

最小自乘法을 適用한 Townsend法의 解析

論 文

27~2~3

The Analysis of Townsend Equation based on Linealized Least Squares Method

白 龍 鉉* 河 聖 哲**
(Yong Hyun Baick, Sung Chul Ha)

Abstract

There have been a number of experimental or theoretical investigations of transport coefficient for electrons in the field of gas.

In this paper the authors present the method by which Townsend first ionization coefficient (α) or attachment coefficient (η) can be deduced easily and precisely by means of analyzing Townsend equation based on linealized least squares method.

The apparent ionization coefficient $(\alpha-\eta)/p$ have been analyzed from the experimental data by applying the new method above mentioned.

And the values of $(\alpha-\eta)/p$ in SF₆ as a function of E/p were agreement with the values measured by Bhalla et al. who analyzed th experimental pre-breakdown currents.

In the same way $(\alpha-\eta)/p$ in N₂O had a same tendency to that of Folkard et al.

1. 緒 論

기체의 輸送係數는 각종氣體放電의 定電의 解析을 하는데 있어서 중요한 파라미터이다. 금세기초 Townsend에 의해서 電界가 印加된 기체중을 흐르는 전류의 增殖現象의 精確한 해석을 하는데 있어서 α (一次電離係數) 및 γ (二次電離係數)를 써서 행해져왔고 α, γ 가 파라미터 E/p 와 $\alpha/p=f(E/p)$ $\gamma=\phi(E/p)$ 의 관계라는 것이 실증된 이래 여러 측정방법에 의해서 전자 아바란체의 특성을 표현하는 중요한 輸送係數로서 關聯되어왔고 또는 전자 이온 분자간의 衝突過程의 이론해석으로도 구해져 왔다.

특히, 附着現象이 존재하는 負性氣體에 있어서는 定常法⁽¹⁾에 의해서 關聯된 電流-電極間隙長($I-d$) 특성으로부터 직접一次電離係數 α , 附着係數 η 등을 구하는 방법으로써 Townsend의 方法이 널리 사용되어왔다. 이방법은 Townsend의 電流成長式을 기초로하여 (I/I_0-d) 특성을 만족시키는 任意의 2點에서 關聯치(I_1d_1), (I_2d_2)의 좌표를 기본으로하여 Townsend의 理論式中

의 未知數 α, η 등을 결정짓는 補間法인데 觀測誤差를 없앨수가 없으므로 2點을 선택하는 방법에 따라서 구하는 α, η 등이 크게 散在되는 結果가 있다.

특히 I_0 (전자의 에너지分布가 平衡을 이룰때의 初期電流)를 실험에 의해서 결정짓는 자체가 곤란하다.

따라서 本論文에서는 α, η 등을 精確하게 간단히 구할 수 있는 방법으로써 Townsend의 電流成長式을 變換시킨후 그 측정결과에 最小自乘法을 適用시키는 方法을 解析하였고 또한 SF₆, N₂O에 대해서 暗流의 空間成長을 측정하여 筆者가 제안한 方法에 의하여 測定이 困難한 I_0 를 導入하지않고 有效電流係數 $(\alpha-\eta)p$ 를 구하였다.

그 결과 有效電離係數는 SF₆에 있어서는 Bhalla & Craggs⁽²⁾의 측정치 또 N₂O에 있어서는 Folkard & Haydon⁽³⁾의 측정치와 거의 一致한 값을 나타냈다.

