大韓機械学会 論文集 第 2 巻 第 3·4 號 pp. 62~68, 1978

<論　文>

Timoshenko 보의 振動에 미치는 軸方向慣性力의 영향에 관하여

李　楽　周*

(1978年 10月 15日 接受)

Effects of the Longitudinal Inertia Force on Timoshenko Beam Vibration

Nack-Joo Lee

Abstract

The influences of the large amplitude free vibrations of simply supported Timoshenko beams with ends restrained to remain a fixed distance apart and with no axial restraints, which cause a longitudinal elastic force and a longitudinal inertia force, respectively, are investigated. The equations of motion derived by an appropriate linearization of the nonlinear strain-displacement relation have nonlinear terms arising from large curvature, longitudinal elastic force and longitudinal inertia force. The fourth order nonlinear partial differential equations for the deflection, can be reduced to the nonlinear ordinary differential equations by means of Galerkin procedure and a modal expansion. The general response and frequency-amplitude relations are derived by the perturbation method of strained parameters. Comparison with previously published results is made.

1. 緖　論

보의 橫振動에 있어서 非線型問題는 큰 振幅(또는 큰 曲率), 兩端 거리를 一定하게 유지할 때 軸方向으로의 伸長으로 말미암아 誘起되는 軸方向의 弾性力 및 軸方向으로 運動이 自由로울 때의 軸方向의 慣性力 등을 고려함으로써 나타나게 된다. 回轉慣性力이나 剪斷變形을 고려하지 않는 Euler-Bernoulli 보에 있어서 兩端 거리를 一定하게 유지할 때의 큰 振幅으로 말미암은 軸方向 弾性力을 고려함으로써 보의 非線型振動問題가 관심을 끌기 시작하였으며, Woinowsky-Krieger [1], Burgreen [2]을 위시하여 Wah [3], McDonald [4], Srinivasan [5], Evensen [6], Ray & Bert [7], Eisley [8], [9], Dickey [10] 및 李 및 林 [11] 등이 여러 가지 境界條件들의 自由振動에 대하여 Jacobi 楕圓函數, Ritz-Galerkin 法, strained Parameter 法 및 averaging 法 등에 의하여 嚴密解 또는 1項 近似解를 구하였다. 強制振動에 대하여는 Tseng & Dugundji [12] 및 Rehfield [13] 등이 다루었으며, 前者는 減衰가 있는 경우에 支點이 調和運動을 할 때 Galerkin 法과 harmonic balance 法을 適用하였으며, 後者는 減衰를 無視한 보가 分布週期力을 받을 때 Galerkin 法으로 振動數−振幅의 關係式을 誘導하였다. Wagner [14]는 큰 振幅으로 말미암은 曲率의 非線型인 嚴密한 表現式과 軸方向의 慣性力을 고려하여

* 正会員, 서울大学校 工科大学

Galerkin 法으로 解析하였다. 一方 Atluri〔15〕는 回轉慣性力과 軸方向慣性力을 고려하였을 때의 自由振動에 대한 解를 Galerkin 法과 multiple-time scales 法으로 고찰하였고, Buchanan, Huang & Cheng〔16〕은 큰 回轉角과 剪斷變形을 고려하였을 때의 静力學的 처짐을 剪斷係數를 媒介變數로 하여 計算하였다. 또한 Verma〔17〕는 軸方向으로 一定한 힘이 作用할 때 回轉角이 큰 경우를 strained parameter 法으로 다루었다. 한편 李〔18〕는 剪斷變形과 軸方向慣性力의 영향을 multiple-time scales 法으로 고찰하였다.

