
 論 文

大韓造船學會誌
 第15卷 第2號 1978年 6月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 15, No. 2, June 1978

直四角形板의 彈性接水振動에서 周緣支持條件의 影響

金 極 天* · 金 在 承**

 The Effect of the Boundary Condition on the Added
 Mass of a Rectangular Plate

by

K.C. Kim*, J.S. Kim**

ABSTRACT

Using the elliptical cylindrical function, the added masses of thin rectangular plates vibrating elastically in an infinite ideal fluid are calculated. For the boundary conditions of the plates, two models are adopted. The plate which is simply-supported on two opposite edges while the other edges are clamped is one and the other is the plate which is simply-supported on two opposite edges while the other edges are free.

Same examples are calculated numerically for the fundamental mode in each cases. And the effect of the boundary condition on the added mass are investigated by comparing these data with those of Kim's [4] which were calculated for the simply-supported plates by the same method. It is concluded that it is possible to predict the added mass of a rectangular plate, whose boundary condition is not treated in this report, by using the result of this investigation.

1. 序 論

最近에 이르러 船體의 局部振動問題가 크게 관심을 불러 일으키고 있다. 이의 解析을 爲해서는 船體의 局部構造物 大部分이 平板으로 構成되었음을 고려할 때 平板의 振動特性에 관한 理解가 必要하다. 다행히도 이에 관한 資料는 여러군데에서 찾아볼 수 있다. 그러나 이들은 거의가 空氣中에서의 振動을 다룬 것이므로 船體의 外板 및 二重底에서 볼 수 있듯이 板의 한 면 또는 兩面이 流體와 接하고 있는 곳에서는 그 應用이 不可能해진다. 이 이유는 流體로 인해 附加質量이라는 새로운 要素가 紹介하기 때문이다. 이러한 現象은 오래전부터 알려져 왔으나 불행하게도 이에 대한 資料는 아직까지 充分한 狀態에 이르고 있지 못하다. 따라서 本 研究에서는 이 問題에 대한 초보적인 단계로서 서로 다른 周緣支持條件을 갖는 直四角形板이 流體에 接하여 彈性振動할 경우의 附加質量을 다루었다.

알려진 바에 의하면 附加質量은 振動體의 固有振動數를 減少시킨다. 즉 彈性體가 流體에 잠겨 振動할 경우의 固有振動數를 f_w , 空氣中에서의 固有振動數를 f_a 라 할 때 다음 관계식이 成立한다.

$$\frac{f_w}{f_a} = \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \quad (1-1)$$

여기서 β 는 振動體의 振動質量 M_p 와 振動體를 둘러싸고 있는 流體粒子的 運動에서 기인하는 附加質量 M_w 의 比로 定義되는 質量增分率이며 f_w, f_a 는 同一한 振動型에 對한 固有振動數다.

이때 空氣속과 流體속에서의 振動波形이 같다고 가정하면 質量增分率 β 는 流體粒子的 運動 energy T_w 와 振動體 自體의 運動 energy T_p 의 比로서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\beta = \frac{M_w}{M_p} = \frac{T_w}{T_p} \quad (1-2)$$

이제 (1-2)로부터 β 를 求하면 우리의 目的하는 바를 얻

接受日字: 1977年 12月 3日

* 正會員: 서울大學校 工科學

** 正會員: 韓國船舶研究所

을 수 있다.

한편 지금까지 행해진 彈性板의 接水振動 즉, 附加質量에 관한 研究로서는 Lamb[1]의 周緣固定圓板에 대한 計算, Maclachlan[2]의 周緣單純支持 또는 周緣自由圓板에 대한 計算, Kito[3]와 金[4]의 周緣單純支持 直四角形板에 대한 計算, Lindholm[5]의 1緣固定, 3緣自由 直四角形板에 대한 實驗 등이 있다.

本 研究에서는 한 邊이 單純支持, 兩 邊이 固定 또는 自由인 2가지 경우의 直四角形板에 對해 앞에서 定義된 質量增分率을 橢圓柱座標系를 利用하여 計算하였고, 같은 方法으로 計算된 金[4]의 周緣單純支持 直四角形板에 대한 값과 이들의 값을 比較함으로써 直四角形板에서 어느 한 邊이 單純支持로 고정되어 있을 때 兩 邊의 支持條件의 狀態 즉, 單純支持, 固定 및 自由의 3가지 경우가 附加質量에 대해 미치는 影響을 把握함과 아울러 附加質量의 計算에는 空氣中에서의 振動特性이 必要함을 염두에 두어 앞의 2가지 경우에 대한 空氣中에서의 振動解析을 Levy方法에 의하여 간단히 살펴 보았다.

2. 空氣中에서의 振動解析

2.1. 兩邊이 單純支持—單純支持, 固定—固定인 경우

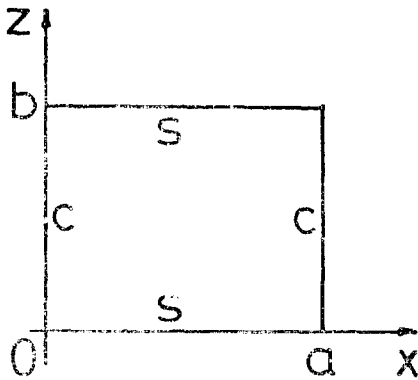


Fig. 1. Coordinate System

Fig.1에 보인 直四角形板이 單純調和自由振動할 때 運動方程式은 다음과 같다.

$$D_E \nabla^4 W(x,z) - \omega^2 \rho h W(x,z) = 0 \quad (2-1)$$

여기서

- D_E : 板의 굽힘剛性度 = $Eh^3/12(1-\nu^2)$
- h : 板의 두께
- E : 板의 引張彈性係數
- ν : 板의 Poisson比
- ρ : 板의 質量密度
- ω : 板의 固有圓振動數

$W(x,z)$: 振幅 即, 振動波形

한편 境界條件은 $x=0, a$ 에서 固定(C), $z=0, b$ 에서 單純支持(S)이므로

$$\left. \begin{aligned} (W)_{z=0,a} &= 0 \\ \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{z=0,a} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

$$\left. \begin{aligned} (W)_{z=0,b} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{z=0,b} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

으로 주어진다.

(2-1)의 解를 境界條件(2-3)을 고려하여

$$W(x,z) = X(x) \cdot \sin \frac{n\pi z}{b} \quad (2-4)$$

但, $n=1, 2, \dots$

로 놓자, 이제 (2-1) 및 (2-2)는 각각 다음과 같이 바뀐다.

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - 2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + \left\{ \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 - \frac{\rho h \omega^2}{D_E} \right\} X = 0 \quad (2-5)$$

$$\left. \begin{aligned} (X)_{x=0,a} &= 0 \\ \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0,a} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

(2-5)의 解를 e^{qx} 로 取해 q 를 구하면

$$q = \pm \left(\frac{n\pi}{b}\right) \sqrt{1 \pm r} \quad (2-7)$$

但,

$$r = \left(\frac{b}{n\pi}\right)^2 \sqrt{\rho h \omega^2 / D_E}$$

을 얻는다. 따라서 (2-5)의 解는 다음과 같이 된다.