2. 解 析

2-1 Townsend法

α, η, γ 作用을 포함하는 電流成長式은 다음式으로 주어진다.⁽⁴⁾

$$\frac{I}{I_0} = \left\{ \frac{\alpha}{\alpha-\eta} \exp[(\alpha-\eta)d] - \frac{\eta}{\alpha-\eta} \right\} //$$

*正會員: 仁荷大 工大教授 · 工博(當學會調查理事)

**正會員: 大林工專 電氣科 專任講師

接受日字: 1978年 2月10日

$$\left(1 - \frac{\gamma\alpha}{\alpha - \gamma} [\exp(\alpha - \eta) d] - 1 \right) \quad (1.1)$$

여기서 d : 電極의 間隙長

I : d 에서의 電子電流

I_0 : 電子에너지分布가 平衡을 이루어 電離를 開始할 때의 電子電流(初期電流)

따라서 希有가스등 附着作用을 갖지않는 다고 생각되는 기체중에서는

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\exp(\alpha d)}{1 - \gamma[\exp(\alpha d) - 1]} \quad (1.2)$$

또 SF₆ 등 二次電離係數가 극히 적은 기체중에서는 다음식이 성립한다고 생각된다.

$$\frac{I}{I_0} = \left[\frac{d}{\alpha - \eta} \exp\{(\alpha - \eta)d\} - \frac{\eta}{\alpha - \eta} \right] \quad (1.3)$$

(i) $\eta=0$ 의 경우

α : $\gamma=0$ 의 領域

$$\alpha = \frac{1}{d} \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad (1.4)$$

γ : $I/I_0 - d$ 의 特性이 직선에서 벗어나는 領域

$$\gamma = \frac{(I/I_0) - \exp(\alpha d)}{(I/I_0)\{\exp(\alpha d) - 1\}} \quad (1.5)$$

(ii) $\gamma=0$ 의 경우(N. Sukhum의 方法⁽⁶⁾)

(1.3)式을 $a \equiv \alpha/\eta$ 로 變形 (I_1, d_1)에 대해서는

$$\eta = \frac{1}{(a-1)d_1} \ln\left\{ \frac{(a-1)(I_1/I_0) + 1}{a} \right\} \quad (1.6)$$

마찬가지로, (I_2, d_2)에 대해서도

$$\eta = \frac{1}{(a-1)d_2} \ln\left\{ \frac{(a-1)(I_2/I_0) + 1}{a} \right\} \quad (1.7)$$

(1.6, 7)式에서 $d_1/d_2 \equiv \delta$, $I_1/I_0 \equiv b$, $I_2 I_0 \equiv c$ 라하면

$$\text{또는 } \frac{(a-1)b+1}{a} = \left(\frac{(a-1)c+1}{a} \right)^\delta \quad (1.8)$$

$$\frac{(a-1)b+1}{a} - \left(\frac{(a-1)c+1}{a} \right)^\delta = 0 \equiv F(a) \quad (1.9)$$

(1.9)式에서 $\delta=1/2$ 가 되도록 d_1, d_2 를 선택하면

$$\text{따라서 } \left(\frac{(a-1)b+1}{a} \right)^2 = \frac{(a-1)c+1}{a} \quad (1.10)$$

$$a \equiv \frac{\alpha}{\eta} = \frac{(b-1)^2}{b^2 - c} = \frac{[(I_1/I_0)^2 - 1]^2}{(I_1/I_0)^2 - (I_2/I_0)} \quad (1.11)$$

(1.11)의 a 를 (1.6) 또는 (1.7)式에 代入하여 η 가 구해지고, 다시 (1.11)式에서 α 가 구해진다.

2-2 本論文의 解析

(i) $\eta=0$ 의 경우

(1.2)式에서 電極間隙 d 를 等差級數의 으로 취하여, 그 項差를 h 라하면, (1.2)式은 어느 間隙 d_i 에 대하여 (그림 1)

$$\left(\frac{I}{I_0} \right)_i = \frac{\exp(\alpha d_i)}{1 - \gamma[\exp(\alpha d_i) - 1]} \quad (2.1)$$

$$= \frac{1}{(1 + \gamma)\exp(\alpha d_i) - \gamma} \quad (2.1)$$

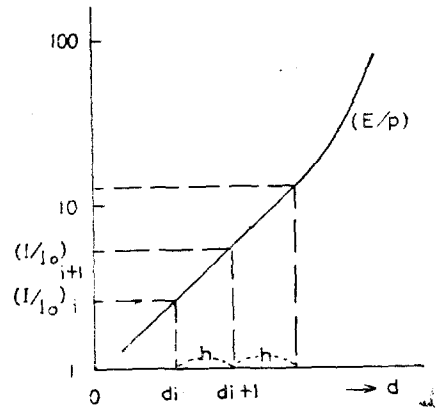


그림 1. 空間電流成長의 典型例

Fig. 1. Typical examples of spatial current growth.