Timoshenko 보의 振動方程式을 처짐이나 또는 굽힘曲線의 기울기에 대하여 표시하면 時間에 관한 4階偏微分係數를 포함하게 된다. 이것을 變數分離法에 의해서 常微分方程式으로 고치면 時間에 관한 4階微分方程式이 誘導되며, 보편적으로 취급되는 2階微分方程式인 運動方程式에 비하여 복잡하게 되고, 非線型問題에서는 여기에 mode의 連成이 있는 非線型項들까지 포함하게 된다. 이와같이 Timoshenko 보의 非線型振動은 [illegible] 매우 複雜하므로 그 研究의 結果도 比較的 적다. Rao et al.〔19〕이 非線型의 變形度-變位關係를 취하고, 變位와 剪斷變形度를 각각 3次式 및 1次式으로 近似시켜 有限要素法으로 振動數變化를 數値計算하였다. 林 및 李〔20〕는 軸方向弾性力의 영향 중에서 중요한 2項만을 포함시켜서 고찰한 바가 있다.

本 報文에서는 非線型인 變形度-變位關係를 취하고, 兩端이 単純支持인 Timoshenko 보에서 兩端거리가 一定일 때의 軸方向弾性力 및 軸方向의 變位가 自由로울 때의 軸方向慣性力을 각각 고려하는 2가지의 力學的 模型으로 分類하고, 一般的인 振動數-振幅의 1項 近似式을 strained parameter 法으로 計算하였다. 또한 multiple-time scale 法에 의해서 얻어진 計算이 正確함을 檢證하고, 基本振動型의 初期條件을 가질 때를 예로 들어 數値計算과 아울러 實用的인 식도 提示하였다.

2. 基本 運動方程式

보의 처짐이 보의 두께에 비하여 작지 않으나, 길이에 비하여는 작을 때의 變位를

$$
\begin{aligned}
u_1 &= -z\psi(x,\ t),\\
u_2 &= 0,\\
u_3 &= w(x,\ t).
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

여기서

$u_1,\ u_2,\ u_3$: $x,\ y,\ z$ 軸方向의 變位,

$\psi(x,\ t)$: 굽힘에 의한 回轉角,

$w(x,\ t)$: z 方向의 처짐.

으로 취하고, 非線型의 變位-變形度關係式

$$
\begin{aligned}
e_{xx} &= -z\psi' + \frac{1}{2}(w')^2,\\
e_{xz} &= \frac{1}{2}(w' - \psi),
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

및 Hooke 의 法則에 의하여

$$\sigma_{xx} = E\,e_{xx}\ ,\quad \sigma_{xz} = 2G\,e_{xz} \tag{2.3}$$

로 취한다〔21〕. 假想變位의 原理에 의해서 運動方程式을 구하면

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{2.4}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.5}$$

$$\rho k_1^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial M}{\partial x} + Q \tag{2.6}$$

단,

$$M = \int \sigma_{xx}\, z\ dA = -EI\frac{\partial \psi}{\partial x}\ , \tag{2.7}$$

$$Q = \int \sigma_{xz}\, dA = kGA\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi\right), \tag{2.8}$$

$$N = \int \sigma_{xx}\, dA = \frac{EA}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \tag{2.9}$$

$$k_1^2 = \frac{I}{A} \tag{2.10}$$

ρ : 보의 單位길이에 대한 質量,

u : 보의 軸方向變位,

A : 보의 斷面積,

k : 剪斷係數〔22〕.

보의 兩端 거리가 一定하게 유지될 때의 軸方向弾性力을 보의 全長(l)에 걸쳐 平均値로 취하면, (2.9)로부터

$$N(t) = \frac{EA}{2\,l}\int_0^l\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \tag{2.11}$$

인 引張力이 軸方向으로 均一하게 作用한다고 생각할 수 있다. 윗 式을 (2.5)에 代入하면 軸

方向慣性力은 0이 됨을 알 수 있다.

한편 보가 軸方向으로 自由로이 變位할 수 있을 때의 軸方向의 變位는

$$u(x,\ t)=-\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dx \tag{2.12}$$

이며, 이것을 (2.5)에 代入하고, $u(0,\ t)=0$, 및 $N(l,\ t)=0$의 條件을 참작하면서 積分하면

$$N(x,\ t)=\frac{1}{2}\rho\int_x^l\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\int_0^x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dx\right\}dx \tag{2.13}$$

가 된다. 이것이 軸方向의 慣性力을 나타내며, 軸方向의 變位가 自由로우므로 軸方向의 弾性力은 誘起되지 않는다. 나머지 運動方程式(2.4)및 (2.6)에서 $\psi(x,\ t)$를 消去하면 처짐에 대한 微分方程式으로서

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\rho k_1^2\left(1+\frac{E}{kG}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\rho^2k_1^2}{kGA}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}$$
$$=\frac{\rho k_1^2}{kGA}\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}\left(N\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{EI}{kGA}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(N\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{2.14}$$

를 얻게 된다.