(i) $0 < r < 1$ 일 때

$$X(x) = A \cosh q_1 x + B \cosh q_2 x + C \sinh q_1 x + D \sinh q_2 x \quad (2-8.a)$$

(ii) $r > 1$ 일 때

$$X(x) = A' \cosh q_1 x + B' \cos q_3 x + C' \sinh q_1 x + D' \sin q_3 x \quad (2-8.b)$$

但,

$$q_1 = \left(\frac{n\pi}{b}\right) \sqrt{1+r}, \quad q_2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right) \sqrt{1-r}$$

$$q_3 = \left(\frac{n\pi}{b}\right) \sqrt{r-1}$$

한편 $r=1$ 일 때는 境界條件 (2-6)으로부터 $X=0$ 이 되어 有用한 解가 되지 못한다.

(2-8)을 境界條件 (2-6)에 代入해 얻는 振動數方程式 및 해당 振動波形은 다음과 같다.

(i) $0 < r < 1$ 일 때

$$\sqrt{1-r}^2 = \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1+r}\right) \cdot \sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1-r}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1+r}\right) \cdot \cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1-r}\right) - 1} \quad (2-9.a)$$

$$X(x) = \cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1+r} \frac{x}{a}\right) - \cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1-r} \frac{x}{a}\right) + C_1 \sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1+r} \frac{x}{a}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1-r} \frac{x}{a}\right) \quad (2-10. a)$$

(ii) $r > 1$ 일 때

$$\sqrt{r^2-1} = \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r+1}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r-1}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r+1}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r-1}\right) - 1} \quad (2-9. b)$$

$$X(x) = \cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r+1} \frac{x}{a}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r-1} \frac{x}{a}\right) + C_3 \sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r+1} \frac{x}{a}\right) + C_4 \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r-1} \frac{x}{a}\right) \quad (2-10. b)$$

여기서

$$\alpha = \frac{b}{a}$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{1-r} \left\{ \cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1+r}\right) - \cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1-r}\right) \right\}}{\sqrt{1+r} \sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1-r}\right) - \sqrt{1-r} \sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1+r}\right)}$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{1+r} \left\{ \cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1-r}\right) - \cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1+r}\right) \right\}}{\sqrt{1+r} \sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1-r}\right) - \sqrt{1-r} \sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1+r}\right)}$$

$$C_3 = \frac{\sqrt{r-1} \left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r-1}\right) - \cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r+1}\right) \right\}}{\sqrt{r-1} \sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r+1}\right) - \sqrt{r+1} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r-1}\right)}$$

$$C_4 = \frac{\sqrt{r+1} \left\{ \cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r+1}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r-1}\right) \right\}}{\sqrt{r-1} \sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r+1}\right) - \sqrt{r+1} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r-1}\right)}$$

앞의 식들 중에서 (2-9. a)는 解를 갖지 못함이 밝혀져 있다. 따라서 振動數方程式 (2-9. b)로부터 固有振動數를 얻고, (2-10. b)로부터 $X(x)$, 또 이를 (2-4)에 對入함으로써 이 경우의 平板의 振動波形을 얻는다.

2.2. 맞邊이 單純支持—單純支持, 自由—自由인 경우

座標系를 Fig.1과 같이 取한다면 自由인 邊에서 그 境界條件의 복잡성으로 인해 振動數方程式이 상당히 복잡한 꼴로 나타나게 된다. 이를 피하기 위하여 座標系를 Fig.2와 같이 택하여 x 軸에 관한 對稱性을 利用하기로 하자.

이 경우 2.1節의 境界條件 (2-2) 및 (2-6)이 各各 (2-11), (2-12)로 바뀌는 外에는 (2-1)~(2-8)까지 모두 그대로 適用됨을 알 수 있다.

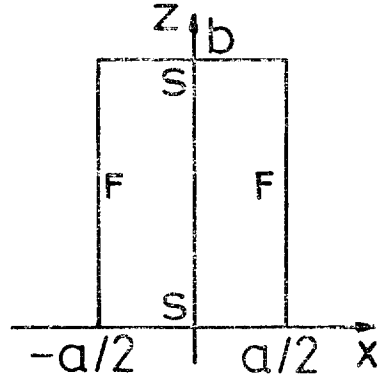


Fig. 2. Coordinate System

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right\}_{x=\pm a/2} &= 0 \\ \left\{ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial z^2} \right\}_{x=\pm a/2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{d^2 X}{dx^2} - \nu \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 X \right\}_{x=\pm a/2} &= 0 \\ \left\{ \frac{d^3 X}{dx^3} - (2-\nu) \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \frac{dX}{dx} \right\}_{x=\pm a/2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

이제 (2-8)을 境界條件 (2-12)에 代入하여 振動數方程式을 구하기에 앞서 振動波形을 x 軸에 對稱인 振動波形과 非對稱인 振動波形으로 구분하던 振動數函數가 前者에서는 偶函數 後者에서는 奇函數로 됨을 알 수 있다. 따라서 (2-8)을 다음과 같이 나누어 쓰자.

對稱인 振動波形에 대해

$$X(x) = \begin{cases} A \cosh q_1 x + B \cosh q_2 x, & (0 < r < 1) \end{cases} \quad (2-13. a)$$

$$\begin{cases} A' \cosh q_1 x + B' \cosh q_3 x, & (r > 1) \end{cases} \quad (2-13. b)$$

非對稱인 振動波形에 대해

$$X(x) = \begin{cases} C \sinh q_1 x + D \sinh q_2 x, & (0 < r < 1) \end{cases} \quad (2-13. c)$$

$$\begin{cases} C' \sinh q_1 x + D' \sinh q_3 x, & (r > 1) \end{cases} \quad (2-13. d)$$

(2-13)을 (2-12)에 代入해 얻은 振動數方程式 및 振動波形은 다음과 같다.

對稱인 振動波形에 대해

(i) $0 < r < 1$

$$\left(\frac{r-\nu+1}{r+\nu-1}\right)^2 \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} = \frac{\tanh\left(\frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt{1+r}\right)}{\tanh\left(\frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt{1-r}\right)} \quad (2-14. a)$$

$$X(x) = \cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1+r} \frac{x}{a}\right) + C'_1 \cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1-r} \frac{x}{a}\right) \quad (2-15. a)$$

(ii) $r > 1$

$$\left(\frac{r-\nu+1}{r+\nu-1}\right)^2 \sqrt{\frac{r-1}{r+1}} = \frac{\tanh\left(\frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt{r+1}\right)}{\tan\left(\frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt{r-1}\right)} \quad (2-14. b)$$

$$X(x) = \cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r+1} \frac{x}{a}\right) + C'_2 \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r-1} \frac{x}{a}\right) \quad (2-15. b)$$

非對稱인 振動波형에 대해

(i) $0 < r < 1$

$$\left(\frac{r-\nu+1}{r+\nu-1}\right)^2 \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} = \frac{\coth\left(\frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt{1+r}\right)}{\coth\left(\frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt{1-r}\right)} \quad (2-14. c)$$

$$X(x) = \sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r+1} \frac{x}{a}\right) + C'_3 \sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{1-r} \frac{x}{a}\right) \quad (2-15. c)$$