또, $d = d_i + 1 = d + h$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \left(\frac{I}{I_0} \right)_{i+1} &= \frac{1}{(1 + \gamma)\exp[-\alpha(d_i + h)] - \gamma} \\ &= \frac{1}{\exp(-\alpha h)\{(1 + \gamma)\exp(1 - \alpha d_i) - \gamma\}} \\ &= \frac{1}{-\gamma\{\exp(-\alpha h) - 1\}} \\ &= \frac{1}{\{\exp(-\alpha h)/(I/I_0)_i + \gamma\{\exp(-\alpha h) - 1\}}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

따라서

$$\begin{aligned} \left(\frac{I}{I_0} \right)_i &= \exp(-\alpha h) \cdot \left(\frac{I}{I_0} \right)_{i+1} + \left(\frac{I}{I_0} \right)_i \cdot \left(\frac{I}{I_0} \right)_{i+1} \\ &\quad \cdot \gamma\{\exp(-\alpha h) - 1\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

또는

$$\begin{aligned} \left(\frac{I}{I_0} \right)_i / \left(\frac{I}{I_0} \right)_{i+1} &= \exp(-\alpha h) + \left(\frac{I}{I_0} \right)_i \\ &\quad \cdot \gamma\{\exp(1 - \alpha h) - 1\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

여기서

$$\begin{aligned} \left(\frac{I}{I_0} \right)_i \cdot \left(\frac{I}{I_0} \right)_{i+1} &\equiv Y_i, \quad \left(\frac{I}{I_0} \right)_i \equiv X_i, \quad \exp(-\alpha h) \\ &\equiv A, \quad \gamma\{\exp(-\alpha h) - 1\} \equiv B \end{aligned}$$

라하면, (2.4)式은 결국 直線으로 표시할 수 있으므로

$$Y_i = A + BX_i \quad (2.5)$$

가 된다. 따라서 測定值들 (X_i, Y_i)로 변환시킨후, 그 결과에다 最小自乘法을 適用시켜, (2.5)式의 係數 A, B 를 결정하면 그값에서

$$\exp(-\alpha h) = A, \quad \gamma\{\exp(\alpha h) - 1\} = \gamma(A - 1) = B$$

를 써서 α, γ 가 구해진다.

(ii) $\gamma=0$ 의 경우

(1.3)式에서 $\alpha - \eta \equiv a$, $\eta/\alpha \equiv b$ 라 놓으면

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{1-b} \cdot \exp(ad) - \frac{b}{1-b} \quad (2.6)$$

다시 電極間隙을 等差級數의 으로 취하여, 그 項差를 h 라 하면

$$\left(\frac{I}{I_0}\right)_i = \frac{1}{1-b} \exp(adi) - \frac{b}{1-b} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{I}{I_0}\right)_{i+1} &= \frac{1}{1-b} \exp[a(di+h)] - \frac{b}{1-b} \\ &= \exp(ah) \cdot \left(\frac{I}{I_0}\right)_i + \frac{b}{1-b} [\exp(ah) - 1] \end{aligned} \quad (2.8)$$

여기서 $\left(\frac{I}{I_0}\right)_{i+1} \equiv Y_i$, $\left(\frac{I}{I_0}\right)_i \equiv X_i$,

$$\exp(ah) \equiv B, \quad \frac{b}{1-b} [\exp(ah) - 1] \equiv A$$

라 놓으면 (2.8)式은

$$Y_i = A + BX_i \quad (2.9)$$

以下 (i)과 마찬가지로 係數 A, B 를 決定하면 (a, b)가 구해지고, 또한 (α, η)가 구해진다.

