J. of The Korean Operations
Research Society
Vol.3, No.2, Dec. 1978

워게임을 위한 Duel 모델 연구

(A Study of Duel Models for War Game)

朴 淳 達*
金 汝 根*

Abstract

Duel models are frequently used in war game simulation. Both game-theoretic approach and stochastic approach are applied to duel situations in war game. Game-theoretic models are usually classified into three categories, noisy duel, silent duel, and duel of continuous firing. Stochastic duels are classified depending upon assumptions. In this paper formulation and a general solution for each model will be summarized.

1. 序 論

게임 理論은 利害와 상충되는 경우를 다루는 학문이다. 青軍과 紅軍이 어울려 싸우는 경우, 섰다놀이, 勞使분쟁, 입찰경쟁 등이 이 게임 理論의 전형적인 대상이 된다. 이 게임 理論 중에서 이해가 상충되는 대상들이 극한적인 대결을 하는 경우를 특히 Duel이라는 이름으로 다룬다. 결투가 대표적인 Duel의 예이며 구축함과 잠수함, 비행기와 미사일 등 軍事행위에서는 이 Duel 경우를 흔히 볼 수 있다.

따라서 軍事的行爲를 모델화하여 다루는 워게임에서는 이 Duel의 경우가 자주 나타난다. 그래서 이 Duel 경우를 模型化하여 다루어야 할 필요가 있다. 그리고 이 Duel은 반드시 軍事的인 행위에서만 나타나는 것은 아니다. 經濟에서는 경쟁입찰의 경우로 나타나며 이 때는 Bidding모델이라고 하며 그래서 Duel모델과 Bidding모델은 근본적인 槪念은 같으며 模型化도 비슷하게 다룰 수 있다.

여기에서 특히 군사적인 행위를 염두에 두고 워게임에 이용되는 Duel모델을 개발하는 필요한 기본 개념과 이론을 정리해 보기로 한다.

이 Duel모델은 게임理論的인 처리와 確率的인 처리로 대별할 수 있다. Duel은 전술한 바와 같이 이해가 상충하는 대상들이 극한적인 결과에 도달하도록 게임을 운영하는 특이한 게임 종류이기 때문에 당연히 일반적인 게임理論의 이론으로도 다룰 수 있다는 사실은 두말 할 필요가 없겠다. 이러한 경우는 보편적으로 2人 零和게임으로 다루어지고 있다.

그리고 다른 경우는 상황에 확률적인 개념을 도입하여 다루는 것으로써 게임이론적 처리방법이 각 대상에 대한 결과가 상대적으로 나타나는 반면 이 확률적인 처리방법은 각 대상에게 결과를 보여줄 수 있는 장점이 있다.

2. Noisy Duel

Duel의 경우를 게임理論的으로 처리할 때는 게임이론의 여러가지 모델 중에서 특히 2人 零和 게임모델이 사용된다.

그런데 이 게임理論的으로 다룰 때는 두 가지 다른 경우가 있는데 하나는 각각의 행위가 상대방에 알려지는 경우와 둘째는 알려지지 않는 경우이다. 前者는 예를 들어 두 사람이 권총대결을 할 때 상대방이 총을 쏘았는지의 여부를 알 수 있는 경우이고 이런 경우를 Noisy Duel이라고 부른다.

後者는 상대방이 쏘았는지의 여부를 알 수 없는 경우로써 이런 경우를 Silent Duel이라고 한다. 이 Noisy Duel이나 Silent Duel은 둘 모두 2人 零和게임이지만

* 서울大學校工科大學産業工學科

그 이득 行列(payoff matrix)이 다르다.