(ii) $r > 1$

$$\left(\frac{r-\nu+1}{r+\nu-1}\right)^2 \sqrt{\frac{r-1}{r+1}} = \frac{\coth\left(\frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt{r+1}\right)}{\cot\left(\frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt{r-1}\right)} \quad (2-14. d)$$

$$X(x) = \sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r+1} \frac{x}{a}\right) + C'_4 \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha} \sqrt{r-1} \frac{x}{a}\right) \quad (2-15. d)$$

여기서

$$\alpha = \frac{b}{a}$$

$$C'_1 = \left(\frac{r-\nu+1}{r+\nu-1}\right) \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt{1+r}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt{1-r}\right)}$$

$$C'_2 = \left(\frac{r-\nu+1}{r+\nu-1}\right) \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt{r+1}\right)}{\cos\left(\frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt{r-1}\right)}$$

$$C'_3 = \left(\frac{r-\nu+1}{r+\nu-1}\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt{1+r}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt{1-r}\right)}$$

$$C'_4 = \left(\frac{r-\nu+1}{r+\nu-1}\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt{r+1}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt{r-1}\right)}$$

이제 振動數方程式 (2-14)로부터 固有振動數를 얻고 (2-15)로부터 $X(x)$, 또 이를 (2-4)에 對入함으로서 平板의 振動波形을 얻게 된다.

3. 接水振動

3.1. 座標系

Fig.3에 보인 橢圓柱座標系(ξ, η, z)와 直角座標系(x, y, z) 사이에는 다음 관계식이 成立한다.

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a}{2} \cosh \xi \cdot \cos \eta \\ y &= \frac{a}{2} \sinh \xi \cdot \sin \eta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

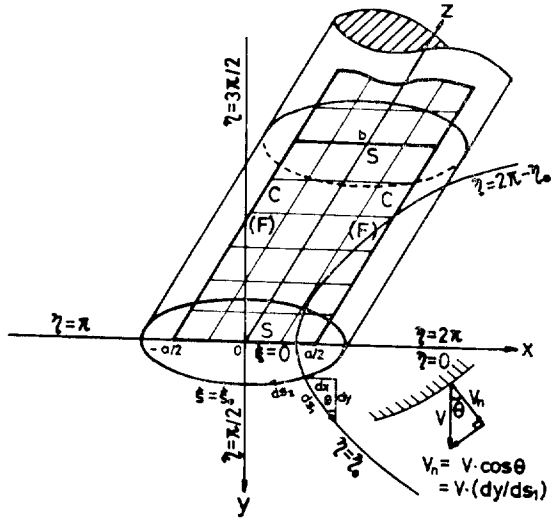


Fig. 3. Coordinate Systems and Velocity Vector Relations.

여기서 a 는 橢圓의 焦點間 거리이다.

또한 雙曲線 線素의 길이 ds_1 과 橢圓線素의 길이 ds_2 는 각각

$$\left. \begin{aligned} ds_1 &= l_1 \cdot d\xi \\ ds_2 &= l_2 \cdot d\eta \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

但,

$$l_1 = l_2 = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)}$$

이며, 橢圓의 注線方向의 線素 dn 은

$$dn = l_1 \cdot d\xi \quad (3-3)$$

로 된다.

특히 $\xi \rightarrow 0$ 일때 橢圓柱는 幅 a 인 平板으로 退化된다.

3.2. 問題의 定式化

質量增分率을 計算하려면 (1-2)에서 보듯이 平板自體의 運動 energy T_p 는 물론 平板周圍 流體의 運動 energy T_w 를 구하여야 한다. T_p 는 振動波形 w_{mn} 으로부터 쉽게 얻어지나 T_w 의 計算을 위해서는 流體의 速度 potential ϕ_{mn} 를 구하여야 한다. 이 速度 potential $\phi_{mn}(\xi, \eta, z, t)$ 은 Laplace方程式

$$\frac{1}{l_1^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_{mn}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_{mn}}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi_{mn}}{\partial z^2} = 0 \quad (3-4)$$

과 다음에 주어지는 境界條件을 만족해야 한다.

$$\phi_{mn} = 0, \text{ at } \xi \rightarrow \infty \quad (3-5)$$

$$\phi_{mn} = 0, \text{ at } |z| \rightarrow \infty \quad (3-6)$$

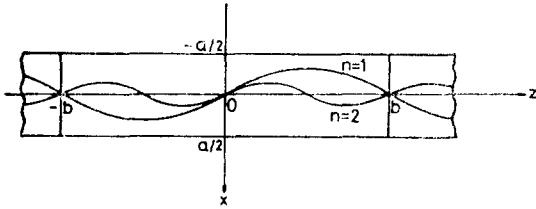
$$\left(\frac{\partial \phi_{mn}}{l_1 \partial \xi} \right)_{\xi=0} / \left(\frac{\partial y}{l_1 \partial \xi} \right)_{\xi=0}^{-1} = \frac{\partial w_{mn}}{\partial t}, \text{ at } 0 < z < b \quad (3-7)$$

(3-5), (3-6)은 無限遠方에서 速度 potential이 없다는 것, (3-7)은 平板 위에서 流體의 垂直速度成分이 平板의 그것과 一致 한다는 것을 表示한다. (Fig.3 參照)

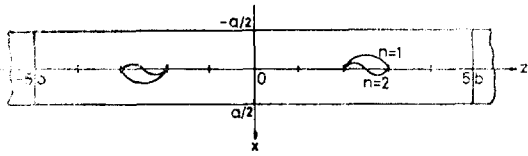
w_{mn} 은 Fig.3과 같이 $z=0, b$ 인 邊을 單純支持線, $\eta=0, \pi(x=\pm \frac{a}{2})$ 인 邊을 固定線 혹은 自由線으로 取할 경우 다음과 같다.

$$w_{mn}(\eta, z, t) = W_{mn} H_{mn}(\eta) \sin \frac{n\pi z}{b} \sin \omega_{mn} t \quad (3-8)$$

(3-8)에서 W_{mn} 은 振幅, H_{mn} 은 x 方向의 振動波形을 (3-1)에 依해 橢圓柱座標系로 置換 後에 ξ 을 取해준 것이다.



$$Z_n(z) = \sum_{N=1}^{\infty} F_n N \sin \frac{N\pi z}{b}$$



$$Z_n(z) = \sum_{N=1}^{\infty} F_n N \sin \frac{N\pi z}{5b}$$

Fig. 4. Semi-finite Plate

(3-5)~(3-7)이 單獨板에 對한 境界條件式이지만 불행스럽게도 이들을 다루기란 곤란하다. 따라서 單獨板의 近似的 模型으로서 準單獨板 즉, Fig.4와 같이 幅 a , 길이 pb (但, $p=1, 3, \dots$)인 板이 길이 方向(z -軸 方向)으로 무한개가 배열되어 各板의 中央部에 해당하는 길이 b 인 구간만이 인접한 板과 180° 의 位相差로 振動할 경우를 생각하자. 이때 $p \rightarrow \infty$ 를 取하면 결국 幅 a , 길이 b 인 單獨板으로 귀착될 것이다. 이 경우 境界條件은 (3-5)~(3-7)로부터 (3-9), (3-10)으로 바뀌어 다루기가 쉬워진다.

$$\phi_{mn} = 0, \text{ at } \xi \rightarrow \infty \quad (3-9)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_{mn}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^{-1}_{\xi=0} = \frac{\partial m_{mn}}{\partial t} \quad (3-10)$$

이제 Fig.4와 같이 (3-8)의 z 軸 方向의 振動波形을 Fourier級數 展開하고 (3-1)의 關係式을 적용시키면 (3-10)은

$$\left(\frac{\partial \phi_{mn}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = \frac{a}{2} \cdot W_{mn} \cdot \omega_{mn} \cdot \sin \eta \cdot H_{mn}(\eta)$$

$$\cdot \sum_{N=1}^{\infty} F_n N \sin \frac{N\pi z}{pb} \cdot \cos \omega_{mn} t \quad (3-11)$$

로 表示된다.