또, (2.9)式은 $a=0$ 즉 $\alpha=\eta$ 일때 傾斜 $B=1$ 를 갖는다. 그리고 傾斜 B 가 1보다 적을때 一次電離係數 α 는 附着係數 η 보다 적어지고, 傾斜 B 가 1보다 큰 E/p 에서는 α 가 η 보다 커진다(그림 2).

3. 實驗裝置 및 方法

그림 1은 stainless 제품으로 된 放電管의 概略圖이다.

兩電極基板는 최대외경 80mm의 Harrison 形狀이고(9) 鏡面과 같이 연마한 stainless 금속인데, 특히 음극은

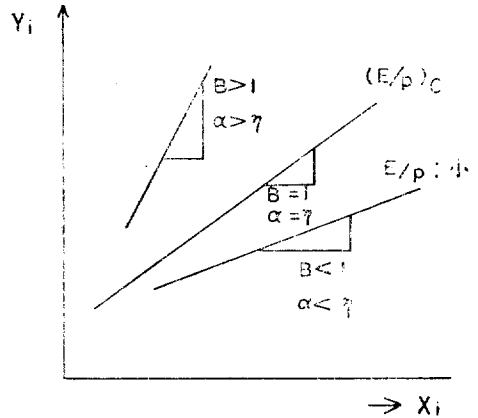


그림 2. 線形化시킨 典型例

Fig. 2. Typical examples of linealized results.

그 중앙부에 직경 25mm의 溶融石英板을 박아넣은 構造이고 양전극표면을 두께 약 1000Å의 金으로 蒸着시켰다. 초기의 光電子流의 공급은 陰極背後의 石英窓(그림 3의 (2))을 통해서 자외선을 음극 중앙부 석영판에 입힌 金蒸着膜에 照射시키는 방법을 썼고 照射面積을 변화시킴으로서 초기 光電子流는 $10^{-13} \sim 10^{-9}$ (A) 범위의 임의의 값을 취할 수가 있다. 또한 紫外線源으로서는 直流點燈의 저압수는 lamp를 사용하였다.

이 初期電子供給方法은, 종래와 같이 陽極孔으로부터 자외선을 照射시켰을때 電極間隙이 極히 짧은 경우에 陽極孔이 존재함으로써 생기는 電界의 不平等性과 또 陽極孔을 통과하는 자외선 때문에 陽極孔 근방에서 생기는 광전자방출等, 결점이 있었는데 비하여 이러한

