論文 78-15-6-8

積線圖에 의한 回路網函數의 決定

(Determination of Network Function from Product Graph)

金 秀 重,* 李 柱 根**

(Kim, Soo-Joong and Lee, Joo-Keun)

要 約

積線圖에서 Masan의 이득공식의 分子를 구하기 위한 變形된 積線圖를 제안하고 검토하였다. 이 變形된 積線圖는 Barbay의 원래의 積線圖에서 直接 얻어지며, 線形可逆 回路網의 驅動點 函數와 傳達 임피이던스 또는 어드미턴스를 구하는데 利用 될 수 있다.

Abstract

In order to find numerators of Mason's gain formula from a product graph, we proposed and investigated a modified product graph, which is obtained directly from Barbay's original product graph. This graph can be used to obtain the driving point function and the transfer impedance or admittance in a reciprocal network.

序 論

Barbay등이 처음으로 제안한 積線圖(product graph)는 信號流線圖(signal flow graph)의 한 變形으로 Mason의 이득 공식[2])

$$M=\frac{\Sigma \Delta_i M_i}{\Delta} \quad (1)$$

에서 分母(만을 구하는데 이용되는 線圖이다.[1]) 이는 線形可逆 回路網에만 적용 될 수 있었고 非可逆 回路網에 대한 積線圖도 근래에 제안 되었으며[3]) 積線圖를 기초로 해서 積行列을 정의하고 그에 의한 利得公式이 발표되었다[4]).

그러나 Mason의 공식의 分子를 구하는데 필요한 積線圖가 아직 제안되지 못하였으므로 本 論文에서는 線形可逆 回路網에 대한 여러 가지 回路網函數를 Mason의 公式을 써서 표현 할 경우의 分子를 구하는 변형된 積線圖를 제안하고 사용 방법을 설명하였다.

1. 本 論

回路網 函數를 位相 數學的으로 구하면 電流源을 接合入口(solder entry)에 印加 할 때

구동점 임피이던스;

$$Z_{kk}=\frac{\Sigma[N_{sk}\text{의 } TYP]}{\Sigma[N\text{의 } TYP]} \quad (2)$$

전달 임피이던스;

$$Z_{kl}=\frac{\Sigma(\pm)[N_{sk}\text{와 } N_{sl}\text{의 } CTYP]}{\Sigma[N\ TYP]} \quad (3)$$

와 電壓源을 切斷 入口(plier entry)에 印加 할 때

구동점 어드미턴스;

$$Y_{kk}=\frac{\Sigma[N_{ok}\text{의 } LZP]}{\Sigma[N\text{의 } LZP]} \quad (4)$$

전달 어드미턴스;

$$Y_{kl}=\frac{\Sigma(\pm)[N_{ok}\text{와 } N_{ol}\text{의 } CLZP]}{\Sigma\ [N\text{의 } LZP]} \quad (5)$$

단, (±)符號는 方向性 線圖에서 결정 됨.

N: 주어진 回路網

N_{sk}: 전류원이 접합 된 가지 k를 단락한 回路網

N_{ok}: 전압원이 들어간 가지 k를 개방한 回路網

N_{sl}: 구하는 전압이 나타나는 가지 l를 단락한 回路網

N_{ol}: 구하는 전류가 흐르는 가지 l을 개방한 回路網

TYP: 나무가지 어드미턴스 積

LZP: 고리(link) 임피이던스 積

$CTYP$: 공통 나무가지 어드미턴스 積

$CLZP$: 공통 고리 임피이던스 積

*正會員, 慶北大 工大 電子工學科

**正會員 仁荷大 工大 電子工學科

(Dept. of Electronics, Kyungpook National University, and Inha University,)

接受日字: 1978年 10月 6日

로 表現되므로[5)] (2) 및 (3)式과 (1)式을 비교하여 필요한 積線圖를 제안하고 (4)및 (5)式에 필요한 積線圖는 (2) 및 (3)式과의 雙對 性質을 이용하여 확장시키기로 한다.