결국 速度 potential ϕ_{mn} , 즉 流體의 運動 energy T_w 의 計算은 境界條件 (3-9), (3-11)을 만족시키는 Laplace方程式 (3-4)를 푸는 문제로 귀착된다.

3.3. 質量增分率

境界條件 (3-11)을 다음과 같이 고쳐 쓰자.

$$\left(\frac{\partial \phi_{mn}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = \sum_{N=1}^{\infty} B_N(\eta, z, t) \quad (3-12)$$

但,

$$B_N(\eta, z, t) = \frac{a}{2} \cdot W_{mn} \cdot \omega_{mn} \cdot \sin \eta \cdot H_{mn}(\eta) \cdot F_n N \sin \frac{N\pi z}{pb} \cdot \cos \omega_{mn} t$$

이제 (3-4)의 解 ϕ_N 이 (3-9)와

$$\left(\frac{\partial \phi_N}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = B_N(\eta, z, t) \quad (3-13)$$

를 滿足한다면 ϕ_{mn} 은 Laplace 方程式의 線型性和 (3-12)로부터

$$\begin{aligned} \phi_{mn} &= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} \phi_N \end{aligned} \quad (3-14)$$

로 됨을 안다. 따라서 (3-4), (3-9), (3-13)을 만족하는 ϕ_N 을 구하여 (3-14)을 적용시키면 우리가 구하고자 하는 (3-4), (3-9), (3-11)을 滿足하는 ϕ_{mn} 을 決定할 수 있다.

(3-4)의 解를

$$\begin{aligned} \phi_N(\xi, \eta, z, t) &= \Psi(\xi, \eta) \cdot Z(z) \cdot \cos \omega_{mn} t \\ &= \bar{E}(\xi) \cdot H(\eta) Z(z) \cdot \cos \omega_{mn} t \end{aligned} \quad (3-15)$$

로 取하고, 또다시

$$Z(z) = F_n N \sin \frac{N\pi z}{pb} \quad (3-16)$$

로 놓아 (3-4)를 定理하면

$$\begin{aligned} \frac{\bar{E}''}{\bar{E}} - 2 \left(\frac{aN\pi}{4pb} \right)^2 \cosh 2\xi \\ = - \frac{H''}{H} - 2 \left(\frac{aN\pi}{4pb} \right)^2 \cos 2\eta \end{aligned} \quad (3-17)$$

로 된다. 이때 분리상수 c 를 도입하면 다음과 같은 2개의 常微分方程式을 얻는다.

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} + \{c - 2(-q_N) \cos 2\eta\} H = 0 \quad (3-18. a)$$

$$\frac{d^2 \bar{E}}{d\xi^2} - \{c - 2(-q_N) \cosh 2\xi\} \bar{E} = 0 \quad (3-18. b)$$

여기서

$$q_N = \left(\frac{aN\pi}{4pb} \right)^2 \quad (3-19)$$

(3-18. a) 및 (3-18. b)는 각각 Mathieu方程式, 變形된 Mathieu 方程式이다. 따라서 (3-15)의 $\Psi(\xi, \eta)$ 는 주어진 $c, -qN$ 에 대한 (3-18. a), (3-18. b)의 解의 相乘積으로 나타난다.

(3-18)의 解로서 整數次의 Mathieu函數들을 取하되 (3-18. a)의 解는 (3-13)을 고려해 周期解 sine-elliptic 函數를 取한다. z 軸에 對하여 對稱인 振動波形에 대해서는 周期 2π 인 解를, 非對稱인 振動波形에 대해서는 周期 π 인 解만을 取한다. 한편 (3-18. b)의 解로서는 (3-9)를 고려해 變形된 Bessel函數 I, K의 相乘積으로 展開되는 非周期解를 取한다. 따라서 $\Psi(\xi, \eta)$ 는 다음과 같이 쓰여진다.

z 軸에 對稱인 振動波形에 대하여

$$\Psi(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^{\infty} \text{Gek}_{2r-1}(\xi, -qN) \cdot \text{se}_{2r-1}(\eta, -qN) \quad (3-20. a)$$

z 軸에 非對稱인 振動波形에 대하여

$$\Psi(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^{\infty} \text{Gek}_{2r}(\xi, -qN) \cdot \text{se}_{2r}(\eta, -qN) \quad (3-20. b)$$

이제 (3-20)을 (3-15)에 代入하면 다음과 같이 ϕ_N 이 決定된다.

$$\begin{aligned} \phi_N &= \sum_{r=1}^{\infty} C_{N2r-1} \text{Gek}_{2r-1}(\xi, -qN) \cdot \text{se}_{2r-1}(\eta, -qN) \\ &\quad \cdot F_{nN} \sin \frac{N\pi z}{pb} \cdot \cos \omega_{mn} t, \quad m=1, 3, \quad (3-21. a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_N &= \sum_{r=1}^{\infty} C_{N2r} \text{Gek}_{2r}(\xi, -qN) \cdot \text{se}_{2r}(\eta, -qN) \\ &\quad \cdot F_{nN} \sin \frac{N\pi z}{pb} \cdot \cos \omega_{mn} t, \quad m=2, 4, \dots \quad (3-21. b) \end{aligned}$$

(3-21)에서 $m=1, 3, \dots$ 은 z 軸에 대하여 對稱, $m=2, 4, \dots$ 는 非對稱인 振動波形을 나타낸다. 또한 C_N 은 境界條件 (3-9) 및 (3-13)으로부터 決定되어야 할 常數이다.

(3-21)이 境界條件 (3-9)를 滿足함은 自明하다. 即, $\xi \rightarrow \infty$ 일때 $\text{Gek}(\xi, -qN) \rightarrow 0$ 이다. 다음에 (3-13)을 (3-21)에 적용시키기에 앞서 (3-13)을 z 軸에 對하여 對稱인 振動波形과 非對稱인 振動波形으로 나누어 줄 必要가 있다. 이때 (3-13)의 $\sin \eta \cdot H_{mn}(\eta)$ 項이 前者에서는 周期가 2π , 後者에서는 周期가 π 인 奇函數로 됨을 쉽게 알 수 있다.

