<研究報告>

Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 4, No. 1 June 1978

수리사용 후 交換정책의 두 형태

(Two Forms of Preventive Replacement Policy with Minimal Repair at Failure)

朴 景 洙*
姜 鎬 善**

Abstract

This paper presents a model for determining the optimal number of minimal repairs before replacement. The basic concept parallels the periodic replacement model with minimal repair at failure introduced by Barlow and Hunter, only difference being the replacement signalled by the number of previous minimal repairs performed on the unit. In the case of Weibull distribution, which is widely used as a general failure distribution, the optimal solution could be obtained numerically and seems more cost effective compared to the Barlow and Hunter's Policy II.

본 논문에서는 어떤 장비의 운용 도중 발생하게 되는 고장에 따르는 비용과 미리 계획된 장비교환에 따르는 비용간의 折衷을 취하는 교환정책의 하나 즉, 장비가 교환되기 전에 허용할 수 있는 고장(수리)의 數를 명시하는 교환정책에 대해서 검토해 보기로 한다. 이 교환정책은 Barlow와 Hunter[1]에 의해서 처음 소개된 "수리사용 후 定期교환"정책과 착상이 비슷하나, 한 가지 다른 점이 있다면 장비교환 시기가 정기적으로 수행되는 대신 운용중 고장은 수리하여 사용하며 이런 고장횟수가 이미 정해진 횟수에 이를 때 교환해 준다는 것이다.[2]

장비에 고장이 발생할 때마다 평균적으로 ₩_f라는 비용이 지출된다; 여기에는 고장에 수반하여 발생하는 비용(例, 休止費用 및 판매기회 상실 비용, 직접 및 간접 遊休勞動費, 관련공정의 지연 및 破失品(scrap)의 증가) 및 수리에 드는 비용이 포함된다. 장비를 교환하는 때는 평균적으로 ₩_r이 지출된다($\text{₩}_r \geq \text{₩}_f$). 또한 본 모형에서는 장비교환 도중에 실시되는 고장수리에 의해서 장비의 고장률이 변하지 않는다 가정한다(+)

수리사용 후 定期 교환

이런 종류의 교환정책은 Barlow와 Hunter[1]에 의해서 "정책Ⅱ"라는 이름 아래 검토되었다. 매번 고장이 나면 사소한 수리만이 행해지므로 장비의 고장률 $h(t)$——분포함수 F와 밀도함수 f에 배응하는——는 변화하지 않는다 가정한다. 즉 수리 후에는 장비 고장률이 $h(0)$으로 복귀되는 것이 아니라, $h(t)$로 계속된다. 만일 定期교환주기가 T라고 하면 우리에게 주어진 문제는

₩_f=고장 수리에 드는 비용

₩_r=교환에 드는 비용

$N_f(t)=[0,t]$ 사이에서의 고장 횟수

$N_r=[0,t]$ 사이에서의 교환 횟수

라 할 때 적절한 T값을 선택하여

$$\bar{C}(T)=\lim_{t\to\infty}\frac{\text{₩}_f E[N_f(t)]+\text{₩}_r E[N_r(t)]}{t}$$

를 최소화 하는 문제가 된다. 또한 그들은 $E[N_f(T)]=\int_0^T h(t)\,dt$가 됨을 보여 주었고, 단위시간당 총비용은

$$\bar{C}(T)=\frac{\text{₩}_f\int_0^T h(t)\,dt+\text{₩}_r}{T} \qquad (\text{式 } 1)$$

가 된다.[3]

$\bar{C}(T)$를 최소화하기 위해서 그의 도함수를 0으로 놓으면

---

*韓國科學院 產業工業科
**現代建設(株)

(+) 實體的으로 이것은 (1) 특정한 부품이 고장났을 때, 고장부품은 고장나지 않은 中古부품(장비와 같은 연령의)으로 교환해 주거나, (2) 새 부품으로 교환해 주었을 때의 장비고장률의 감소는 무시할 수 있다는 의미이다.

$$\int_0^T [h(T)-h(t)]dt = \frac{W_r}{W_f}$$

이고, 이 필요조건을 만족시키는 T^*를 사용할 때의 단위시간당 총비용은 $\overline{C}(T^*)=W_r h(T^*)$가 된다.
다른 고장분포에 대해서는 간단한 수식으로 나타낼 수 있는 解를 구할 수는 없으나, 예를 들어 고장분포가 Weibull 분포인 경우에는

$h(t)=\lambda\beta t^{\beta-1};\ \lambda>0,\ \beta\geq 1$

이며 최적교환주기는

$$T^*=\sqrt[\beta]{\frac{1}{\lambda(\beta-1)}\cdot\frac{Wr}{Wf}}$$

이며 단위시간당 최소비용은

$$\begin{aligned}\overline{C}(T^*)&=W_r h(T^*)\\&=W_r\lambda\beta\left[\frac{1}{\lambda(\beta-1)}\cdot\frac{Wr}{Wf}\right]^{\frac{\beta-1}{\beta}}\end{aligned} \qquad (式\ 2)$$

이다.

