J. of The Korean Operations
Research Society
Vol. 3, No. 2, Dec. 1978.

論 文

# 설비의 적정예방 보수에 관한 연구*
# (A Study on the Optimum Preventive Maintenance of Equipments)

李 昶 勳**

**Abstract**

A methodology which can be employed to obtain an optimal preventive maintenance policy that maximizes the total machine running time over the specified working period is proposed. A system considered is comprised of m machines and r<m repairmen. The effect of preventive maintenance is reflected into the failure rate of the machine and the salvage value of the machine.

An optimal preventive maintenance policy obtained by employing the maximum principle is shown to be 'bang-bang' type.

## I. 서 론

설비에 대한 예방 보수는 설비의 유효성의 향상 또는 유지 비용의 절감을 가능케 해주기 때문에 많은 경우 정당화 되고 이와 관련하여 설비의 적정 보수 정책에 관한 연구가 활발히 진행되어 오고 있다. Thompson [7]은 설비의 능력이 수명에 비례하여 저하되는 경우, 능력의 저하가 예방 보수에 의하여 부분적으로 방지될 수 있는 경우를 고려한 바 있다.

Kamien과 Schwartz[4]는 설비의 고장날 확률을 고려하여 설비의 적정 예방 보수 정책의 성격에 대하여 논하는데 maximum principle을 도입 하였다.

생산 설비 시스템과 같이 한 시스템이 많은 수의 설비로 구성되고 한 사람의 수리공이 전 설비의 보수를 맡고 있는 경우, Alam과 Sarma[1]는 적정 예방 보수 정책을 구하는 문제를 제시하고 적정 정책은 'bang-bang' 성격을 띄는 것을 보여 준다.

본 연구에서는 Alam과 Sarma[1]가 고려한 시스템보다 좀 더 일반적인 시스템에 대해 적정 예방 보수 정책을 구하는 방법을 검토해 보고자 한다. 여기서도 시스템은 여러개의 설비로 구성되나, 설비에 대한 보수를 맡고 있는 수리공의 수를 한 사람으로 제한하지 않고 설비수보다 적은 일반적인 수로 놓아 어느 시각 t에 일정댓수의 설비가 가동할 확률을 Kolmogorov의 미분 방정식에 연관시키고, 가동 가능한 설비의 기대댓수를 나타내는 식과 설비의 처분 가격을 나타내는 식도 미분 방정식에 연관시켜 Pontryagin의 maximum principle[6]을 적용하여 적정 예방 보수 정책을 구하는 방법을 제시하고자 한다.

*본 연구는 1978년도 문교부 기초학문 학술연구 조성비에 의하여 이루어진 것임.
**서울대학교 공과대학 산업공학과

## II. 본 론

$m$대의 설비와 $r$명의 수리공으로 구성되는 시스템을 고려하자. 여기서 각 설비는 동일한 고장율 $\lambda$와 동일한 수리율 $\mu$를 갖고 서로 독립적으로 가동한다고 생각한다. 그러면 $n$대의 설비가 가동하는 상태에서의 시스템의 고장율 $\lambda_n$과 수리율 $\mu_n$은 다음과 같다[2].

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda_n=n\lambda,\ \mu_n=r\mu & ;\ 0\le n\le m-r\\ \lambda_n=n\lambda,\ \mu_n=(m-n)\mu & ;\ m-r\le n\le m\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$m$대의 설비중 $n$대가 어느 시각 $t$에 가동할 확률을 $P_n(t)$라 하면, 이것은 다음의 Kolmogorov미분 방정식으로 연관 지워진다.

$$P_n'(t)=-(n\lambda+r\mu)P_n(t)+(n+1)\lambda P_{n+1}(t)+r\mu P_{n-1}(t),\ 0<n\le m-r \cdots\cdots(2)$$

$$P_n'(t)=-[n\lambda+(m-n)\mu]P_n(t)+(n+1)\lambda P_{n+1}(t)+(m-n+1)\mu P_{n-1}(t),\ m-r<n\le m-1 \cdots(3)$$

$$P_0'(t)=-r\mu P_0(t)+\lambda P_1(t) \quad\cdots(4)$$

$$P_m'(t)=-m\lambda P_m(t)+\mu P_{m-1}(t) \quad\cdots(5)$$

만약 $m$대의 설비가 전부 시간 $t=0$에 가동 상태에 있었다면 초기 조건으로 다음을 갖게 된다.

$$\left.\begin{array}{l} P_n(0)=0,\ n=0,1,\ \cdots m-1 \\ P_n(0)=1,\ n=m \end{array}\right\} \quad\cdots(6)$$