3. 軸方向 弾性力

無次元變數

$$z=\frac{w}{h},\quad y=\frac{x}{l},\quad a=\frac{h^2}{l^2},\quad b=\frac{k_1^2}{l^2},$$
$$c=\frac{E}{kG},\quad \tau=t\left(\frac{EI}{\rho l^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

을 導入하면 (2.14)는

$$\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}+\frac{\partial^2 z}{\partial\tau^2}-b(1+c)\frac{\partial^4 z}{\partial y^2\partial\tau^2}+b^2c\frac{\partial^4 z}{\partial\tau^4}$$
$$=abc\left(\frac{\partial^2\overline{N}}{\partial\tau^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial\overline{N}}{\partial\tau}\frac{\partial^3 z}{\partial\tau\partial y^2}+\overline{N}\frac{\partial^4 z}{\partial\tau^2\partial y^2}\right)$$
$$-ac\overline{N}\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}+\frac{a}{b}\overline{N}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{3.1}$$

로 되고, (2.11)은

$$N=EAa\overline{N}$$
$$\overline{N}(\tau)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2dy \tag{3.2}$$

가 된다. (3.1)의 解로서 單純支持보에 대하여

$$z(y,\tau)=\sum_{n=1}^{N}q_n(\tau)\sin n\pi y \tag{3.3}$$

로 취하면 〔23〕, (3.2)는

$$\overline{N}(\tau)=\frac{\pi^2}{4}\sum_{n=1}^{N}n^2q_n^2 \tag{3.4}$$

이 된다. (3.3)을 (3.1)에 代入하고, 각 項을 $\sin j\pi y$로 곱한 다음에 y에 관해서 0에서 1까지 積分하는, 즉 Galerkin 積分을 취하면

$$\frac{b^2c}{2}q_j^{\mathrm{IV}}+\frac{1}{2}\left[1+b(1+c)j^2\pi^2\right]\ddot{q}_j+\frac{j^4\pi^4}{2}q_j$$
$$=-\frac{a\pi^4j^2}{8}\sum_{m=1}^{N}\left\{2bc\,m^2(q_m\ddot{q}_m+\dot{q}_m^2)+cj^2\pi^2m^2q_m^2+\frac{m^2}{b}q_m^2\right\}q_j-\frac{abc\pi^4j^2}{2}$$
$$\left\{\sum_{m=1}^{N}m^2q_m\dot{q}_m\right\}\dot{q}_j-\frac{abc\pi^4j^2}{8}\left\{\sum_{m=1}^{N}m^2q_m^2\right\}\ddot{q}_j$$
$$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N, \tag{3.5}$$

를 얻는다. 여기서 上添字 IV 및 $(\dot{\ })$는 時間 τ에 관한 微分을 표시한다. 따라서 (3.5)는 聯立 4階常微分方程式이며, 右邊은 連成(couple) 된 非線型項들로 되어 있다. 이것을 strained parameter 法으로 풀기 위하여

$$t'=\omega\tau \tag{3.6}$$

$$q_j(\tau)=\varepsilon q_{j1}+\varepsilon^3q_{j3}+\varepsilon^5q_{j5}+\cdots \tag{3.7}$$

$$\omega^2=\omega_0^2(1+\varepsilon^2\omega_2+\varepsilon^4\omega_4+\cdots) \tag{3.8}$$

