \\ \quad +A_{ys}^{(i)}v,_{yy}^{(i)}\}=(-1)^i k(u^{(2)}-u^{(1)} \\ \quad +Hw,_x) \\ \{A_{xs}^{(i)}u,_{xx}^{(i)}+(A_{xy}^{(i)}+A_{ss}^{(i)})u,_{xy}^{(i)} \\ \quad +A_{ys}^{(i)}u,_{yy}^{(i)}\}+\{A_{ss}^{(i)}v,_{xx}^{(i)} \\ \quad +2A_{xs}^{(i)}v,_{xy}^{(i)}+A_{yy}^{(i)}v,_{yy}^{(i)}\} \\ \quad =(-1)^i k(v^{(2)}-v^{(1)}+Hw,_y) \\ D_{xx}w,_{xxxx}+4D_{xs}w,_{xxxy}+2(D_{xy}+2D_{ss})w,_{xxyy} \\ \quad +4D_{ys}w,_{xyyy}+D_{yy}w,_{yyyy}-kH\{u,_x^{(2)} \\ \quad -u,_x^{(1)}+v,_y^{(2)}-v,_y^{(1)}+H(w,_{xx}+w,_{yy})\} \\ \quad =q \end{cases} \quad (42)$$

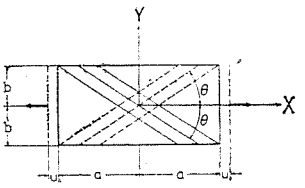
여기서

$$\begin{cases} k=\dfrac{G_{xz}}{\bar{h}}, \quad A_{\alpha\beta}{}^{(i)}=hE_{\alpha\beta}{}^{(i)}, \quad D_{\alpha\beta} \\ \quad =\dfrac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{2}E_{\alpha\beta}{}^{(i)}\ (\alpha,\beta=x,y,s) \end{cases} \cdots\cdots\cdots(43)$$

이다.

3.4 바이어스 積層帶板의 引張特性

그림 15에 表示된 바와 같이 有限의 幅을 가진 바이어스積層帶板이 一定變形 $\varepsilon_0=u_0/a$를 가지도록 一軸引張을 받을 때의 應力解析[21]에 대



〔그림 15〕 一軸引張을 받는 바이어스積層帶板

해서 생각한다. 단, 便宜上 對稱積層構造로 取扱하기로 한다. 基礎方程式(42)에 있어서 $w=0$으로 놓고 $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$에 關한 4개의 方程式을 구하여 이것을 $y=\pm b$에 있어서의 自由端의 境界條件, 構成層의 剛性 matrix의 對稱및 逆對稱條件, 즉

$$\begin{cases} A_{xx}{}^{(2)}=A_{xx}{}^{(1)}\equiv A_{xx}, A_{yy}{}^{(2)}=A_{yy}{}^{(1)}\equiv A_{yy}, \\ A_{xy}{}^{(2)}=A_{xy}{}^{(1)}\equiv A_{xy}, -A_{xs}{}^{(2)}=A_{xs}{}^{(1)}\equiv A_{xs}, \\ -A_{ys}{}^{(2)}=A_{ys}{}^{(1)}\equiv A_{ys}, \ A_{ss}{}^{(2)}=A_{ss}{}^{(1)}\equiv A_{ss} \end{cases} \cdots\cdots\cdots(44)$$

을 考慮함으로써 다음 結果를 얻는다.

$$\frac{N_x{}^{(1)}}{\varepsilon_0}=\frac{N_x{}^{(2)}}{\varepsilon_0}=A_{xx}-\frac{A_{xy}{}^2}{A_{yy}} -\frac{(A_{ys}A_{xy}-A_{yy}A_{xs})^2}{A_{yy}(A_{yy}A_{ss}-A_{ys}{}^2)}\cdot\frac{ch(\sqrt{\rho}y)}{ch(\sqrt{\rho}b)}$$

$$\frac{p_x}{\varepsilon_0}=\frac{2k}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{A_{xs}A_{yy}-A_{ys}A_{xy}}{A_{yy}A_{ss}-A_{ys}{}^2}\cdot\frac{sh(\sqrt{\rho}y)}{ch(\sqrt{\rho}b)} \cdots\cdots\cdots(45)$$