入力電源이 電流源인 回路網에 대하여 (1)式에 필요한 信號流線圖를 만들려면 그 電流源을 포함하고 있는 가지 k가 나무가지가 되고 구하려는 出力電壓이 나타나는 가지 l도 나무가지가 되도록 특정한 나무를 선정하여야 된다. (2)또는 (3)式의 分母를 선정 된 나무가지 어드미턴스積으로 나누면 同一한 나무로 부터 表現된 (1)式의 分母와 같게 되므로 (1)式의 分子는 (2) 또는 (3)式의 分子를 선정 된 나무가지 어드미턴스積으로 나눈 값과 같게 된다.

(2)式의 分子는 $\Sigma[N_{sk}$의 $TYP]$이므로 각 항이 Y_k를 포함치 않고 있으므로 이들을 선정 된 나무가지 어드미턴스積으로 나누면 모든 項들이 Z_k를 공통으로 갖게 되므로 Z_k를 공통인수로 묶으면 남는 인수의 각 項들은 가지 k를 단락한 회로망의 積線圖에서 얻어지는 量들이 된다.

가지 k를 단락한 回路網의 積線圖는 원래의 積線圖에서 임피이 던스 點 Z_k에 연결 된 모든 線들을 삭제하여 얻게 된다.

(3)式의 分子는 $\Sigma[N_{sk}$와 N_{sl}의 $CTYP]$이므로 $\Sigma[N_{sk}$의 TYP와 ΣN_{sl}의 $TYP]$중에서 공통으로 存在하는 項들을 추려 뽑은 項들이므로 가지k를 단락한 回路網의 積線圖, 즉 원래의 積線圖에서 임피이던스 點 Z_k에 연결 된 모든 線들을 삭제하여 만들어진 積線圖로 부터 얻어지는 각 項들에 Z_k를 곱한 결과의 項들과 가지 l을 단락한 回路網의 積線圖에서 얻어지는 각 項들에 Z_l을 곱한 결과의 項들 가운데서 공통으로 存在하는 項들을 골라서 合하면 分子가 된다. 符號는 (3)式과 (5)式에서 얻는 원래의 方法으로 결정한다.

따라서 다음과 같은 과정을 거쳐서 回路網 函數를 구하면 된다.

1) 주어진 線形可逆 回路網에서 1개의 나무를 선정한다. 여기량이 電流源(電壓源)이고 出力量이 電壓電流이면 여기량을 포함하고 있는 가지와 出力가지를 모두 나무가지(고리)가 되는 나무를 택하도록 한다.

2) 선정 된 나무에 대하여 Barbay가 제안한 積線圖를 만들고 모든 次數의 loop gain을 구하면 구하는 回路網 函數의 分母가 된다.

3) 앞에서 만든 積線圖에서 여기량을 포함하였던 가지 k에 대응하는 임피이던스點 Z_k(어드미턴스 點 Y_k)에 접속되고 있는 線들을 삭제한 積線圖P_i와 出力가지 l에 대응하는 임피이던스點 (어드미턴스 點 Y_l)에 접속되고 있는 모든 線들을 삭제한 또 다른 積線圖 P_0를 만든다. 구동점 함수를 구하는 경우는 $P_i=P_0$로 1개의 積線圖로 된다.

4) P_i에서 모든 次數의 loop gain을 구하여 $Z_k(Y_k)$를 곱한 결과와 P_0에서 모든 次數의 loop gain을 구하여 $Z_l(Y_l)$을 곱한 결과를 비교하여 同時에 포함 된 項들을 골라서 合하면 구하는 回路網 函數의 分子가 된다. 이들은 P_i에서 項들을 얻을 때 $Z_l(Y_l)$을 포함한 것들만 취하고 P_0에서는 $Z_k(Y_k)$을 포함하고 있는 項들만 취하여 비교하여 同一 項을 골라도 같은 결과로 된다.

5) 符號는 여기량과 出力까지 사이에 한 傳送線路에 따라 여기량에 의한 出力가지의 電流와 電壓의 방향이 일치되면(+), 그렇지 않으면 (−)를 택하면 된다.

2. 例 題

그림 1과 같은 回路網에서 驅動點 임피이던스 $Z_{11}=v_1/I_{s1}$와 傳達 임피이던스 $Z_{15}=v_5/I_{s1}$을 구하기로 한다.