라고 놓으면

$$\overline{N}=\varepsilon^2\left(\frac{\pi^2}{4}\sum_{m=1}^{N}m^2q_{m1}^2\right)+\varepsilon^4\left(\frac{\pi^2}{2}\sum_m m^2q_{m1}q_{m3}\right)+\cdots\cdots \tag{3.9}$$

이고,

$$\frac{d^4q_j}{d\tau^4}=\frac{d^4q_j}{dt'^4}=q_j^{\mathrm{IV}}\omega^4$$

$$\frac{d^2q_j}{d\tau^2}=q_j''\omega^2$$

라고 한다. (3.6)~(3.9)를 (3.5)에 代入하고 ε의 같은 次數에 대한 項들을 골라서 그 係數를 等置하면

$$\varepsilon^1:\frac{b^2c}{2}\omega_0^4q_{j1}^{\mathrm{IV}}+\frac{1}{2}\left\{1+b(1+c)j^2\pi^2\right\}\omega_0^2q_{j1}''+\frac{j^4\pi^4}{2}q_{j1}=0 \tag{3.10}$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^3 :\ & \frac{b^2 c}{2}\, \omega_0^4\, q_{j3}^{\mathrm{IV}} + \frac{1}{2}\left\{1 + b(1+c)\, j^2\pi^2\right\} \\
& \omega_0^2\, q_{j3}'' + \frac{j^4\pi^4}{2}\, q_{j3} \\
& = -b^2 c\, \omega_0^4\, \omega_2\, q_{j1}^{\mathrm{IV}} - \frac{1}{2}\left\{1 + b(1+c)\, j^2\pi^2\right\} \\
& \quad \omega_0^2\, \omega_2\, q_{j1}'' \\
& \quad - \frac{abc}{4}\pi^4 j^2 \left\{\sum_m m^2 (q_{m1}\, q_{m1}'' + q_{m1}'^2)\right\} \\
& \quad \omega_0^2\, q_{j1} \\
& - \left(\frac{a\pi^4 j^2}{8b} + \frac{ac\pi^6 j^4}{8}\right) q_{j1} \sum_m m^2\, q_{m1}^2 \\
& - \frac{abc\pi^4 j^2}{2}\, \omega_0^2\, q_{j1}' \sum m^2\, q_{m1}\, q_{m1}' - \frac{abc\pi^4 j^2}{8} \\
& \quad \omega_0^2\, q_{j1}'' \sum_m m^2\, q_{m1}^2 \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

ε^5 ....

이다. 여기서 上添字 IV 및 (′)는 t'에 관한 微分을 표시한다.

初期條件으로

$$q_j(0) = \varepsilon c_j\ ,\quad q_j'(0) = 0 \qquad (3.12)$$

을 취하면

$$
\left.
\begin{aligned}
& q_{j1}(0) = c_j\ ,\quad q_{jk}(0) = 0\ , \\
& q_{j1}'(0) = 0\ ,\quad q_{jk}'(0) = 0\ ,
\end{aligned}
\right. \quad k \geq 3 \qquad (3.13)
$$

이다. 지금

$$q_{j1} = \exp(i p_j t'),\quad p_j > 0 \qquad (3.14)$$

라고 하면, (3.10)으로부터

$$(p_j \omega_0)^2 = \frac{\{1+b(1+c)j^2\pi^2\} \pm \sqrt{\{1+b(1+c)j^2\pi^2\}^2 - 4\, b^2 c j^4 \pi^4}}{2b^2 c} \qquad (3.15)$$

를 얻는다. 그런데 큰 쪽의 振動數, 즉 (3.15)의 分子에서 平方根앞의 +를 취한 값은 대단히 크므로 實際的 見地에서 이것에 대응하는 解의 部分을 無視할 수 있다 [24]. 따라서 (3.13)을 만족하는 (3.10)의 解로서

$$q_{j1} = c_j \cos p_j t' \qquad (3.16)$$

를 얻는다. 이것을 (3.11)의 右邊에 代入하여 q_{j3}에 대한 微分方程式을 풀므로서 q_{j3}를 얻게 된다. 그러나 左邊이 (3.10)과 同一한 꼴이므로 (3.11)의 右邊에서 $\cos p_j t'$의 項이 있으면 解에 永年項(secular term)이 나오게 된다. 이를 피하기 위해서 $\cos p_j t'$의 係數를 0으로 놓아야하며, 이로부터 ω_2를 구할 수 있으며,