即,

$$\sin \eta \cdot H_{mn}(\eta) = \sum_{s=1}^{\infty} E_{m2s-1} \sin(2s+1)\eta, \quad m=1, 3, \quad (3-22. a)$$

$$\sin \eta \cdot H_{mn}(\eta) = \sum_{s=1}^{\infty} E_{m2s} \sin 2s\eta, \quad m=2, 4, \quad (3-22. b)$$

로 Fourier 級數展開 된다. 따라서 (3-13)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi_N}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} &= \frac{a}{2} W_{mn} \omega_{mn} \sum_{s=1}^{\infty} E_{m2s-1} \sin(2s-1)\eta \\ &\quad \cdot F_{nN} \sin \frac{N\pi z}{pb} \cdot \cos \omega_{mn} t, \quad m=1, 3, \quad (3-23. a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi_N}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} &= \frac{a}{2} W_{mn} \omega_{mn} \sum_{s=1}^{\infty} E_{m2s} \sin 2s\eta \\ &\quad \cdot F_{nN} \sin \frac{N\pi z}{pb} \cdot \cos \omega_{mn} t, \quad m=2, 4, \quad (3-23. b) \end{aligned}$$

이제 (3-21)을 (3-23)에 代入하면 각각 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} C_{N2r-1} \text{Gek}'_{2r-1}(0, -qN) \cdot \text{se}_{2r-1}(\eta, -qN) \\ = \frac{a}{2} W_{mn} \omega_{mn} \sum_{s=1}^{\infty} E_{m2s-1} \sin(2s-1)\eta, \quad m=1, 3, \dots \quad (3-24. a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} C_{N2r} \text{Gek}'_{2r}(0, -qN) \cdot \text{se}_{2r}(\eta, -qN) \\ = \frac{a}{2} W_{mn} \omega_{mn} \sum_{s=1}^{\infty} E_{m2s} \sin 2s\eta, \quad m=2, 4, \dots \quad (3-24. b) \end{aligned}$$

한편 삼각함수와 sine-elliptic함수 사이에는 다음 관계가 있다.

$$\begin{aligned} \sin(2s-1)\eta &= (-1)^{s-1} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} A_{(2s-1)}^{(2r-1)}(qN) \\ &\quad \cdot \text{se}_{2r-1}(\eta, -qN) \quad (3-25. a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 2s\eta &= (-1)^{s-1} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} B_{2s}^{(2r)}(qN) \\ &\quad \cdot \text{se}_{2r}(\eta, -qN) \quad (3-25. b) \end{aligned}$$

여기서 A 및 B 는 각 각 cosine-elliptic函數 $\text{ce}_{2r-1}(\eta, qN)$ 과 sine-elliptic函數 $\text{se}_{2r}(\eta, qN)$ 을 Fourier級數로 展開했을 때의 正規化된 係數들로서 文獻[7]에서 찾아 볼 수 있다.

이제 (3-25)를 利用하여 (3-24)로부터 C 는 다음과 같이 計算된다.

$$\begin{aligned} C_{N2r-1} &= \left(\frac{a}{2} W_{mn} \omega_{mn} \right) \cdot \frac{1}{\text{Gek}'_{2r-1}(0, -qN)} \\ &\quad \cdot \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} (-1)^{r-1} E_{m2s-1} A_{2s-1}^{(2r-1)}(qN), \\ &\quad m=1, 3, \dots \quad (3-26. a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{N2r} &= \left(\frac{a}{2} W_{mn} \omega_{mn} \right) \cdot \frac{1}{\text{Gek}'_{2r}(0, -qN)} \\ &\quad \cdot \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} (-1)^{r-1} E_{m2s} B_{2s}^{(2r)}(qN). \end{aligned}$$

本 研究에서 Mathieu函數와 관련된 모든 記號들은 Maclachlan의 著書[6]에 따른 것임.

$$m=2, 4, \quad (3-26. b)$$

따라서

$$\begin{aligned} \phi_N = & \left(\frac{a}{2} W_{mn} \omega_{mn} \cos \omega_{mnt} \right) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\text{Gek}_{2r}(\xi, -qN)}{\text{Gek}'_{2r}(0, -qN)} \\ & \cdot \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} (-1)^{r-1} E_{m_{2s}} A_{2s-1}^{(2r)}(qN) \right\} \\ & \cdot \text{se}_{2r-1}(\eta, -qN) \cdot F_{nN} \sin \frac{N\pi z}{pb}, \quad m=1, 3, \dots \end{aligned} \quad (3-27. a)$$

$$\begin{aligned} \phi_N = & \left(\frac{a}{2} W_{mn} \omega_{mn} \cos \omega_{mnt} \right) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\text{Gek}_{2r}(\xi, -qN)}{\text{Gek}'_{2r}(0, -qN)} \\ & \cdot \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} (-1)^{r-1} E_{m_{2s}} B_{2s}^{(2r)}(qN) \right\} \\ & \cdot \text{se}_{2r}(\eta, qN) \cdot F_{nN} \sin \frac{N\pi z}{pb}, \quad m=2, 4, \dots \end{aligned} \quad (3-27. b)$$

로 되고 또한 (3-14)로부터 ϕ_{mn} 은 다음과 같이 決定된다.

$$\begin{aligned} \phi_{mn} = & \left(\frac{a}{2} W_{mn} \omega_{mn} \cos \omega_{mnt} \right) \sum_{N=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \right. \right. \\ & \cdot (-1)^{r-1} E_{m_{2s-1}} A_{2s-1}^{(2r)}(qN) \left. \right\} \cdot \frac{\text{Gek}_{2r-1}(\xi - qN)}{\text{Gek}'_{2r-1}(0, -qN)} \\ & \cdot \text{se}_{2r-1}(\eta, -qN) \left. \right\} \cdot F_{nN} \sin \frac{N\pi z}{pb}, \quad m=1, 3, \dots \end{aligned} \quad (3-28. a)$$

$$\begin{aligned} \phi_{mn} = & \left(\frac{a}{2} W_{mn} \omega_{mn} \cos \omega_{mnt} \right) \sum_{N=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \right. \right. \\ & \cdot (-1)^{r-1} E_{m_{2s}} B_{2s}^{(2r)}(qN) \left. \right\} \cdot \frac{\text{Gek}_{2r}(\xi, -qN)}{\text{Gek}'_{2r}(0, -qN)} \\ & \cdot \text{se}_{2r}(\eta, -qN) \left. \right\} \cdot F_{nN} \sin \frac{N\pi z}{pb}, \quad m=2, 4, \dots \end{aligned} \quad (3-28. b)$$

이제 (3-28)을

$$T_w = -\frac{1}{2} \rho_w \int_0^{pb} \int_0^{2\pi} \left(\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\eta \cdot dz \quad (3-29)$$

에 代入하고 $\text{se}(\eta, -qN)$ 및 $\sin(N\pi z/pb)$ 의 直交性을 利用하면 流體의 運動 energy는 다음과 같이 計算된다.