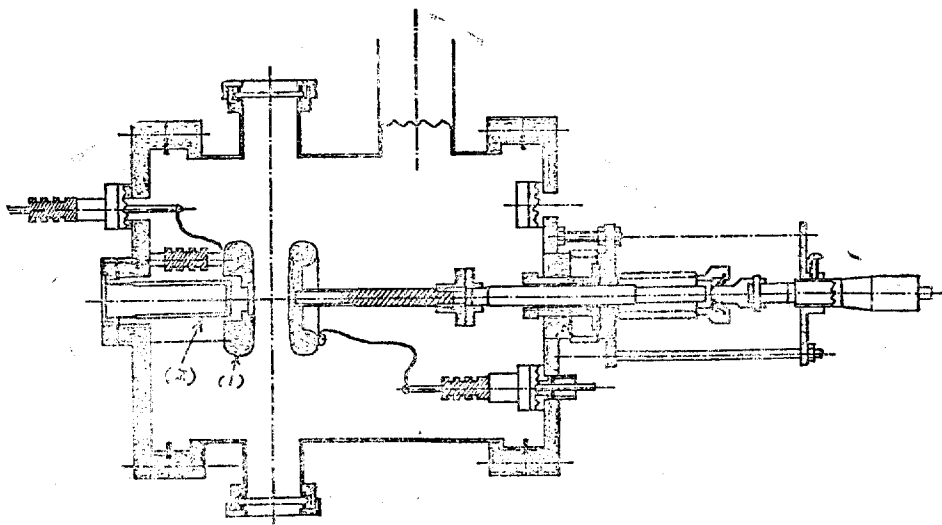


그림 3. 放電管의 概略圖

Fig. 3. The Cross-Section of the ionization chamber

공급방법을 채용함으로써 順逆方向의 진공전류의 比를 70 : 1 程度도까지도 크게 할 수 있다는 이점을 갖고 있는 것이 특징이다.¹⁰⁾

電極間隔이 調整은 micrometer를 사용하여 陽極을 驅動시키고 그 程度는 1/100(mm)이다. 또 기체의 압력 측정은 직경 15mm인 유리관의 oil manometer(silicon 油入)의 油面差를 이동현미경으로 측정하였고 그 程度는 1/100(mm)이다.

전압은 극히 안정된 高壓直電流源(Kawaguchi, Model V-710)에서 공급하고 그 측정은 digital 電壓計(Takeda Riken, XR-6011)를 사용하였다. 또 전류 측정은 진동용량형 미소전류계(Kawaguchi, MMA II 17)를 사용하였고 그 정도는 $\pm 2\%$ 이내이다. 排氣系統의 到達 眞空度는 2×10^{-7} (Torr)이고, leak速度는 1×10^{-6} (Torr/min)이하이다.

본 연구에 있어서는 SF₆, N₂O 두종류의 기체에 대하여 電流-間隔長 特性을 일정기압 p하에서 E/p를 일정하게 유지시키면서 電壓間隔長을 0.1mm에서 2.02mm까지 $h = \Delta d = 0.04$ cm 間隔으로 변화시켜 측정하였다.

4. 實驗結果 및 考察

4-1 SF₆에 대하여

SF₆의 電流成長의 대표적 측정예를 畵측을 間隔 d

縱軸은 초기전류 I₀로 規格化해서 E/p를 파라미터로 하여 그린것이 그림 4이다. SF₆는 附着係數가 크기 때문에 凸형의 곡선을 이루고있는데 특히 전극간격이 작은 영역에서 E/p가 낮은것이 높은것보다 측정치의 Plot가 직선으로 되지않는 현상을 볼수있는데 이 현상에 대해서는 차기에 論하기로 한다.

그림 5는 E/p를 파라미터로 하여 線形化시킨 그림인데 측정치가 확실히 직선이된다고 생각되는 범위에 最小自乘法을 適用시켜 (2.9)式에 의하여 有效電離係數(α-η)/p를 산출하였다. 그림이 복잡해지는 것을 방지하기위하여 plot는 縱軸의 切片의 값을 적당히 변경시켜 平行이동 시켰다. E/p가 증가함에 따라서 그 傾斜도 커진다.

즉 E/p=110[V/cm·Torr]에서는 확실히 傾斜 B가 1보다 작고, E/p=130[V/cm·Torr]에서는 커진다. 또 E/p=120[L/cm·Torr]에서는 B는 거의 1과같다. 이때 α/p=η/p가 成立하고 靜破壞條件에 가깝다는 것을 알게된다.

또 SF₆등 二次電離係數가 극히적은 기체중에서는 α, η係數값을 포함하는 電流成長(1.3)에서 다음과같은 세가지 큰 假定이 포함된다고 생각된다.