고장횟수에 의한 교환

위에서 살펴본 교환정책은 定期교환정책으로서 그 결정변수로서 시간을 택하였다. 이것은 시간의 함수로 표현되는 모형이 수학적으로 다루기 쉽고, 고장의 확률적 형태가 우선 시간의 함수로 표시되기 때문이다. 그러나 실제문제에 있어서 시간을 결정변수로 택하여 사용하기 곤란한 경우에는 다른 형태의 교환시기 결정변수를 사용하여야 한다. 즉 장비의 누적가동시간을 항상 기록할 수 없는 경우 또는 경영자로 하여금 가동상태에 있는 장비를 교환주기 T^*가 도래하였다 하여 교환하도록 납득시키기 어려운 경우에는 시간에 의한 교환정책보다 좀더 효율적인 정책을 사용하여야 한다. 하나의 예로써, 고장횟수에 근거한 교환을 하게 될 때에는 장비가 고장난 경우에만 교환이 고려되고, T^*까지의 시간이 얼마 남지 않았는 데도 수리를 강행할 필요성이 배제되므로 좀더 효율적일 수가 있는 것이다.

고장횟수에 의한 교환정책하에서는 "장비가 가동 시작한 후 고장이 발생하면 즉시 수리를 하고, 그 고장횟수가 n이 되는 때에 교환한다"라 정의된다. 장비가 교환될 때의 고장횟수를 n이라 하면 한 교환주기의 단위 시간당 평균비용은 (式 1) 대신에 다음과 같이 표현된다.

$$\overline{C}(n)=\frac{(n-1)W_f+W_r}{E[주기]} \qquad (式\ 3)$$

Weibull 고장분포의 경우 기대주기

고장이 날 때마다 수리를 할 때 장비 고장률이 $h(0)$로 복귀되지 않고 $h(t)$로 계속될 경우에는 장비의 고장시각은 再生點이 아니므로 n번째 고장이 발생할 때까지의 시간 분포 $f_n(t)$를 구하기 위해서는 보통의 convolution을 사용할 수 없고, 다음과 같은 non-homgeneous Poisson 과정에 대한 해를 구해야 한다.

시간 $(t,\ t+dt)$ 사이에 장비가 고장날 확률을 $h(t)dt$라 하고 $H(t)=\int_0^t h(x)dx$라 하자. 또 $N(t)$를 시간 t까지에 발생하는 총 고장 횟수라 하자. 여기서 $P_n(t)=\text{Prob}\{N(t)=n\}$라 하면 다음과 같은 定差방정식을 구할 수 있다.

$$P_{n-1}(t+dt)=P_n(t)h(t)dt+P_{n+1}(t)[1-h(t)dt]$$

윗 식에 주어진 non-homogeneous Poisson 과정에 대한 解는[4]

$$P_n(t)=H^n(t)\frac{e^{-H(t)}}{n!}$$

이며 이로부터 n번째 고장까지의 시간은

$$\begin{aligned}f_n(t)&=-\frac{d}{dt}\text{Prob}\{t_n>t\}\\&=-\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{n-1}\text{Prob}\{N(t)=k\}\\&=h(t)H^{n-1}(t)\frac{e^{-H(t)}}{(n-1)!}\end{aligned}$$

이다. 따라서 n번째 고장이 발생될 때까지의 평균기간 즉 기대주기는

$$\begin{aligned}E[주기]&=\int_0^\infty tf_n(t)dt\\&=\int_0^\infty th(t)H^{n-1}(t)\frac{e^{-H(t)}}{(n-1)!}dt\end{aligned}$$

이고 Weibull 분포의 경우 $H(t)=\lambda t^\beta=y$라 변수치환을 하면 $h(t)dt=dy$이므로

$$\begin{aligned}E[주기]&=\int_0^\infty\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\beta}}\frac{y^{n-1}e^{-y}}{(n-1)!}dy\\&=\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{\beta}\right)}{\sqrt[\beta]{\lambda}\,\Gamma(n)}\end{aligned} \qquad (式\ 4)$$

가 된다.