但. ρ_w 는 流體의 質量密度다.

$$\begin{aligned} T_w = & -\rho_w \left(\frac{a}{2} W_{mn} \omega_{mn} \cos \omega_{mnt} \right)^2 \frac{\pi pb}{4} \\ & \sum_{N=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} E_{m_{2s-1}} A_{2s-1}^{(2r)}(qN) \right\} \right\}^2 \\ & \cdot \frac{\text{Gek}_{2r-1}(0, -qN)}{\text{Gek}'_{2r-1}(0, -qN)} \left. \right\} \cdot F_{nN}^2, \quad m=1, 3, \dots \end{aligned} \quad (3-30. a)$$

$$\begin{aligned} T_w = & -\rho_w \left(\frac{a}{2} W_{mn} \omega_{mn} \cos \omega_{mnt} \right)^2 \frac{\pi pb}{4} \\ & \sum_{N=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} E_{m_{2s}} B_{2s}^{(2r)}(qN) \right\} \right\}^2 \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{\text{Gek}_{2r}(0, -qN)}{\text{Gek}'_{2r}(0, -qN)} \left. \right\} \cdot F_{nN}^2, \quad m=2, 4, \dots \quad (3-30. b)$$

한편 板自體의 運動 energy는 振動波形

$$\begin{aligned} w_{mn}(x, z, t) = & W_{mn} \cdot X_{mn}(x) \cdot Z_n(z) \cdot \sin \omega_{mnt} \\ = & W_{mn} \cdot X_{mn}(x) \cdot \sum_{N=1}^{\infty} F_{nN} \sin \frac{N\pi z}{pb} \\ & \cdot \sin \omega_{mnt} \end{aligned} \quad (3-31)$$

를

$$T_p = \frac{1}{2} \rho_p h \int_0^{pb} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{dw_{mn}}{dt} \right)^2 dx \cdot dz \quad (3-32)$$

에 넣으면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} T_p = & \rho_p h \frac{pab}{4} \left(W_{mn} \omega_{mn} \cos \omega_{mnt} \right)^2 \sum_{N=1}^{\infty} F_{nN}^2 \\ & \cdot \int_{-+}^{+} X_{mn}^2(\gamma) d\gamma \end{aligned} \quad (3-33)$$

여기에서 ρ_p, h 는 각각 板의 質量密度 및 두께이고 γ 는 x 를 無次元化 시킨 값 即 $\gamma = x/a$ 이다.

따라서 質量增分率은 (3-30), (3-33) 및 (1-2)에 依하여 다음과 같이 表示된다.

$$\begin{aligned} \beta_{mn} = & \left(\frac{\rho_w}{\rho_p} \right) \cdot \left(\frac{a}{h} \right) \cdot \frac{\pi}{4 \sum_{N=1}^{\infty} F_{nN}^2 \int_{-+}^{+} X_{mn}(\gamma)} \\ & \cdot \sum_{N=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} E_{m_{2s-1}} A_{2s-1}^{(2r)}(qN) \right\} \right\}^2 \\ & \cdot \frac{-\text{Gek}_{2r-1}(0, -qN)}{\text{Gek}'_{2r-1}(0, -qN)} \left. \right\} \cdot F_{nN}^2, \quad m=1, 3, \dots \end{aligned} \quad (3-34. a)$$

$$\begin{aligned} \beta_{mn} = & \left(\frac{\rho_w}{\rho_p} \right) \cdot \left(\frac{a}{h} \right) \cdot \frac{\pi}{4 \sum_{N=1}^{\infty} F_{nN}^2 \int_{-+}^{+} X_{mn}(\gamma)} \\ & \cdot \sum_{N=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} E_{m_{2s}} B_{2s}^{(2r)}(qN) \right\} \right\}^2 \\ & \cdot \frac{-\text{Gek}_{2r}(0, -qN)}{\text{Gek}'_{2r}(0, -qN)} \left. \right\} \cdot F_{nN}^2, \quad m=2, 4, \dots \end{aligned} \quad (3-34. b)$$

(3-34)의 質量增分率은 兩面接水 即, 板이 流體속에 깊이 잠겨 振動할 경우의 값이다.

3.4. 數值計算例

基本振動型에 대한 質量增分率을 (3-34)에 의거하여 (S-S, C-C)인 板에 대해서는 길이, 幅比 $b/a=1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 10.0$, (S-S, F-F)인 板에 대해서는 $b/a=1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 6.0, 8.0, 10.0$ 의 12경우에 한해서 計算을 行하였다. 또한 p 의 값으로서는 개개의 경우에 對해 1, 3 및 5의 3가치를 택하였다.

이제 (3-34)의 計算을 爲해서는 式중의 $\frac{-\text{Gek}(0, -q)}{\text{Gek}'(0, -q)}$ 를 다음과 같이 變形된 Bessel函數 I, K의 相乘積의 級

數꼴로 정리할 必要가 있다.

$$\frac{-\text{Gek}'_{2r-1}(0, -q)}{\text{Gek}'_{2r-1}(0, -q)} = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} A_{2t-1}^{(2r-1)}(q) (I_{t-1} \cdot K_t + I_t \cdot K_{t-1})}{\sum_{t=1}^{\infty} A_{2t-1}^{(2r-1)}(q) \{ (2t-1) (I_{t-1} \cdot K_t - I_t \cdot K_{t-1}) + 2\sqrt{q} (I_{t-1} \cdot K_{t-1} + I_t \cdot K_t) \}} \quad (3-35. a)$$

$$\frac{-\text{Gek}'_{2r}(0, -q)}{\text{Gek}'_{2r}(0, -q)} = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} B_{2t}^{(2r)}(q) (I_t \cdot K_{t+1} - I_{t+1} \cdot K_t)}{\sum_{t=1}^{\infty} B_{2t}^{(2r)}(q) \cdot 2t (I_{t-1} K_{t+1} + I_{t+1} \cdot K_{t-1} + 2I_t \cdot K_t)} \quad (3-35. b)$$

여기서 $I=I(q)$, $K=K(q)$, $q=q_N$

또한 각 係數는 다음과 같이 決定한다.

a. F_{nN}

Fig. 4에서 보듯이 길이 方向의 波形은 幅方向으로 最大振幅을 갖는 위치 $x=x_0$ 에서 다음과 같이 표현된다.

$$Z_n(x) = \begin{cases} \sin \frac{n\pi x}{b}, & \left(\frac{p-1}{2}\right)b < x < \left(\frac{p+1}{2}\right)b \\ -\left(\frac{p+1}{2}\right)b < x < -\left(\frac{p-1}{2}\right)b \\ 0, & \text{상기의 구간} \end{cases} \quad (3-36)$$

이제 $\zeta = \frac{\pi x}{pb}$ 로 놓으면 잊식은

$$Z_n(x) = \begin{cases} \sin n\pi\zeta, & \left(\frac{p-1}{2p}\right)\pi < \zeta < \left(\frac{p+1}{2p}\right)\pi \\ -\left(\frac{p+1}{2p}\right)\pi < \zeta < -\left(\frac{p-1}{2p}\right)\pi \\ 0, & \text{상기의 구간} \end{cases} \quad (3-37)$$

따라서 (3-37)을

$$Z_n(x) = \sum_{N=1}^{\infty} F_{nN} \sin \frac{N\pi x}{pb} = \sum_{N=1}^{\infty} F_{nN} \sin N\zeta \quad (3-38)$$

과 같이 Fourier級數展開할 경우 그 係數 F_{nN} 은 다음과 같다.

$$F_{nN} = \frac{2}{\pi} \begin{cases} \left(\frac{p+1}{2p}\right)\pi \\ \left(\frac{p-1}{2p}\right)\pi \end{cases} \sin n\pi\zeta \cdot \sin N\zeta \cdot d\zeta \quad (3-39)$$

$n=1$ 일때 $p=1, 3$ 또는 5 에 대하여 (3-39)로부터 計算된 F_{1N} 은 Table 1과 같다. 한편 $n=1$ 의 경우에 Table

1에 나타나지 않은 $N=2, 4, \dots$ 등에 대한 F_{1N} 의 값은 모두 0이다.