- (1) 음극에서의 二次電離를 무시한다.
- (2) 방전공간에서 생긴負이온은 安定되었고 이負이

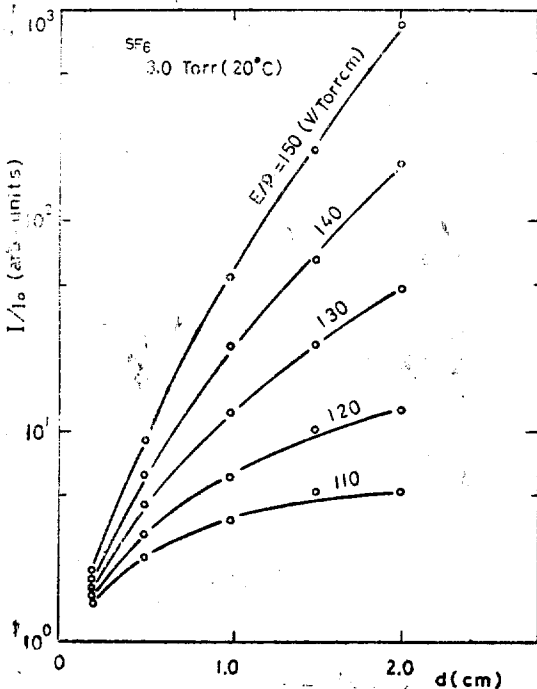


그림 4. SF₆의 空間電流成長의 測定例
Fig. 4. Experimental spatial current growth in SF₆

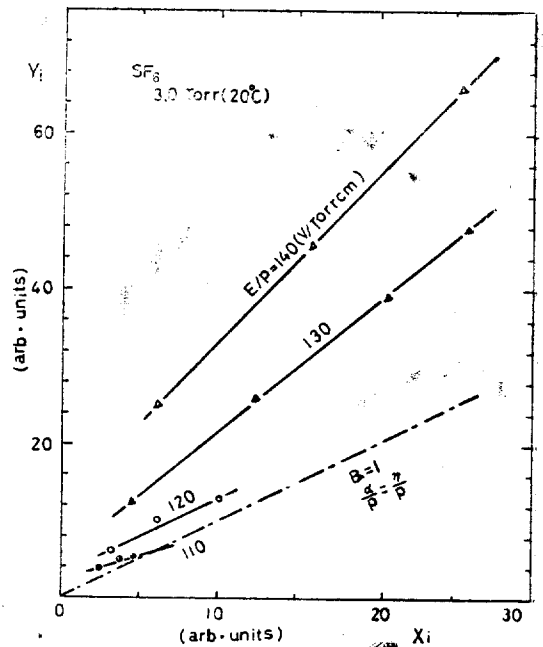


그림 5. SF₆의 電流成長의 線形化例
Fig. 5. Linealized experimental current growth in SF₆

에서 또다시 電子가 離脫되어 自由電子가 되어 충돌 전리작용을 行하지 않는다.

(3) 電離, 附着과정이 完全히 平衡상태에 놓여져 있을 때이다.

따라서 本論文의 方法을 使用하여 전류성장과정을 선형화 하려면 上記 3가지 假定을 만족할 필요가 있다 逆으로 말하면 이 세가지 假定중 어느하나가 만족되지 않아도 plot은 直線에서 이탈될것이 예상된다. 특히 두번째의 전자離脫 문제는 방전현상에 있어서 특히 중요한 문제라고 생각된다.

따라서 本실험의 목적의 하나도 plot가 직선부터 이탈되는것에 대한 검토도 포함되어 있다고 말할 수 있다.

다음 SF₆의 有效係數 측정치를 他者の 값과 같이 그림 6에 표시하였다. 本실험의 결과는 Bhalla Craggs의 測定値와 거의 一致하였다.