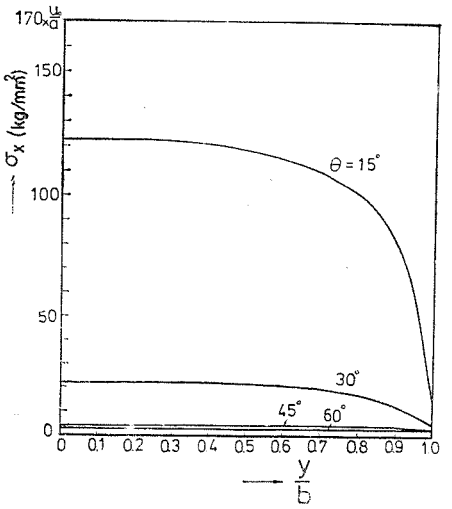
여기서

$$\rho\equiv\frac{2kA_{yy}}{A_{yy}A_{ss}-A_{ys}{}^2} \cdots\cdots\cdots(46)$$

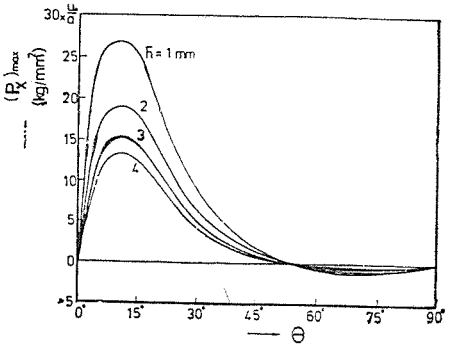
이다. 그림 16, 17에 數値例 ($E_L=200\text{kg/mm}^2$, $E_T=4\text{kg/mm}^2$, $\nu_L=0.5$, $\nu_T=0.01$, $G_{LT}=1\text{kg/mm}^2$, $G_{xz}=0.5\text{kg/mm}^2$, $b=50\text{mm}$, $h=5\text{mm}$, $\bar{h}=1\text{mm}$)에 대한 計算結果를 表示하였다. 軸方向引張膜力 N_x의 分布가 均一하지 않고 自由端附近에서 심한 "下落"을 나타낸다. 또 層間剪斷應力 p_x는 自由端에서 最大이며 中央部로 갈수록 急速히 減衰한다. 自由端의 $p_{x,\max}$은 바이어스角 $\theta=\theta^*=54.7°$ 부근에서 0으로 되며, 그것을 境界로 符號가 逆轉됨을 알 수 있다. 이것은 式(45)의 p_x의 表式에서 그 分子의 因數가 式(27)에 依해서

$$A_{yy}A_{xs}-A_{ys}A_{xy} \approx\frac{h^2}{2}E_TE_L\sin\theta\cos^3\theta(2-\tan^2\theta) \cdots\cdots\cdots(47)$$

과 近似하다는 사실로서도 알 수 있다.



〔그림 16〕 垂直應力 σ_x의 分布($h=1$ mm)



〔그림 17〕 最大層間剪斷應力 $p_{x,\max}$과 바이어스角 θ와의 關係

3.5 바이어스積層帶板의 引張에 의한 비틀림 變形

對稱構造가 아니라 單純한 2層積層을 생각하면 板두께方向으로 構造逆對稱性을 가지므로 引張에 의한 비틀림變形이 계속 일어난다[20]. 이때의 構成層의 變位形을 다음과 같이 假定할 수 있다.

$$\begin{cases} u^{(1)}=U(y)+u(y)x,\ v^{(1)}=V(y)+v(y)x \\ u^{(2)}=-U(y)+u(y)x,\ v^{(2)}=V(y)-v(y)x \\ w=\Omega xy \end{cases} \quad \cdots\cdots(48)$$

여기서 Ω는 비틀림率을 의미한다. 式(48)을 基礎式(42)에 代入하고 式(44)를 考慮함으로써 다음과 같은 方程式系를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} A_{ss}\dfrac{d^2u}{dy^2}+A_{ys}\dfrac{d^2v}{dy^2}=0,\ \dfrac{dv}{dy}=0 \\ 2A_{xs}\dfrac{du}{dy}+(A_{xy}+A_{ss})\dfrac{dv}{dy}+A_{ss}\dfrac{d^2U}{dy^2} \\ \quad +A_{ys}\dfrac{d^2V}{dy^2}=k(2U-\Omega Hy) \\ (A_{xy}+A_{ss})\dfrac{du}{dy}+2A_{ys}\dfrac{dv}{dy}+A_{ys}\dfrac{d^2U}{dy^2} \\ \quad +A_{yy}\dfrac{d^2V}{dy^2}=0 \\ A_{ys}\dfrac{d^2u}{dy^2}+A_{yy}\dfrac{d^2v}{dy^2}=k(2v-\Omega H) \end{cases} \quad \cdots\cdots(49)$$