어떤 Noisy Duel의 참가자(player)가 2명 있다고 하자. 그 두명을 각각 Ⅰ, Ⅱ로 표시하기로 한다. 이 참가자 Ⅰ과 Ⅱ는 각각 有限個의 탄환을 가지고 있다. Ⅰ은 m個, Ⅱ는 n個 가지고 있다고 하자. 그리고 이 參加者들은 〔0, 1〕 사이에 어느 시간이든 사격할 수 있다. 그리고 참가자 Ⅰ과 Ⅱ가 t시간에 사격했을 때의 命中率을 각각 $P_1(t)$, $P_2(t)$라고 둔다. 이 P_1과 P_2는 命中率函數라고 하며 〔0, 1〕에 있어서 연속적으고 감소하지 않는 函數이며 $P_1(0)=P_2(0)=0$이고 $P_1(1)=P_2(1)=1$이 되는 函數이다.

이 게임에서는 상대방이 몇 발의 탄환이 있는지를 이미 알고 있으며 물론 상대방의 발사를 탐지할 수 있다. 그리고 參加者 Ⅰ과 Ⅱ 중에서 누구 하나가 죽으면 이 게임은 끝난다.

이 게임에서 각 참가자의 戰略은 다음과 같이 표현할 수 있다.

참가. Ⅰ의 戰略 : $\bar{X}=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m)$, $0\le x_i\le 1$

참가자 Ⅱ의 戰略 : $\bar{Y}=(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$, $0\le y_j\le 1$

즉 참가자 Ⅰ은 x_1시간에 첫발, x_2시간에 둘째발, 그리고 x_m시간에 마지막 발사하는 전략을 사용한다. 여기서 물론 $x_1\le x_2\le\cdots\cdots\le x_m$라고 가정해도 좋다. 참가자 Ⅱ에 대해서도 비슷하다. $\bar{X}$, $\bar{Y}$의 集合을 각각 X, Y라 둔다.

利得(Payoff) $U(\bar{X}, \bar{Y})$는 $m=n=1$인 경우에는

$$U(x, y)=\begin{cases} P_1(x)(1)+[1-P_1(x)](-1), & x<y\text{인 경우} \\ P(x)[1-P_2(x)](1)+P_2(x)[1-P_1(x)](-1), & x=y\text{인 경우} \\ P_2(y)(-1)+[1-P_2(y)](1), & x>y\text{인 경우} \end{cases}$$

로 표시된다. 단 여기서 참가자 Ⅰ이 이기면 利得을 1, Ⅱ가 이기면 (-1)로 했다. 그리고 $m\neq n\neq 1$인 경우에는 이 利得函數를 순환적으로 정의하게 된다.

이 게임에서는 다음과 같은 定理가 성립하게 된다. 〔8〕. 즉,

$$v_{ij}=P_1(t_{ij})+[1-P_1(t_{ij})]v_{i-1\ j}=-P_2(t_{ij})+[1-P_2(t_{ij})]v_{ij-1}$$

가 되는 集合 $\{t_{ij}: i, j=1, 2, \cdots\cdots\}$와 유일한 集合 $\{v_{ij}: i, j=1, 2, \cdots\cdots\}$가 한다. 단

$$v_{io}=1(i>0)$$
$$v_{oj}=-1(j>0)$$

그리고 $m>0$, $n>0$인 게임에 대해서는 v_{mn}의 값을 가진다.

$m=n=1$인 경우에는 〔7〕 $P_1(t_{11})+P_2(t_{11})=1$이 되는 t_{11}에서

$$v_{11}=P_1(t_{11})-P_2(t_{11})$$

이 성립한다. 따라서 (t_{11}, t_{11})이 鞍點이 된다.

그러나 이 경우라도 각 참가자가 그 무게가 다를 때 즉 참가자 Ⅰ이 혼자 살아 남을 경우에는 α, 참가자 Ⅱ가 혼자 산아남을 때는 β, 그리고 다같이 살아남지 못하면 γ, 다 같이 살아 남으면 0으로 할 경우, 단 $\alpha>\beta$, 前者의 경우와 달리 일반적으로 鞍點이 없으며 단지 $\gamma-\beta-\alpha=0$인 경우 $P_1(t_{11})+P_2(t_{11})=1$이 되는 (t_{11}, t_{11})에서 鞍點이 있게 된다.