가지 1에 電流源이 있고 出力가지가 1 또는 5이므로 가지 1과 5를 포함한 나무 1345를 그림 2와 같이 택한다. 임피이던스點 Z_1, Z_3, Z_4 및 Z_5와 어드미턴스點 Y_2, Y_6 및 Y_7을 적고 積線圖를 그리면 그림

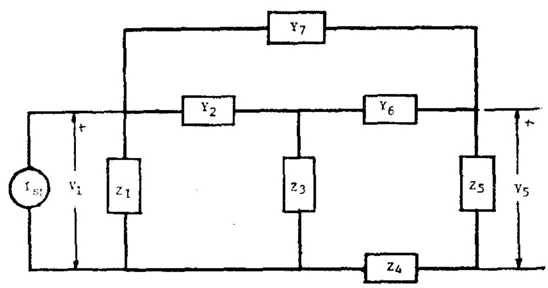

그림 1. 例題의 回路網 N
Fig. 1. Network N of example.

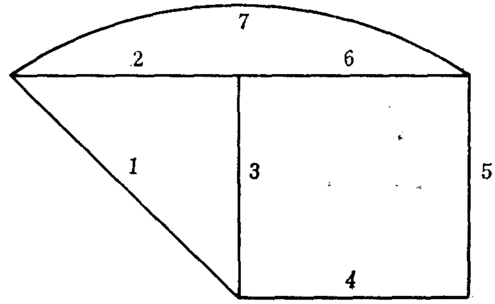

그림 2. 線圖와 나무 1345
Fig. 2. Graph and Tree 1345.

3과 같다. 그림 3에서 모든 次數의 loop gain을 구하면 표 1과 같이 되고 이 모든 값을 合하면 구하는 回路網 函數의 分母가 된다.

표 1. 모든 次數의 loop gain

0 order	1
1st order	Z_1Y_2, Z_1Y_7, Z_3Y_2, Z_3Y_6, Z_4Y_6, Z_4Y_7, Z_5Y_6, Z_5Y_7
2nd order	$Z_1Y_2Z_3Y_6$, $Z_1Y_2Z_4Y_6$, $Z_1Y_2Z_4Y_7$, $Z_1Y_2Z_5Y_6$, $Z_1Y_2Z_5Y_7$, $Z_1Y_7Z_3Y_2$, $Z_1Y_7Z_3Y_6$, $Z_1Y_7Z_4Y_6$, $Z_1Y_7Z_5Y_6$, $Z_3Y_2Z_4Y_6$, $Z_3Y_2Z_4Y_7$, $Z_3Y_2Z_5Y_6$, $Z_3Y_2Z_5Y_7$, $Z_3Y_6Z_4Y_7$, $Z_3Y_6Z_5Y_7$,

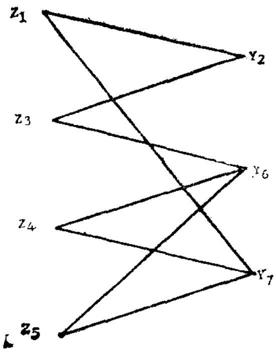

그림 3. 주어진 回路網의 積線圖
Fig. 3. Product graph of the network.

그림 3에서 電流源 I_{s1}이 포함 되었던 가지 1에 대응하는 임피이던스 點 Z_1에 연결 된 모든 線들을 삭제하면 그림 4와 같은 積線圖 P_i가 되고 출력가지 5에 대응되는 임피이던스 點 Z_5에 연결 된 모든 線들을 제외하면 그림 5의 積線圖 P_0가 된다.

그림 4에서 모든 次數의 loop gain을 구하면 표 2와 같다. 표 2의 모든 loop gain에 Z_1을 곱하여 더하면 驅動點 임피이던스 Z_{11}의 分子가 된다.

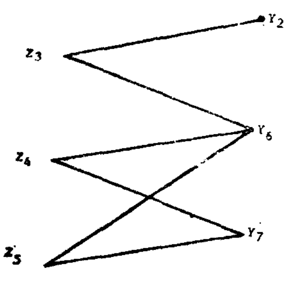

그림 4. 積線圖 P_i
Fig. 4. Product graph P_i.

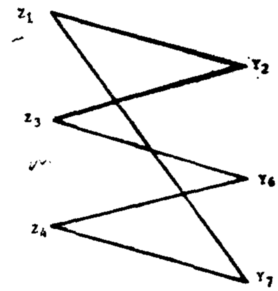

그림 5. 積線圖 P_0
Fig. 5. Product graph P_0.