Table 1. F_{1n} in the formula (3-38)

N \ P	1	3	5
1	1	-0.413497	0.252276
3	0	0.333333	-0.233872
5	0	-0.206748	0.2
7	0	0.0826993	-0.155915
9	0	0	0.108118
11	0	-0.0295355	-0.0630689
13	0	0.0206748	0.0259858
15	0	0	0
17	0	-0.0118142	-0.0141741
19	0	0.0093976	0.0180197

b. E_{ms}

이 係數는 (3-22)로부터 計算된다. 本 計算例에서는 $m=1$ 이므로 (3-22. a)를 使用한다.

(S-S, C-C)*의 경우에는 (3-22. a)와 振動波形 (2-10.

b)로부터 (3-1)의 관계식을 利用하면

$$\begin{aligned} & \sin\eta \cdot \left\{ \cosh \left\{ \frac{\pi}{2\alpha} \sqrt{r+1} (\cos\eta + 1) \right\} - \cos \left\{ \frac{\pi}{2\alpha} \right. \right. \\ & \quad \cdot \left. \sqrt{r-1} (\cos\eta + 1) \right\} + C_3 \sinh \left\{ \frac{\pi}{2\alpha} \right. \\ & \quad \left. \left. \sqrt{r+1} (\cos\eta + 1) \right\} + C_4 \sin \left\{ \frac{\pi}{2\alpha} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \sqrt{r-1} (\cos\eta + 1) \right\} \right\} = \sum_{s=1}^{\infty} E_{12s-1} \sin(2s-1)\eta \end{aligned} \quad (3-40)$$

로부터

$$E_{12s-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} H^*(\eta) \sin(2s-1)\eta \, d\eta \quad (3-41)$$

로 된다. 但, (3-41)에서

$$\begin{aligned} H^*(\eta) = & \sin\eta \left\{ \cosh \left\{ \frac{\pi}{2\alpha} \sqrt{r+1} (\cos\eta + 1) \right\} \right. \\ & \left. - \cos \left\{ \frac{\pi}{2\alpha} \sqrt{r-1} \cdot (\cos\eta + 1) \right\} \right. \\ & \left. + C_3 \sinh \left\{ \frac{\pi}{2\alpha} \sqrt{r+1} (\cos\eta + 1) \right\} \right. \\ & \left. + C_4 \sin \left\{ \frac{\pi}{2\alpha} \sqrt{r-1} (\cos\eta + 1) \right\} \right\} \end{aligned}$$

이다. 한편 (2-10)을 (3-22)에 代入할 때에는 그에 앞서 (2-10)을 x 축으로 $-\frac{\alpha}{2}$ 만큼 平行 이동시켜야 합을 유의해야 한다.

* (S-S, C-C); 맞邊이 單純支持—單純支持, 固定—固定 (S-S, F-F); 맞邊이 單純支持—單純支持, 自由—自由

Table 2. E_{12s-1} in the formula (3-41)

α	1	2	3	4	6	8	10
In case of (S-S, C-C)							
$s \backslash r$	2.93325	9.65186	20.9674	36.8292			227.240
1	-1.13746	-1.00982	-0.99026	-0.98382			-0.97717
2	0.57084	0.51392	0.50538	0.50263			0.49978
3	-0.11634	-0.11033	-0.10962	-0.10942			-0.10922
4	0.00115	0.00298	0.00333	0.00346			0.00360
5	-0.00017	-0.00014	-0.00014	-0.00013			-0.00014
In case of (S-S, F-F)							
$s \backslash r$	0.975863	0.963813	0.959110	0.957042	0.955387	0.954769	0.954474
1	29.103	11.600	9.23532	8.46380	7.92998	7.74648	7.66213
2	1.022	0.19233	0.08086	0.04459	0.01954	0.01094	0.00699
3	0.07587	0.00403	0.00077	0.00024	0.00005	0.00002	0.00001
4	0.00293	0.00004	0.00001				
5	0.00005	-0.00001					
6	-0.00001						

(S-S, F-F)의 경우에도 (3-41)과 똑같은 형태를 얻는다. 다만 이 때에는 (2-10. b) 대신 (2-15. a)를 사용하여

$$H^*(\gamma) = \sin\gamma \left\{ \cosh\left(\frac{\pi}{2\alpha} \sqrt{1+r} \cos\gamma\right) + C_1 \cosh\left(\frac{\pi}{2\alpha} \sqrt{1-r} \cos\gamma\right) \right\}$$

로 된다.

(3-41)에 의하여 數值積分으로 計算된 E_{12s-1} 및 (2-9. b), (2-14. b)로부터 計算된 基本固有振動數에 해당하는 r 의 값은 Table 2와 같다.

c. A, B

$A(q_N)$ 및 $B(q_N)$ 의 값은 數表 [7]에서 찾아볼 수 있다. 이 數表에는 $2r=14$, $2r-1=15$ 및 $4q_N=100$ 까지의 값이 주어지 있다. 한편 q_N 의 定義는 (3-19)와 같다.

d. X_{ms}

이는 無次元화된 x 方向의 振動波形으로서 (S-S, C-C)의 경우에는 (2-10. b)를 x 축으로 $-\frac{a}{2}$ 만큼 평행이동시켜

$$X_{11}(r) = \cosh\left\{\frac{\pi}{\alpha} \sqrt{r+1}\left(r+\frac{1}{2}\right)\right\} - \cos\left\{\frac{\pi}{\alpha} \sqrt{r-1}\left(r+\frac{1}{2}\right)\right\} + C_3 \sinh\left\{\frac{\pi}{\alpha} \sqrt{r+1}\left(r+\frac{1}{2}\right)\right\} + C_4 \sin\left\{\frac{\pi}{\alpha} \sqrt{r-1}\left(r+\frac{1}{2}\right)\right\} \quad (3-42)$$

Table 3. Values of $\frac{\beta_{11}}{(\rho_w/\rho_p) \cdot (a/h)}$ in case of (S-S, C-C)

$b/a \backslash p$	1	3	5
1	0.50140	0.59430	0.59811
2	0.65451	0.70109	0.70137
3	0.71937	0.74414	0.74512
4	0.75142	0.76658	0.76733
10	0.80034	0.80303	0.80334

Table 4. Values of $\frac{\beta_{11}}{(\rho_w/\rho_p) \cdot (a/h)}$ in case of (S-S, F-F)

$b/a \backslash p$	1	2	3
1	0.42819	0.52696	0.53084
2	0.60292	0.65280	0.65324
3	0.67676	0.70333	0.70438
4	0.71341	0.72963	0.73045
6	0.74685	0.75451	0.75510
8	0.76124	0.76563	0.76606
10	0.76874	0.77160	0.77193

로 주어지고 (S-S, F-F)의 경우에는 (2-15. a)로부터

$$X_{11}(r) = \cosh\left(\frac{\pi}{\alpha} \sqrt{1+r} r\right) + C'_1 \cosh\left(\frac{\pi}{\alpha} \sqrt{1-r} r\right) \quad (3-43)$$

으로 된다.