그리고 $P_1=P_2$일 경우에는

$$v_{mn}=\frac{P_1(0)-P_2(0)}{P_1(0)+P_2(0)},\quad t_{mn}=\frac{1}{P_1(0)+P_2(0)}$$

가 된다.

그러나 일반적인 즉 $m\neq 1$, $n\neq 1$, $\alpha\neq\beta$인 경우는 계속 연구 대상이 되고 있다.

3. Silent Duel

이 Silent Duel에서도 戰略은 參加者 Ⅰ은 $\bar{X}=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m)$, 參加者 Ⅱ는 $\bar{Y}=(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$을 가지고 그들의 集合을 각각 X, Y라 둔다. 그리고 參加者 Ⅰ, Ⅱ의 混合戰略을 각각 $E(\bar{X})$, $G(\bar{Y})$라 두면 다음 식을 만족하는 F^*, G^*가 최적전략이 된다.

$$\int U(\bar{X}, \bar{Y})dF^*(\bar{X})\ge v,\quad \forall\bar{Y}\in Y$$
$$\int U(\bar{X}, \bar{Y})dG^*(\bar{Y})\le v,\quad \forall\bar{X}\in X.$$

그런데 여기에서 x_i를 구간 $[a_i, a_{i+1}]$, 단 $a_i<x_i<a_{i+1}$, $a_{m+1}=1$의 어떤 점이라 하고 y_j를 $[b_j, b_{j+1}]$, 단 $b_j<y_j<b_{j+1}$, $b_{n+1}=1$이고 $a_1=b_1$이라고 한다. 그리고 이 x_i, y_j는 각각 $F_i(x_i)$, $G_j(y_j)$의 확률분포로 임의로 취해지게 된다. 그러면 결국 참가자 Ⅰ의 최적 戰略을 찾는다는 것은 다음 式을 만족시키는 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_m$을 찾는다는 것이 된다.

$$dF_i(x_i)=\begin{cases} h_i f^*(x_i)dx_i, & a_i<x_i<a_{i+1}, \\ 0, & x_i\notin[a_i, a_{i+1}] \end{cases}$$

단

$$f^*(t)=\prod_{b_j>t}[1-P_2(b_j)]\frac{P_2'(t)}{P_2^2(t)P_1(t)},$$
$$h_i=[1-D_i]h_{i+1},$$
$$D_i=\int_{a_i}^{a_{i+1}}P_1(t)dF_i(t).$$

參加者 Ⅰ과 Ⅱ의 이런 式을 만족하는 最適戰略은 바로 구할 수 있고 그 存在 증명은 이미 알려져 있다. 〔11〕

$P_1(t)=P_2(t)$, $m=n$인 대칭게임에서는 두 參加者가 같은 最適戰略을 가지게 되고

$$P(a_{n-k})=\frac{1}{2k+3},\quad k=0, 1, \cdots\cdots, n-1,$$

$$dF_{n-k}(t)=\frac{1}{4(k+1)}\frac{P'(t)}{P^3(t)}dt,\ a_{n-k}<t<a_{n-k+1}$$

이 된다. 그래서 參加者가 단 한발의 총알을 가진 결투에서는 즉 $m=n=1$일 경우이서 $\frac{1}{3}$ 이전에서 쏘아서는 안된다는 것을 알 수 있다.

4. 연속사격의 Duel

2절과 3절에서는 단발씩 쏘는 경우를 취급하였다. 이 節에서는 연속사격이 가능하며 동시에 사격의 强度도 달리 할 수 있는 경우를 다루게 된다. 이런 경우는 高速 연발총의 경우나 여러 총으로 상대를 대결할 때 일어날 수 있다. 뿐만 아니라 일반적인 경우로 두 회사의 광고전을 펼 때도 비슷한 현상이 일어나게 된다.