표 2. P_i의 loop gain

0 order	1
1st order	Z_3Y_2, Z_3Y_6, Z_4Y_7, Z_5Y_6, Z_5Y_7
2nd order	$Z_3Y_2Z_4Y_6$, Z_4Y_6, $Z_3Y_2Z_4Y_7$, $Z_3Y_2Z_5Y_6$, $Z_3Y_2Z_5Y_7$, $Z_3Y_6Z_4Y_7$, $Z_3Y_6Z_5Y_7$

그림 4에서 출력가지 임피이던스 Z_5를 포함하는 loop gain을 구하고 그림 5에서 電流源을 포함한 가지 임피이던스 Z_1을 포함하는 loop gain을 구하면 표 3과 같다.

표 3. Z_5 또는 Z_1을 포함하는 loop gain

구 분	P_i의 loop gain	P_0 loop gain
0 order	0	0
1st order	Z_5Y_6, Z_5Y_7,	Z_1Y_2, Z_1Y_7,
2nd order	$Z_3Y_2Z_5Y_6$, $Z_3Y_2Z_5Y_7$, $Z_3Y_6Z_5Y_7$,	$Z_1Y_2Z_3Y_6$, $Z_1Y_2Z_4Y_6$, $Z_1Y_2Z_4Y_7$, $Z_1Y_7Z_3Y_2$, $Z_1Y_7Z_3Y_6$, $Z_1Y_7Z_4Y_6$,

따라서 P_i의 loop gain에 Z_1을 곱하고 P_0의 loop gain에 Z_5를 곱하여 공통項을 추리면 $Z_1Z_5Y_7$, $Z_1Y_2Z_3Z_5Y_6$, $Z_1Y_2Z_3Z_5Y_7$ 및 $Z_1Z_3Z_5Y_6Y_7$이고 이들의 合이 구하는 傳達函數의 分子가 된다. 이상에 의하여 Z_{11}과 Z_{15}를 구하면 다음과 같고 Z_{51}의 符號도 (+)가 된다.

$$Z_{11}=\frac{\begin{aligned}(&Z_1+Z_1Z_3Y_2+Z_1Z_3Y_6+Z_1Z_4Y_6+Z_1Z_4Y_7\\&+Z_1Z_5Y_6+Z_1Z_5Y_7+Z_1Z_3Y_2Z_4Y_6+Z_1Z_3Y_2Z_4Y_7\\&+Z_1Z_3Y_2Z_5Y_6+Z_1Z_3Y_2Z_5Y_7+Z_1Z_3Y_6Z_4Y_7\\&+Z_1Z_3Y_6Z_5Y_7)\end{aligned}}{\begin{aligned}(&1+Z_1Y_2+Z_1Y_7+Z_3Y_2+Z_3Y_6+Z_4Y_6+Z_4Y_7\\&+Z_5Y_6+Z_5Y_7+Z_1Y_2Z_3Y_6+Z_1Y_2Z_4Y_6\\&+Z_1Y_7Z_3Y_2+Z_1Y_7Z_3Y_6+Z_1Y_2Z_4Y_7+Z_1Y_2Z_5Y_6\\&+Z_1Y_7Z_4Y_6+Z_1Y_7Z_5Y_6+Z_3Y_2Z_4Y_6+Z_3Y_2Z_4Y_7\\&+Z_3Y_2Z_5Y_6+Z_3Y_2Z_5Y_7+Z_3Y_6Z_4Y_7+Z_3Y_6Z_5Y_7)\end{aligned}}$$

$$Z_{51}=\frac{\begin{aligned}(&Z_1Z_5Y_7+Z_1Y_2Z_3Z_5Y_6+Z_1Y_2Z_3Z_5Y_7\\&+Z_1Z_3Z_5Y_6Y_7)\end{aligned}}{\begin{aligned}(&1+Z_1Y_2+Z_1Y_7+Z_3Y_2+Z_3Y_6+Z_4Y_6+Z_4Y_7\\&+Z_5Y_6+Z_5Y_7+Z_1Y_2Z_3Y_6+Z_1Y_2Z_4Y_6\\&+Z_1Y_2Z_4Y_7+Z_1Y_2Z_5Y_6+Z_1Y_2Z_5Y_7+Z_1Y_7Z_3Y_6\\&+Z_1Y_7Z_4Y_6+Z_1Y_7Z_5Y_6+Z_3Y_2Z_4Y_6+Z_3Y_2Z_4Y_7\\&+Z_3Y_2Z_5Y_6+Z_3Y_2Z_5Y_7+Z_3Y_6Z_4Y_7+Z_3Y_6Z_5Y_7)\end{aligned}}$$