어느 시각 $t$에 가동할 설비의 기대 댓수를 $N(t)$라 하면

$$N(t)=\sum_{n=0}^{m} nP_n(t) \quad\cdots(7)$$

식 (2)~(7)로부터

$$\frac{dN(t)}{dt}=-\lambda N(t)+r\mu\sum_{n=0}^{m-r}P_n(t)$$

$$+\sum_{n=r-1}^{1} n\mu P_{m-n}(t)\ ;\ N(0)=m \quad\cdots(8)$$

한편 시스템의 수명에 따른 잔존 가격의 저하가 예방 보수에 의하여 부분적으로 방지되는 것은 다음 식으로 연관 지워진다[7].

$$\frac{dS(t)}{dt}=-d(t)+f(t)u(t)\ ;\ S(0)=S_0 \quad\cdots(9)$$

여기서 $S(t)$ : 시간 $t$에서의 시스템의 총 잔존가격

$d(t)$ : 시간 $t$에서의 진부화 함수

$u(t)$ : 시간 $t$에서의 예방 보수 비용, $0\leq u(t)\leq U$

$U$ : 상수

$f(t)$ : 시간 $t$에서의 누적 보수 유효 함수

$S_0$ : 초기 투자 비용

예방 보수는 각 설비의 고장율도 감소시키는 것으로 가정하며, 설비의 고장율을 예방 보수의 함수로 다음과 같이 나타냈다[1].

$$\lambda=\lambda_0-\lambda_p u(t) \quad\cdots(10)$$

여기서 $\lambda_0$ : 예방 보수를 하지 않을 때의 설비의 고장율

$\lambda_p$ : 고장율을 감소시키는데 있어서 예방보수의 영향($\lambda_p<\lambda_0$)

식 (2)-(5)에서 $\lambda$를 식 (10)의 $\lambda$로 대체해 주면 이 미분방정식은 근사한 의미에서 적용된다.

설비의 가동 구간 $0\leq t\leq T$ 사이에 시스템을 구성하는 설비들의 총 가동 시간 $J$는

$$J=\int_0^T tN(t)dt \quad\cdots(11)$$

따라서 식 (11)로 주어진 목적 함수를 최대로 하는 적정 예방 보수 정책 $u^*$를 구하는 것이 우리의 목적이 되고, 이 경우 performance equation으로 식 (2)~(5) (8), (9)가 사용된다.

이 문제를 Maximum principle을 이용하여 풀기 위하여 다음과 같은 상태 변수를 도입하면

$$y(t)=\int_0^t tN(t)dt \quad\cdots(12)$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=tN(t),\ y(0)=0 \quad\cdots(13)$$

그리고

$$x(t)=t \quad\cdots(14)$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=1,\ x(0)=0 \quad\cdots(15)$$

그러면 Hamiltonian은 다음과 같이 된다.

$$H=\sum_{n=0}^{m} Z_{m+1}P_n'(t)+Z_{m+2}S'(t)+Z_{m+3}N'(t)$$

$$+Z_{m+4}y'(t)+Z_{m+5}x'(t) \quad\cdots(16)$$

식 (16)에서 제어 변수 $u$를 포함하는 항들을 모아 $H^*$라 놓으면 $H^*=hu\cdots\cdots(17)$의 형태로 되어 control type이 'bang-bang'이 되는 것을 알 수 있다. 즉 적정 예방 보수 정책 $u^*(t)$는 다음과 같이 주어진다.

$$\left.\begin{array}{l} u^*=U:\ h>0 \\ u^*=0:\ h\leq 0 \end{array}\right\} \quad\cdots(18)$$

단 $h=-Z_1\lambda_p P_1+\sum_{n=1}^{m-1} Z_{n+1}\lambda_p[nP_n-(n+1)P_{n+1}]$

$$+Z_{m+1}m\lambda_p P_m+Z_{m+2}f(t)+Z_{m+3}\lambda_p N\cdots\cdots(19)$$

Adjoint 방정식은

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dZ_n}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial P_{n-1}}:\ Z_n(T)=0,\ n=1,\cdots m+1 \\ \dfrac{dZ_{m+2}}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial S}:\ Z_{m+2}(T)=0 \\ \dfrac{dZ_{m+3}}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial N}:\ Z_{m+3}(T)=0 \\ \dfrac{dZ_{m+4}}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial y}:\ Z_{m+4}(T)=1 \\ \dfrac{dZ_{m+5}}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}:\ Z_{m+5}(T)=0 \end{array}\right\} (20)$$

상태 변수의 수가 많은 경우에는 conjugate gradient algorithm[5]을 이용하여 콤퓨터에 의한 해가 가능하고 상태 변수의 수가 적은 경우에는 analytic한 해법[3]이 가능하다.