이 경우에서도 P_1과 P_2는 전과 같이 陽의 항시 증가하는 연속함수로써 $P_i(0)=0$, $P_i(1)=1$인데 사전에 상대방에게 알려져 있다. 參加者 Ⅰ과 Ⅱ의 單純戰略 F_i는 $[0, 1]$에 定義된 항시 증가하는 연속함수로써 $F_i(0)=0$, $F_1(1)\leq m$, $F_2(1)\leq n$되는 함수이다. 導函數를 f_i라 둔다. 그러면 利得은

$$U(f_1, f_2)=\int_0^1\{f_1(t)A_1(t)-f_2(t)A_2(t)\}\exp\Big[-\int_0^t f_1(s)A_1(s)ds-\int_0^t f_2(s)A_2(s)ds\Big]dt$$

단 $A_i(t)=-\log[1-P_i(t)]$

로 나타난다.

$m=n$, $P_1(t)=P_2(t)=t$인 대칭인 경우에는 $U(f_1, f_2)=-U(f_2, f_1)$가 되는 경우이고 따라서 게임의 値는 零이고 각 參加者의 最適戰略은 다 같다.

이 最適戰略은 누적함수 F로써 다음과 같이 정의된다. [10]

$$F(t)=0,\ t<a$$
$$=1+\frac{1}{2\log(1-t)},\ a\leq t<1$$
$$=1,\ t\geq 1$$

단 $a=1-\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big]$.

이 연속사격의 Duel은 2절, 3절의 불연속사격의 Duel의 수렴점으로 고려될 수 있으며 그래서 이들 불연속사격의 Duel의 일반적인 경우로 생각할 수 있다.

그런데 Silent Duel의 불연속의 경우는 최적전략이 混合戰略이었으나 이 연속의 경우는 單純戰略이 된다. 그리고 이 연속의 경우 해는 Silent인 경우나 Noisy인 경우에나 모두 적용될 수 있다.

그러나 $m\neq n$인 경우에는 Lang과 Kimeldorf[10]가 일부 그 결과를 추측하고 있으나 계속 연구대상이 되고 있으며 동시에 $m\to\infty$, $n\to\infty$인 경우의 최적해에 대해서도 계속 연구대상이 되고 있다.

5. Fundamental Stochastic Duel

Noisy Duel, Silent Duel 등 게임理論的 처리가 參加者에게 意思決定에 필요한 最適戰略을 제시해 주는 반면 이 Stochastic Duel에서는 參加者의 性能, 이길 확률 등을 구해 보는 것이 주목적이다. 이러한 목적을 달성하기 위하여 參加者의 殺害率(kill probability), 사격속도는 물론 경우에 따라 각각 가지고 있는 탄환의 數, 사격시간, 사격확률, 은폐, 기습 등 여러가지 要素를 고려할 수 있다.

Fundamental Duel은 어느 한쪽이 殺害될 때가지 진행되는 Duel이다. 여기에서는 각각 무한정의 탄환과 무한정의 시간을 가진 상태에서 Duel이 진행된다고 가정한다. 다음과 같은 기호를 사용한다.

P(Ⅰ 또는 Ⅱ) : 參加者 Ⅰ 또는 Ⅱ의 勝率

Q(Ⅰ 또는 Ⅱ) : $1-P$(Ⅰ 또는 Ⅱ)

$f_i(t)$, $i=1, 2$: 參加者 Ⅰ 또는 Ⅱ의 발사시간밀도함수, 단, 有限, 微分可能, $\lim_{t\to\infty}f(t)=0$

P_i, $i=1, 2$: 參加者 Ⅰ 또는 Ⅱ의 殺害率

固定된 발사시간의 경우

參加者 Ⅰ과 Ⅱ가 장진하지 않은채 Duel을 시작한다고 하자. 그리고

a : 참가자 Ⅰ의 발사간격

b : 참가자 Ⅱ의 발사간격

단 a와 b는 서로 素라 하고 $a\geq b$, 그리고 $a=nb+r$, $n=[a/b]$, [ ]는 가우스기호라 둔다. 이 때 각 參加者의 勝率은 다음과 같다. [4]

$$P(\mathrm{I})=P_1\cdot Q_2{}^n\sum_{i=0}^{\infty}Q_1{}^iQ_2{}^{ni+[(i+1)(r/b)]}$$

$$P(\mathrm{II})=P_2/[1-Q_1{}^bQ_2{}^a]\sum_{i=0}^{a-1}Q_2{}^iQ_1{}^{[(i+1)b/a]}$$