이들 方程式은 軸方向의 均一한 變形條件, $y=\pm b$에 있어서의 自由端條件 및 다음과 같은 任意의 斷面에서 비틀림 moment가 0인 條件;

$$\int_{-b}^{b}\{2M_{xy}{}^{(1)}+HN_{xy}{}^{(1)}-(\bar{Q}_x+2Q_x{}^{(1)})y\}\,dy=0 \quad \cdots\cdots(50)$$

下에서 容易하게 풀이될 수 있으며, 비틀림率 Ω 및 層間剪斷應力 p_x에 對해서 각각 다음과 같은 結果를 얻을 수 있다.

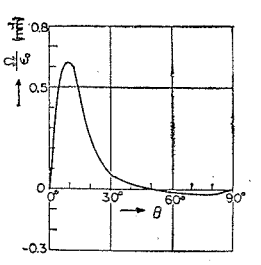
$$\frac{\Omega}{\varepsilon_0}=-\frac{H(A_{xs}A_{yy}-A_{ys}A_{xy})\{1-th(\sqrt{\rho}b)/\sqrt{\rho}b\}}{2D_{ss}A_{yy}+H^2(A_{ss}A_{yy}-A_{ys}{}^2)\{1-th(\sqrt{\rho}b)/\sqrt{\rho}b\}} \quad \cdots\cdots(51)$$

$$\frac{p_x}{\varepsilon_0}=\frac{2k}{\sqrt{\rho}}\,\frac{(A_{xs}A_{yy}-A_{xy}A_{ys})}{(A_{ss}A_{yy}-A_{ys}{}^2)} \times\frac{2D_{ss}A_{yy}sh(\sqrt{\rho}y)/ch(\sqrt{\rho}b)}{[2D_{ss}A_{yy}+H^2(A_{ss}A_{yy}-A_{ys}{}^2)\{1-th(\sqrt{\rho}b)/\sqrt{\rho}b\}]} \quad \cdots\cdots(52)$$

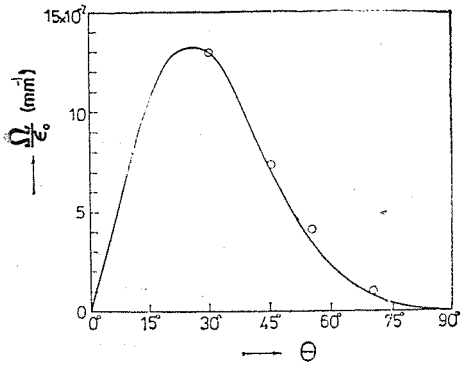
式(52)를 式(45)와 比較하여 다음 條件;

$$A_{ss}A_{yy}-A_{ys}{}^2 \approx\frac{h^2}{4}E_T\{E_T+E_L\sin^2\theta(1+3\cos^2\theta)\}>0 \quad \cdots\cdots(53)$$

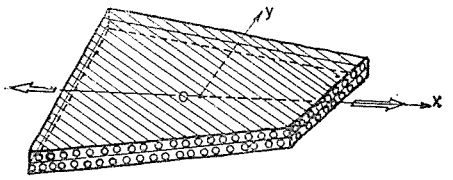
을 考慮하면 對稱積層의 경우에 比해서 p_x가 작음을 알 수 있다. 또 비틀림率 Ω나 最大層間剪斷應力 $p_{x,\max}$는 分子에 因數$(A_{xs}A_{yy}-A_{xy}A_{ys})$를 갖고 있으므로 式(47)을 고려하면 이들은 다같이 $\theta=\theta^*=54.7°$에서 消滅되는 동시에 그것을 境界로 符號가 逆轉된다. 그림 18은 FRR의 數値例($E_L=6,000\text{kg/mm}^2$, $E_T=12\text{kg/mm}^2$, $G_m=0.5\text{kg/mm}^2$, $h=1.5\text{mm}$, $\bar{h}=7\text{mm}$, $b=50\text{mm}$)에 對한 Ω와 θ의 關係를 나타낸 것이다. 그림 19는 FRP의 數値例($E_L=4,000\text{kg/mm}^2$, $E_T=980\text{kg/mm}^2$, $G_{LT}=450\text{kg/mm}^2$, $\nu_L=0.2$, $\nu_T=0.049$, $G_m=0.5\text{kg/mm}^2$, $b=30\text{mm}$, $h=0.25\text{mm}$, $\bar{h}=6\text{mm}$)에 對한 $\Omega\sim\theta$의 關係를 表示한 것으로 實驗値와 잘 一致하고 있다. 단, 이 때에는 Ω의 符號逆轉이 없다는 것을 주의해야 한다. 그림 20은 構成層의 纖維方向($\theta<\theta^*$)과 비틀림變形과의 關係를 그린 것이다. 또 引張에 따른 비틀림變形에 對해서는 코오드의 方位角이 0, $\pm\theta$의 3層積層帶板에 대해서도 解析[22]되고 있다는 것을 附記해 둔다.