## Ⅲ. 예 제

앞에 제시한 방법을 예시하기 위하여 두개의 설비로 구성되는 시스템과 한 사람의 수리공을 고려해 보자. 아울러 다음의 수치를 가정한다.

$$T=2,\ f(t)=\frac{2}{\sqrt{1+t}},\ d(t)=2,\ \lambda_0=0.05,$$

$$\lambda_p=0.005,\ \mu=0.5,\ U=1,\ S_0=200$$

그러면 목적 함수는

$$J=\int_0^2 tN(t)dt \quad\cdots(21)$$

performance equation은

$$\frac{dS(t)}{dt}=-2+\frac{2u(t)}{\sqrt{1+t}}\ ;\ S(0)=200,\ 0\leq u\leq 1 \tag{22}$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt}=[0.05-0.005u(t)]\ P_1(t)-0.5P_0(t)\ ;\ P_0(0)=0 \tag{23}$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt}=2[0.05-0.005u(t)]\ [1-P_0(t)-P_1(t)] +0.5P_0(t)-[0.05-0.005u(t) +0.5]P_1(t)\ ;\ P_1(0)=0 \tag{24}$$

$$\frac{dN(t)}{dt}=-[0.05-0.005u(t)]+0.5[P_0(t) +P_1(t)]\ ;\ N(0)=2 \tag{25}$$

Maximum principle에 의해서 이 문제를 풀면 적정 예방 보수 정책은 'bang-bang' type으로 판명되어 예방 보수를 설비의 가동 구간 동안 최대한으로 해주는 것으로 결론 지워지고 ($u^*=1$), 이렇게 할 경우 설비들의 총 가동 시간의 최대치 $J^*=3.834$가 된다.

아울러

$$P_0(t)=0.0185\exp(-0.7192t)-0.032\exp(0.4158t)+0.0135 \tag{26}$$

$$P_1(t)=-0.0901\exp(-0.7192t)-0.0599\exp(-0.4158t)+0.15 \tag{27}$$

$$N(t)=0.0063\exp(-0.045t)+0.0531\exp(-0.7192t)+0.1239\exp(-0.4158t)+1.8167 \tag{28}$$

는 각각 어느 시각 $t$에 0, 1개의 설비가 가동할 확률과 가동 가능한 설비의 기대 댓수를 나타내 준다.

## IV. 결 론

본 연구에서는 여러개의 설비로 구성되는 시스템에 대하여 수리공의 수를 설비 수보다 적은 일반적인 수로 놓아 설비의 총 가동 시간을 최대로 해 주는 적정 예방 보수 정책을 Maximum principle을 이용하여 구하는 방법을 제시하였다. 예방 보수의 영향은 설비의 고장율과 잔존 가격에 반영시켰다. 그러나 이렇게 반영된 예방 보수의 영향은 일반적인 함수의 형태로만 표현되어 있고 실제로 이런 함수를 구하는 방법에 대하여는 언급되지 않았다. 한편 예방보수의 영향이 고장율을 감소시킨다는 점은 고려되었으면서도 수리율에 미치는 예방보수의 영향은 고려되지 못한 점이 미흡하다 볼 수 있어 이에 대한 앞으로의 연구가 기대된다..

## 참 고 문 헌


1. Alam, M. and Sarma, V.V.S., "An Application of Optimal Control Theory to Repairman Problem with Machine Interference", *IEEE Trans on Reliability*, Vol. R-26, No. 2, June 1977.
2. Arrow, K.J., Levhari, D., and Sheshinski, E., "A Production Function for the Repairman Problem," *The Review of Economic Studies*, Vol. 39, No. 3, July 1972.
3. Fan, L.T., *The Continuous Maximum Principle*, Wiley, New York, 1966.
4. Kamien, M.I. and Schwartz, N.L., "Optimal Maintenance and Sale Age for a Machine Subject to Failure", *Management Science*, Vol. 17, No. 8, Apr. 1971.
5. Lasdon, L.S., Mitter, S,K., and Warren, A.D., "The Conjugate Gradient Method for Optimal Control Problems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-12, No. 2, 1967.
6. Pontryagin, L.S., et. al., *The Mathematical Theory of Optimal Processes* (English translation by K.N. Trirogoff), Wiley, Inter-Science, New York, 1962.
7. Thompson, G.L., "Optimal Maintenance Policy and Sale Date of a Machine", *Management Science*, Vol. 14, No. 9, May 1968.