任意사격시간의 경우

다음에는 발사간격이 고정돼 있지 않는 경우를 다룬다. 즉 각 참가자의 발사시간 t에 대한 밀도함수가 $f_i(t)$로 주어진다. 그리고 각 참가자가 상대방을 殺傷하는데 t시간이 걸릴 확률밀도함수를 $h_i(t)$라고 둔다. 그러면

$$h_1(t)dt=P_1f_1(t)dt+P_1Q_1f_1(t)*f_1(t)dt+P_1Q_1{}^2f_1(t)*f_1(t)*f_1(t)dt+\cdots\cdots$$

로 表示된다. 이 때 $*$는 Convolution을 뜻한다.

그리고 f_1, h_1의 特性函數는 각각

$$\varphi(u)=\int_0^\infty f_1(t)e^{iut}dt$$

$$\Phi_1(u)=\int_0^\infty h_1(t)e^{iut}dt=P_1\varphi_1(u)/[1-Q_1\varphi_1(u)]$$

가 된다.

그런데 참가자 I이 이길 확율은 I이 II를 殺傷할 시간이 II가 I을 살상할 시간보다 짧은 경우이기 때문에

$$P(\mathrm{I})=\int_0^\infty G_2(t)h_1(t)dt,$$

단 $G_2(t)=\int_t^\infty h_2(s)ds$

가 된다. 그래서

$$P(\mathrm{I})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_1(-u)du\int_0^\infty e^{iut}G_2(t)dt$$

가 되어 零點을 除外한 實數線 U에 대한 積分

$$P(\mathrm{I})=1+\frac{1}{2\pi i}\int_U\Phi_1(-u)\Phi_2(u)\frac{du}{u}$$

가 된다. 꼭같이 참가자 II의 경우는

$$P(\mathrm{II})=-\frac{1}{2\pi i}\int_U\Phi_1(-u)\Phi_2(u)\frac{du}{u}$$

가 된다. [3] 단 i는 허수.

그래서 만일

$$f_1(t)=r_1e^{-r_1t}$$

와 같이 사격시간 밀도함수가 陰의 指數函數로 표시된다고 할 때

$$P(\mathrm{I})=\frac{P_1\cdot r_1}{P_1\cdot r_1+P_2\cdot r_2}$$

가 된다.

장진하고 시작하는 경우

여태까지는 장진하지 않고 Duel을 시작하는 가장 일반적인 경우만 다루었다. 그러나 장진을 하고 Duel을 시작할 때는 첫 발을 서로 쏘고 난 후부터는 일반적인 Fundamental Duel과 같기 때문에 따라서

$$P(\mathrm{I})=P_1Q_2+Q_1Q_2P(\mathrm{I})_f$$

가 된다. 여기서 $P(\mathrm{I})_f$는 Fundamental Duel의 결과이다. 그래서 指數函數의 사격시간밀도함수를 가지는 경우

$$P(\mathrm{I})=P_1Q_2+Q_1Q_2\frac{P_1\cdot r_1}{P_1\cdot r_1+P_2\cdot r_2}$$

가 된다.

6. 制限된 탄약을 가진 Stochastic Duel

參加者 I은 m個, 參加者 II는 n個의 탄환으로 Duel을 시작한다. 그리고 고정된 살해율을 가지고 어느 한쪽이 살해될 때까지 또는 양쪽다 탄환이 없어질 때까지 Duel이 계속된다. 그래서 이 경우에는 $P(\mathrm{I})+P(\mathrm{II})\neq1$이 될 수도 있으며 서로 비기는 경우를 $P(\mathrm{I,\ II})$라 두면

$$P(\mathrm{I})+P(\mathrm{II})+P(\mathrm{I,\ II})=1$$

이 성립한다.