〔그림 18〕 비틀림率 Ω와 바이어스角 θ와의 關係(1)



〔그림 19〕 비틀림率 Ω와 바이어스角 θ 와의 關係(2)

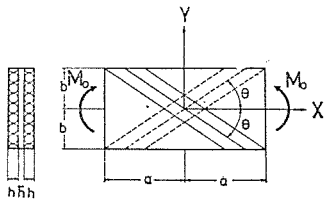


〔그림 20〕 바이어스積層板의 커플링 비틀림變形

3.6 바이어스積層帶板의 均一面內의 굽힘

그림 21과 같이 바이어스積層帶板에 均一한 面內의 굽힘 moment M_0을 주었을 때의 構成層의 變形[23]에 對해서는 다음과 같이 假定할 수 있다.

$$\begin{cases} u^{(1)}=U(y)+u(y)x,\ v^{(1)}=V(y)+v(y)x^2 \\ u^{(2)}=-U(y)+u(y)x,\ v^{(2)}=V(y)+v(y)x^2 \\ w=0 \end{cases} \quad \cdots\cdots(54)$$



〔그림 21〕 均一한 굽힘 moment M_0을 받는 bias 積層帶板

이것을 基礎方程式 (42)에 代入하고 또 式(44)를 연관시키면 다음과 같은 方程式系를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} 2A_{xs}\dfrac{du}{dy}+2A_{xs}v+A_{ss}\dfrac{d^2U}{dy^2}+A_{ys}\dfrac{d^2V}{dy^2} \\ \quad =2kU \\ (A_{xy}+A_{ss})\dfrac{du}{dy}+2A_{ss}v+A_{ys}\dfrac{d^2U}{dy^2} \\ \quad +A_{yy}\dfrac{d^2V}{dy^2}=0 \\ A_{ss}\dfrac{d^2u}{dy^2}+2(A_{xy}+A_{ss})\dfrac{dv}{dy}=0 \\ A_{ys}\dfrac{d^2u}{dy^2}+4A_{ys}\dfrac{dv}{dy}=0,\ \dfrac{d^2v}{dy^2}=0 \end{cases} \quad \cdots\cdots(55)$$

이들 方程式은 軸方向의 變形이 均一하다는 것, $y=\pm b$에 있어서의 自由端條件 및 다음의 端末條件;

$$\begin{cases} \int_{-b}^{b}(N_x^{(1)}+N_x^{(2)})dy=0 \\ \int_{-b}^{b}(N_x^{(1)}+N_x^{(2)})ydy=M_0 \end{cases} \quad \cdots\cdots(56)$$

下에서 쉽게 풀려 다음과 같은 結果를 얻을 수 있다. 즉, x軸方向層間剪斷應力 p_x는

$$p_x=-\frac{6kM_0}{B}A_{yy}(A_{xy}A_{ys}-A_{xs}A_{yy})\{\sqrt{\rho}bch(\sqrt{\rho}y)-sh(\sqrt{\rho}b)\} \quad \cdots\cdots(57)$$

로 되며, 굽힘 膜力은

$$N_x^{(2)}=N_x^{(1)}=-\frac{6kM_0}{B}A_{yy}\left\{\frac{A_{xs}A_{yy}-A_{xy}A_{ys})^2}{A_{ss}A_{yy}-A_{ys}^2}b\,sh(\sqrt{\rho}y)-(A_{xx}A_{yy}-A_{xy}^2)sh(\sqrt{\rho}b)\cdot y\right\} \quad \cdots\cdots(58)$$