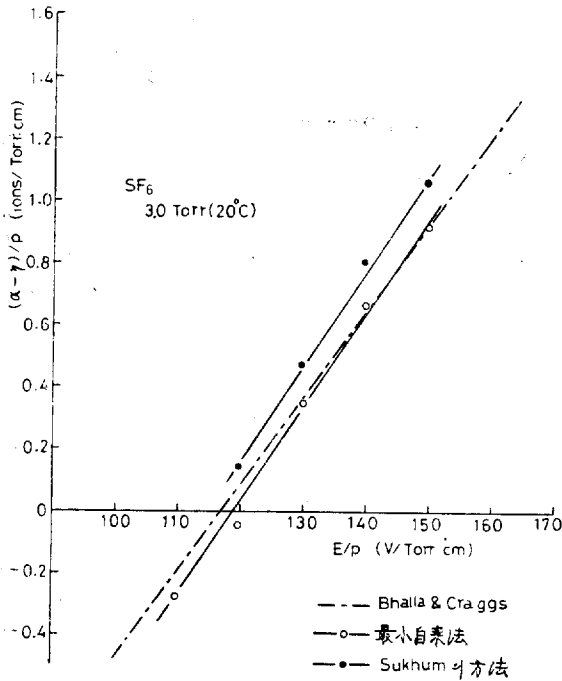


그림 6. SF₆의 E/p에 對한 (α-η)/p

Fig. 6. Values of (α-η)/p as a function of E/p

4.2 N₂O에 대하여

N₂O의 電流成長의 대표적 측정예를 E/P를 파라미터로 하여 그림 7에 표시하였다. 그림 8은 그림 7의 (I,d) 특성을 線形化시킨 그림이고 그림이 복잡해 지는것을 방지하기 위하여 縱軸을 적당히 平行移動시켰다.

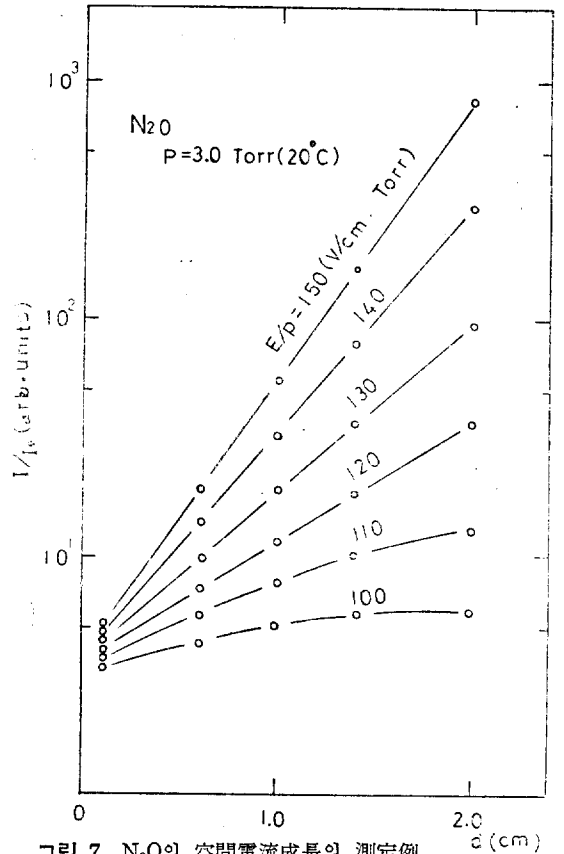


그림 7. N₂O의 空間電流成長의 測定例

Fig. 7. Experimental spatial current growth in N₂O

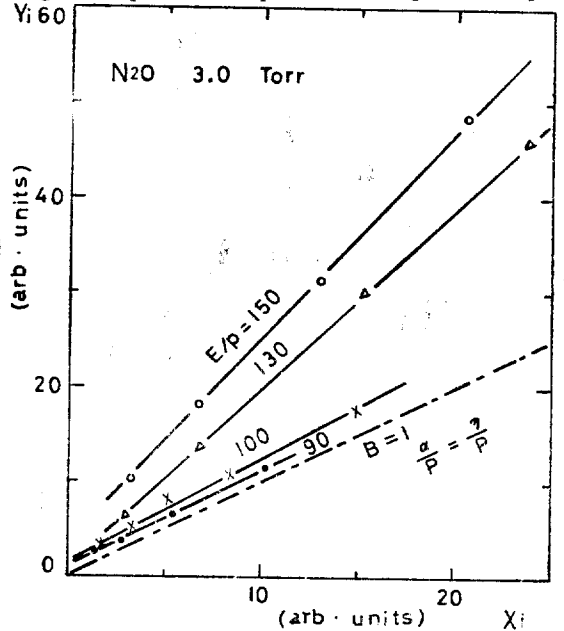


그림 8. N₂O의 電流成長의 線形化例

Fig. 8. Linearized experimental current growth in N₂O

그림 7에서 알수있는 바와같이 그림 4의 SF₆의 電流成長보다는 直線的인 특성을 표시하고 있는 것을 알 수 있다. 이것은 N₂O도 附着作用이 크다고는 하지만 SF₆보다는 附着作用이 약하다는 것을 意味한다. 또한 그림 7에서 알수 있는 바와같이 γ 는 N₂O기체에 있어서 적다. 그 理由は 電離電壓이 N₂보다 낮은데 이들 기체분자가 電極에 吸着됨으로써 기인되는 일函數의 증가로 γ 작용이 변화되어 γ 가 적어 진다고 생각된다.