지금 참가자 I의 탄환의 數가 k가 되는 確率

$$P\{m=k\}=\alpha_k,\ k=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots$$

라 두고 참가자 II의 확률

$$P\{n=j\}=\beta_j,\ j=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots$$

라 둔다. 그러면 참가 I의 살해시간밀도함수

$$h_1(t)=h_1{}^*(t)+\delta(t-\infty)\sum_{k=0}^\infty\alpha_kQ_1{}^k,$$

단 $h_1{}^*(t)$는 5절에서 얻은 $h_1(t)$이며 δ는 Dirac Delta함수

가 된다. 그러면

$$H_1(t)=\int_0^t h_1{}^*(s)ds+0=H_1{}^*(t)$$

$$G_1(t)=\int_t^\infty h_{1*}(s)ds+\sum_{k=0}^\infty\alpha_kQ_1{}^k=G_1{}^*(t)+\sum_{k=0}^\infty\alpha_kQ_1{}^k$$

이 되어 자기가 탄환이 떨어지면 이길 수 없다는 성질을 이용하여

$$P(\mathrm{I})=\int_0^\infty G_2(t)h_1{}^*(t)dt$$

가 되므로 5절에서와 같이 구하면

$$P(\mathrm{I})=1-\sum_{k=0}^\infty\alpha_kQ_1{}^k+\frac{1}{2\pi i}\int_U\Phi_1{}^*(-u)\Phi_2{}^*(u)\frac{du}{u}$$

단 *는 모두 5절의 결과

가 된다. [1]

그리고 비길 확률

$$P(\mathrm{I,II})=\sum_{k=0}^\infty\alpha_kQ_1{}^k\sum_{j=0}^\infty\beta_jQ_2{}^j$$

가 성립한다.

5절의 경우는 이 결과의 특수경우로 볼 수도 있는데 $\alpha_k=\beta_j=0$로 두고 k와 j가 무한일 때만 $\alpha_k=\beta_j=1$이라 두면 바로 5절의 결과가 나온다.

7. 時間制限을 가진 Stochastic Duel

워게임이 사용되는 Duel은 여러가지 制約조건을 가진 경우가 대부분이다. 따라서 Fundament Duel에서 점점 여러가지 제약조건을 붙여가면서 새로운 모델을 개발할 필요가 있는 것이다.

이 時間에 대한 조건도 실제적으로 대단히 중요하게 다루어져야 할 요소중에 하나이다. 왜냐하면 실제의 Duel에서 시간의 제한을 받으면서 이루어지는 Duel이 있기 때문이다. 基地를 멀리 떠난 전투기들이 Duel을 벌일 때 같은 경우가 좋은 예 중에 하나이다.

지금 制限時間은 $g(t)$라는 확률밀도함수를 가진 任

意變數라고 하자. 그리고 t_L을 制限時間이라고 두자. 그러면

$$P(\mathrm{I})=P\{t_1<t_2,\ t_1<t_L\}$$
$$=\int_0^\infty\left\{h_1(t_1)\left[\int_{t_1}^\infty h_2(t_2)dt_2\right]\left[\int_{t_1}^\infty g(t_L)dt_L\right]\right\}dt_1$$

가 된다.

이것을 전과 같이 정리하면

$$P(\mathrm{I})=\frac{1}{4\pi^2}\int_U\frac{\theta(-u)}{u}\left(\int_L\frac{\Phi_1(u-w)\Phi_2(w)dw}{w}\right)du$$

단 L은 零點을 除한 全實軸을 통한 적분으로써 U는 상반부의 정분인데 반해 L은 하반부의 적분임.

가 성립된다. [2] 여기서 θ는 $g(t)$의 특성함수이다.

그래서 예로써

$$f_1(t)=r_1e^{-r_1t},\ f_2(t)=r_2e^{-r_2t},\ g(t)=\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$$

일 경우에는

$$P(\mathrm{I})=\frac{P_1r_1}{P_1r_1+P_2r_2+1/\tau}$$

이 된다.