으로 된다. 여기서

$$B=12b(A_{xy}A_{ys}-A_{xs}A_{yy})^2\{\sqrt{\rho}bch(\sqrt{\rho}b)-sh(\sqrt{\rho}b)\}-8kb^3A_{yy}(A_{xx}A_{yy}-A_{xy}^2)sh(\sqrt{\rho}b) \quad \cdots\cdots(59)$$

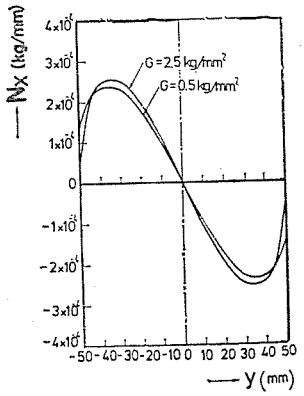
이다.

그런데, moment M_0와 x軸上에서의 曲率$\dfrac{d^2v}{dx^2}$와의 比로써 굽힘剛性 D를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$D=\frac{-B}{6kA_{yy}^2sh(\sqrt{\rho}b)} \quad \cdots\cdots(60)$$

數値例($E_L=6,000\text{kg/mm}^2$, $E_T=12\text{kg/mm}^2$, $G_{LT}=3\text{kg/mm}^2$, $G_m=0.5\text{kg/mm}^2$, $h=1.5\text{mm}$, $\bar{h}=7\text{mm}$, $b=50\text{mm}$)에 對한 굽힘膜力分布를 그

림 22에 表示하였다. 이에 따르면, 거의 S字形 分布에 近似하므로 굽힘剛性의 低下가 豫想된다.



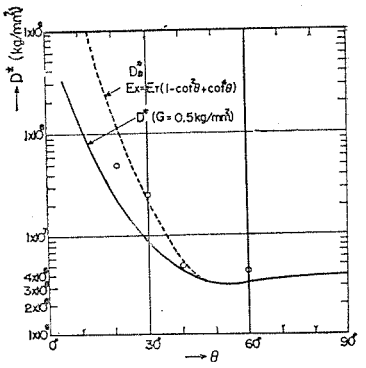
〔그림 22〕 굽힘應力分布($M_0=1\text{kg}\cdot\text{mm}$, $\theta=40°$)

式 (57)에서 層間剪斷應力 p_x는 역시 $\theta=\theta^*=54.7°$에서 消滅된다. 이 때 굽힘 膜力分布는 線形으로 되어 初等理論과 一致하게 된다. 式 (60)은 다음과 같이 된다.

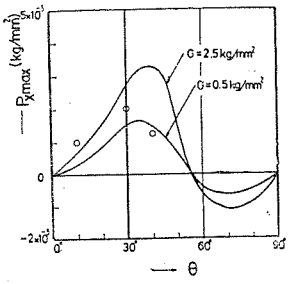
$$D_B=E_T(1-\cot^2\theta+\cot^4\theta)\frac{2h(2b)^3}{12} \quad \cdots\cdots(61)$$

그림 23은 上記數値例에 對한 굽힘剛性 D의 바이어스角 θ에 의한 變化를 나타낸 것이나, 여기서 縱軸 D^*는 接着層의 굽힘剛性을 D에 加算한 값 ($\bar{h}=7\text{mm}$로 두껍게 잡고 있으므로)을 의미한다. $0<\theta<\theta^*=54.7°$의 범위에서는 예상되는 바와 같이 剛性低下가 현저히 나타난다.

그림 24는 最大層間剪斷應力 $p_{x,\max}$와 바이어스角 θ와의 관계를 나타낸 것이며, ○표는 格子膜法에 의해 測定한 實驗點이다.

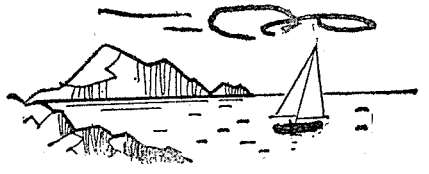


〔그림 23〕 面內굽힘剛性 D^*와 바이어스角 θ와의 關係



〔그림 24〕 最大層間剪斷應力 $P_{x,\max}$와 바이어스角 θ와의 關係

≪다음 號에 계속≫

(1978. 3. 日本ゴム協會誌)

☆ ☆ ☆