최적 교환시기

따라서 고장이 Weibull 분포를 따르는 경우에는 (式 4)를 (式 3)에 대입하면

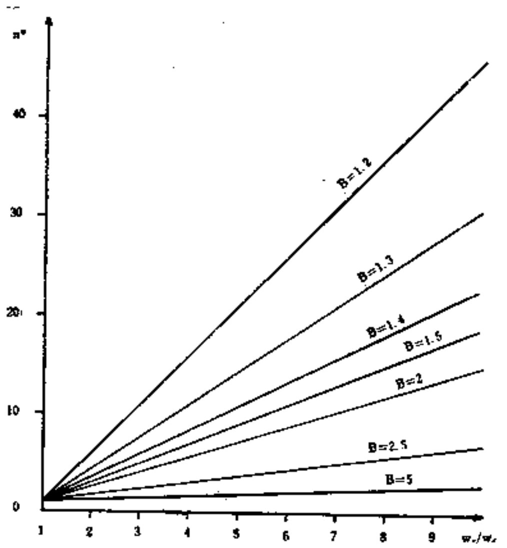
$$\overline{C}(n)=\{(n-1)W_f+W_r\}\sqrt[\beta]{\lambda}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{\beta}\right)} \qquad (式\ 5)$$

를 얻게 되며 매개변수인 λ와 β의 여러 가지 조합에 대해서, 여러 가지 n값을 대입하여 비교해 봄으로써 $\overline{C}(n)$을 최소화하는 최적 고장횟수 n^*를 수치적으로 구할 수 있었다. 〈그림 1〉

최적해의 특성

〈그림 1〉로부터 즉시 알 수 있는 바와 같이 허용되는 고장횟수(교환시기) n^*는 $\frac{W_r}{W_f}$에 대한 증가함수이며, β에 대한 감소함수이고 Weibull 분포의 축척매개변수 λ와는 무관하다.

따라서 비용의 절대적 크기에 관계없이 $\frac{W_r}{W_f}$가 일



〈그림 1〉 최적 교환시기

정하면 고장횟수 n^*는 일정하지만, 물론 단위시간당 총비용 $\overline{C}(n^*)$는 $\frac{W_r}{W_f}$가 일정하더라도 그 절대적 크기에 비례한다.

재미있는 것은, 본 논문에서 제시된 "고장횟수"에 의한 정비모형이 Barlow와 Hunter의 "정책Ⅱ"에 비해서 記錄유지(정보량)가 적은 데도 불구하고, 비용면에서 좀더 효율적인 것 같다는 점이다. 이 점을 수학적으로 증명할 수는 없었지만, 몇몇 母數 표본에 대해서 두 모형의 비용 비율 $\overline{C}(n^*)/\overline{C}(T^*)$를 취해 보면 항상 1보다 적게 나타났다.〔2〕

"定期교환" 모형에 비해서 비용효율이 높은 것은 아마도 T^* 직전의 마지막 고장 수리 후의 짧은 기간 運用을 강요하지 않는 점에 기인하는 것 같으나, 이 점을 수학적으로 증명하지는 못하였다. 형태매개변수 $\beta=1$인 경우에는(즉 지수분포인 경우), 교환을 안해주는 것이 양정책하에서 모두 최적해이며 따라서 비용효율은 1이 된다. 매개변수 β가 ∞에 접근할 때에도 양정책하에서의 단위시간당 비율은 모두 W_r이 되어 비용효율은 1이 된다.

요약 및 앞으로의 연구

본 논문에서는 예방교환정책의 한 형태로서 수리 사용 후 교환할 때의 최적 허용수리횟수에 관하여 고찰하였다. 장비고장분포를 묘사하기 위하여 Weibull 분포가 사용되는 경우의 최적해를 수치적으로 구했으며, 더구나 Barlow와 Hunter의 "정책Ⅱ"에 비해서 비용면에서 좀더 효율적인 것으로 나타났다.

수리 사용 후 교환정책에는 사실 세 종류가 있을 수 있는 바:

(1) 時點 T에서 교환강행——Policy Ⅱ,

(2) 제 n회째의 고장時點에서 교환,

(3) 時點 τ 이전의 고장은 무조건 수리, τ 이후의 첫번째 고장시점에서 교환;

제 (2)의 정책이 본 보고의 요점이고 내용의 수학적인 전개가 현재 연구중이다. 제 (3)번은 수학적으로 대단히 복잡하지만 최적 정책변수 t^*를 구하는 방법에 대해서 연구가 진행되고 있다.

참 고 문 헌

1. Barlow, R.E. and L.C. Hunter, "Optimum Preventive Maintenance Policies," *Operations Research*, Vol. 8, No. 1 (1960)
2. 姜鎬善, *A Study on a Preventive Poliay*, 韓國科學院 碩士學位 論文 (1978).
3. Barlow, R.E. and F. Proschan, *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1965).
4. Barlow, R.E. and L.C. Hunter, "*Mathematial Models for System Reliability*: *Part* Ⅱ," *The Sylvania Technologist*, Vol. XⅢ, No. 2 (Aplil 1960)