그리고 사격간격이 고정돼 있는 경우 (5절 참조) 제한시간의 확률밀도함수를 $g(t)$라고 둘 때

$$P(\mathrm{I})=P\{t_1<t_2,\ t_1<t_L\}$$
$$=P_1\sum_{j=1}^{\infty}Q_1^{j-1}Q_2^{[ja/b]}\int_{ja}^{\infty}g(t)dt$$

가 성립하게 된다. 그리고 제한시간이 τ로 고정될 경우에는

$$P(\mathrm{I})=P_1\sum_{j=1}^{[\tau/a]}Q_1^{j-1}Q_2^{[ja/b]},\quad \tau\geq a$$
$$=0,\quad \tau<a$$

가 된다.

8. 기　타

탄환에 대한 制限, 時間에 대한 制限 외에도 여러가지 制限을 가함으로써 Fundamental Duel을 더욱 실제 가용하게 개발할 수 있다.

지금까지는 參加者 I과 II가 도중에 발사불가능 사태가 일어나지 않는 경우만을 취급하여 왔지만 실제 발사불능인 경우가 생기는 경우 참가자 I의 勝率은 어떻게 달라질 것인가? 參加者 I과 II가 각각 유한개의 무기를 가지고 Duel에 임하게 되는데 유리한 입장에 서자면 고장날 확률이 얼마이하라야 하겠는가 등의 문제를 다룰 수 있는 모델은 어떤가? 이러한 경우는 Bhashyam[5]이 일부 다루고 있다.

그리고 기습의 문제도 생각해 볼 수 있다. 그리고 Duel도중 參加者의 位置변경(Displacement)도 고려해 볼 수 있다. 이런 문제들은 일부 Anker의 논문들에게서 취급하고 있으나 앞으로 계속 연구될 문제들이다.

나아가 두 參加者의 Duel을 더욱 일반화하여 둘 이상의 參加者가 개입되는 Multi-Duel도 고려해 볼만하다. Anker와 Williams[3]가 세, 네 參加者의 경우를 불연속 Stochastic Duel로 취급하고 있으나 이런 결과를 일반화시킨 연구가 더욱 필요하다.

Reference

1. Ancker, C.J., J., Stochastic Duels with Limited Ammunition Supply, pp. 38—50, Oper. Res., Vol. 12, 1964.
2. _______, Stochastic Duels with Limited Time Duration, pp. 69—81, J. Canad. Oper. Res, Soc. Vol. 4, 1966.
3. _______, and T. Williams, Stochastic Duels, pp. 803—817, Oper. Res., Vol. 11, 1963.
4. _______ and ______, Some Discrete Processes in the Theory of Stochastic Duels, pp. 202—216, Oper. Res., Vol. 13, 1965.
5. Bhashyam, N., Stochastic Duels with Nonrepairable Weapons, pp. 121—129, Nav. Res. Log. Quart., Vol. 17, 1970.
6. Cramer, H., Mathematical Methods of Statistics, pp. 188, Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.
7. Dresher, M., Games of Strategy: Theory and Application, Prentice-Hall, 1961.
8. Fox, M. and G. Kimeldorf, Noisy Duels, SIAM J. of Appl. Math., pp. 353—361, Vol, 17, 1969.
9. Karlin, S., Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics II, Addison-Wesley, 1959.
10. Lang, J.P., and G. Kimeldorf, Duels with Continuous Firing, pp. 470—476, Manag. Sci., Vol. 22, 1975.
11. Restrope, R., Tactical Problems Involving Several Actions, pp. 313—335, Contributions to the Theory of Games III, Annals of Math. Studies 39, 1959.
12. Shiffman, M., Games of Timing, pp. 97—123, Annals of Mathematics Studies, 28, 1953.
13. Thompson, D.E., Stochastics Duels Involving Reliability, pp. 145—148, Nav. Res. Log. Quart. Vol. 19, 1972.
14. Yanovskaya, Y.B., Duel-Type Games with Continuous Firing, pp. 15—18, Eng. Cyb., Vol. 7, 1969.