한편 (3-34)의 積分은 被積分函數가 (3-42) 혹은 (3-

43)의 꼴로 주어지므로 解析의으로 구해진다.

以上과 같은 과정으로 計算된 結果는 Table 3 및 Table 4와 같다. 또한 數值計算은 서울大學校 工科大學 電算組織 FACOM 280-28S로 수행되었다.

한편 本研究와 同一한 方法으로 計算된 金[4]의 周緣이 모두 單純支持 即 (S-S,S-S)때의 값을 Table 5에 실었다.

Table 5. Values of $\frac{\beta_{11}}{(\rho_w/\rho_p) \cdot (a/h)}$ in case of (S-S,S-S)

b/a \ p	1	2	3
1	0.50541	0.60705	0.61115
2	0.67665	0.72669	0.72826
3	0.74819	0.77547	0.77654
4	0.78381	0.80048	0.80137
6	0.81648	0.82438	0.82497
8	0.83063	0.83516	0.83559
10	0.83804	0.84099	0.84137

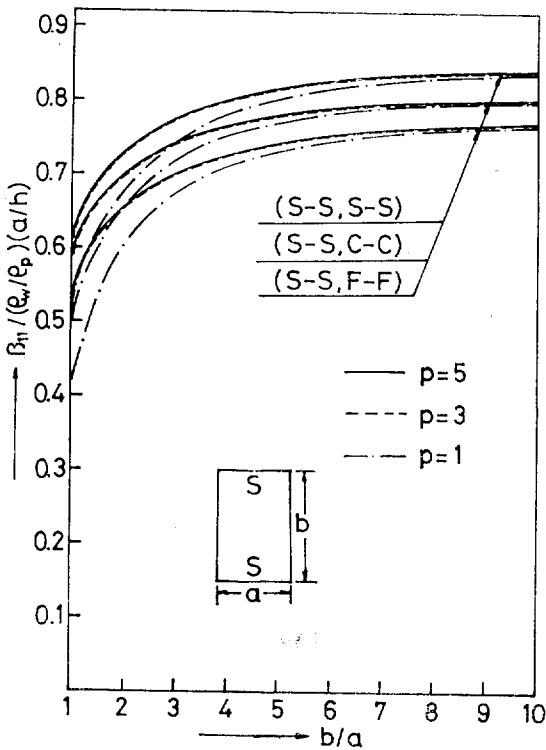


Fig. 5. Graphical Representation of Table 3, 4 and 5

4. 結論 및 考察

Table 3, 4 및 5를 圖表化한 것이 Fig.5이다. 이로부터 길이 · 幅比, p 및 周緣支持條件이 質量增分率에 미

치는 影響을 쉽게 把握할 수 있다.

우선 p에 따른 質量增分率의 變化는 기대했던 바와 마찬가지로 p가 증가함에 따라 β_D 도 증가하고 있다. 특히 길이 · 幅比가 낮은 영역에서는 그 차이가 현저하다 그러나 p가 1과 3때의 차는 두드러지지만 그 이상의 p에 對해서는 별 차이가 없음을 보여준다. 이로 미루어 $p=\infty$ 일 경우, 即 單獨板에 대한 값으로서 $p=5$ 일 때를 取하는 것이 타당하다고 생각된다. 이런 理由에서 p가 5보다 큰 경우의 計算은 수행하지 않았다. 또한 길이, 幅比가 큰 영역에서는 p의 값도 아무 影響이 없고 길이 · 幅比도 또한 별 效果를 못 미치는 점을 볼 때 이 구간에서는 어떤 常數로 質量增分率을 대체할 수 있다는 可能性을 보여주고 있다.

한편 길이 · 幅比에 관계없이 周緣支持條件에 따라 質量增分率이 일정한 順序를 이루고 있다. 즉 (S-S,S-S), (S-S,C-C), (S-S,F-F)의 順으로 質量增分率이 減少하고 있다. 이는 長邊의 支持條件의 變化로 인한 效果를 說明해 주는 것으로서 質量增分率이 (1-2)에서 보듯이 平板自體의 運動 energy에 대한 流體의 運動 energy의 比라는 점을 고려할 때 이 比의 값이 單純支持일 때 가장 크고 固定일 때 중간이며 自由일 때 가장 작다는 事實을 말해준다. 또한 이 比의 값이 길이 · 幅比에 따라서 支持條件의 기여도가 다를 수 있다. 즉, 周緣이 모두 單純支持인 경우를 基準으로 할 때 長邊이 固定인 때에는 길이 · 幅比가 커짐에 따라 質量增分率의 차이도 점차 커지고 있으나 自由인 경우에는 그 反對 現象을 보이고 있다. 그러나 後者에서는 그 變化의 차이가 極히 미소하여 一定하다고 볼 수 있다.

以上的 事實들로부터 여기에서 다루지 않은 單支持條件의 直四角形板에 대한 質量增分率도 어느 정도 추측할 수 있으리라 기대된다.

參考文獻

- [1] Lamb, H., "On the Vibrations of an Elastic Plates in Contact With Water", *Proc of Roy. Soc. (London), Ser. A*, 1921.
- [2] Maclachlan, N.W., "The Accession to Inertia of Flexible Discs Vibrating in a Fluid", *Proc. of Phys. Soc.*, 1932.
- [3] Kito, F., "On the Added Mass of Flat Plates Vibrating in Water", (in Japanese), *Zotsan No. 266*, Zosen Kyokai of Japan, May, 1944.
- [4] Kim, K.C., "Calculation of the Added Mass of *Journal of SNAK Vol. 15, No. 2, June 1978*

- a Rectangular Plate in Elastic Vibration," *Proceedings of PRADS*, Tokyo, Japan, Oct., 1977.
- [5] Lindholm, U.S., Kana, D.D., Chu, W.H. and Abramson, H.N., "Elastic Vibration Characteristics of Cantilever Plates in Water", *Journal of Ship Research*, Vol. 9, No. 1, SNAME, June, 1965.
- [6] Maclachlan, N.W., *Theory and Application of Mathieu Functions*, Dover Publication Inc., 1964.
- [7] Tables Relating to Mathieu Functions, Prepared by the computation Lab, NAML *National Bureau of Standard*, U.S.A., and Published by Columbia University Press in 1951.
- [8] Voigt, W., "Bemerkung zu dem Problem der transversalen Schwingungen rechteckiger Platten", *Göttingen Nachrichten*, 1893.
- [9] 金極天, 丁泰榮, "直四角形板의 振動解析", 大韓造船學會誌, 第14卷 第1號, 1977.