또 그림 8에 있어서도 SF₆와 마찬가지로 γ 작용의 영향은 E/p 가 높고 電極間隔이 큰 領域에서는 관측되지 않지만 E/p 가 낮고 電極間隔이 작은 領域에서는 測定值가 直線으로부터 離脫되는 현상이 나타난다. 이것에 대해서는 次期에 論하기로 하고 前項과 마찬가지로 最小自乘法을 적용시켜 얻은 有效電離係數의 값을 그림 9에 표시하였는데 Folkard & Haydon의 측정치와 거의 一致하였다.

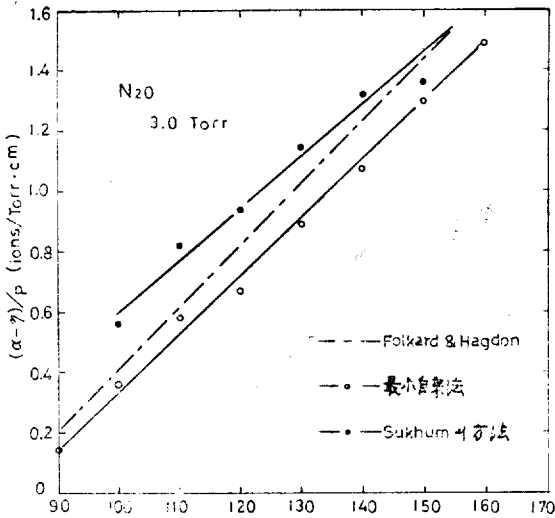


그림 9. N₂O의 E/p 에 對한 $(\alpha - \eta)/p$
 Fig. 9. Values of $(\alpha - \eta)/p_0$ as a function of E/P

5. 結 論

本 論文에서 筆者는

(1) SF₆, N₂O기체의 輸送係數 α, η 등을 精確하게 간 단히 구할 수 있는 方法으로써 Townsend의 電流成長式을 線形化시킨후 最小自乘法을 적용시키는 方法을 提案하였다.

(2) 3Torr의 比較적 낮은 壓力下에서 暗流의 空間成長을 觀측하여 筆者가 제안한 線形化 最小自乘法에 의 해서 이것을 解析하여 SF₆, N₂O기체의 有效電離係數 $(\alpha - \eta)/p$ 을 구하였다.

(3) 線形化 最小自乘法으로 解析한 $(\alpha - \eta)/p$ 는 SF₆에 있어서는 Bhalla & Craggs의 측정치와 거의 一致하였고 N₂O에 있어서도 Folkard & Haydon의 측정치와 거의 一致하였다.

參. 考 文 獻

- (1) L.B.Lool, Recent Advance in Basic Processes of Gaseous Electronics. Vol. II: Colifornia Univ. (1975)
- (2) M.S. Bhalla, J.D.Craggs, Proc. Phys. Soc. 80. 151 (1962)
- (3) M.A. Falkard, S.C. Haydon, Aust. J. Phys. 23. 847. (1970)
- (4) 中村森, 放電專門委員會 (1970)
- (5) N. Sukhum Brit. J. Appl. Phys. 15. 509 (1964)
- (6) M.A. Harrison, R.Geballe, Phys. Rev. 91. 1 (1953)
- (7) 中村・森, 放電研究會資料(ED-74-12) (1974)
- (8) 日本電氣學會, 放電 Hand book (1974)
- (9) J.S. Pearson, J.A. Harrison, J. Phys. D. 2. 77 (1969)
- (10) D.W. Swan; Nature 190,904 (1961)