Z_{51}을 구하는 方法을 信號流線圖와 비교해 보기 위하여 대응하는 信號流線圖인 그림 6으로부터 $\sum_i M_i\Delta_i$를 구하면

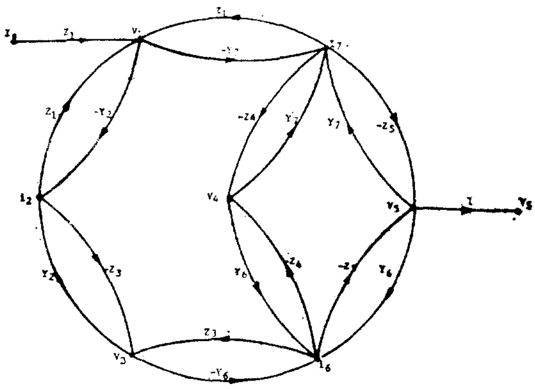

그림 6. 전달함수를 위한 信號流線圖

Fig. 6. Signal flow graph for the transfer function.

$M_1=-Z_1Y_2Z_3Y_6Z_4Y_7Z_5,\ \Delta_1=1$

$M_2=Z_1Y_2Z_3Y_6Z_5,\ \Delta_2=1+Z_4Y_7$

$M_3=Z_1Y_7Z_5,\ \Delta_3=1+Y_2Z_3+Y_3Z_6+Z_4Y_6+Y_2Z_3Z_4Y_6$

$M_4=-Z_1Y_7Z_4Y_6Z_5,\ \Delta_4=1+Y_2Z_3$

$\therefore\ \Sigma M_i\Delta_i=Z_1Y_2Z_3Z_5Y_6+Z_1Z_5Y_7+Z_1Y_2Z_3Z_5Y_7$
$\quad+Z_1Z_3Z_5Y_6Y_7$

으로 같은 결과가 되지만 모두 10개의 項중에 계산과정에서 상쇄되는 項들의 처리등 복잡성이 있음을 알 수 있다.

3. 結 論

Mason의 公式의 分子를 위한 積線圖가 만들어졌다. 이는 分母를 위한 積線圖에서 直接 구해지는 것으로 線圖理論에 의한 回路網 函數를 구할 때는 경우에 따라 入力가지와 出力가지들을 短絡 또는 開放한 回路網을 만들어야 되나 이 積線圖에서는 다만 入力가지와 出力가지에 연결 된 線들을 各各 제거하는 方法으로 이루어진다. 傳達函數의 符號의 결정이 回路網의 物理的 性質에 의해, 즉 가지 k의 전류 方向과 가지 l의 전류 方向이 한 전송선로를 따라 반대方向인가 또는 일치 하는가에 의해 이루어졌으나 非可逆回路網으로 확장할 때 얻어지는 電流積線圖와 電壓積線圖의 개념으로 확장하면 一般的으로 符號도 결정될 것이다.

電流傳達比 또는 電壓傳達比를 구하는데는 여기서 제안된 方法이 直接 적용될 수 없으나 傳達 임피이던스나 어드미턴스를 먼저 구하고 대응하는 量을 얻기 위해 출력가지 임피이던스 또는 어드미턴스로 나누어서 간접적으로 구하면 된다.

參 考 文 獻

1. J.E. Barbay, G.W. Lago and R.W. Reck "Product Graph", Prorceedings of 15th Symposium on Circuit Theory, Univ. of Missori, 1972.
2. S.J. Mason and H.J. Zimmerman, "Electronic Circuit, Signal and System", John Wiley and Sons, 1960.
3. 金秀重 "能動과／또는 結合性 回路網의 積線圖," 大韓電子工學會誌, 제14권, 제 5호, 1977. 12月.
4. 이병기 "The Product Matrix and a New Gain Formula for Reciprocal Network Based on Product Matrix", 경북대학교 석사 논문 Feb., 1977.
5. J.B. Murdoch, "Network Theory", chap.6, McGraw-Hill, 1970.