$$\omega_2 = \frac{j^2\pi^4\left(ac\pi^2 j^2 + \dfrac{a}{b} - abc\, p_j^2 \omega_0^2\right)}{16(p_j\omega_0)^2 \left\{[1+b(1+c)j^2\pi^2]\right.} \qquad (3.17)$$

$$\frac{\left(2\sum\limits_{m\neq j} m^2 c_m^2 + 3j^2 c_j^2\right)}{\left. -2\, b^2 c\, p_j^2\, \omega_0^2 \right\}}$$

를 얻는다. ε^5 以上의 微分方程式은 計算이 매우 複雜하고, 또한 實用的인 觀點에서도 그 意義가 매우 적으므로 대개의 非線型解析에서와 같이 1項近似를 취하기로 하면

$$
\begin{aligned}
q_j(\tau) &= \varepsilon\, c_j \cos p_j \omega \tau \\
&= \varepsilon\, c_j \cos \omega_j' \tau \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

여기서

$$\omega_j' = p_j\, \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \omega_2\right) \qquad (3.19)$$

이다. (3.18)를 (3.3)에 代入하면 求하는 解가 되고, (3.19)가 振動數-振幅의 關係式이다.

4. 軸方向 慣性力

軸方向으로의 變位가 自由로울 때는 (2.13)으로 표시되는 軸方向 慣性力을 갖는다. 前節에서의 無次元變數를 이용하면 (2.14)는

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} - b(1+c)\frac{\partial^4 z}{\partial y^2 \partial \tau^2} + b^2 c\, \frac{\partial^4 z}{\partial \tau^4} \\
& = ab^2 c\left(\frac{\partial^3 \overline{N}}{\partial y \partial \tau^2}\, \frac{\partial z}{\partial y} + 2\, \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial y \partial \tau}\, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial \tau}\right. \\
& + \frac{\partial \overline{N}}{\partial y}\, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial \tau^2}\, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\, \frac{\partial \overline{N}}{\partial \tau}\, \frac{\partial^3 \tau}{\partial y^2 \partial \tau} \\
& \left. + \overline{N} \frac{\partial^4 z}{\partial y^2 \partial \tau^2}\right) - abc\left(\frac{\partial^3 \overline{N}}{\partial y^3}\, \frac{\partial z}{\partial y} + 3\, \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial y^2}\, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right. \\
& \left. + 3\, \frac{\partial \overline{N}}{\partial y}\, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + \overline{N} \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right) \\
& + a\left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial y}\, \frac{\partial z}{\partial y} + \overline{N} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

단,

$$\overline{N} = \frac{1}{2}\int_y^1 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\left\{\int_0^y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dy\right\} dy \qquad (4.2)$$

역시

$$z(y,\tau)=\sum_{n=1}^{N} q_n(\tau)\sin n\pi y \qquad (4.3)$$

로 취하고, 이것을 (4.1)에 代入한 후에 Galerkin 積分을 하면

$$\frac{1}{2}b^2 c q_j^{\mathrm{IV}}+\frac{1}{2}\{1+b(1+c)j^2\pi^2\}\ddot{q}_j+\frac{j^4\pi^4}{2}q_j$$
$$=-ab^2c\pi^3\sum_m\sum_n\sum_r\{q_m^{\mathrm{IV}}q_n q_r+4\dddot{q}_m\dot{q}_n q_r$$
$$+3\ddot{q}_m\ddot{q}_n q_r+2\dddot{q}_m q_n\dot{q}_r+6\ddot{q}_m\dot{q}_n\dot{q}_r$$
$$+\ddot{q}_m q_n\ddot{q}_r+\dot{q}_m\dot{q}_n\ddot{q}_r\}A_{mnrj}$$
$$+a\pi^3\sum_m\sum_n\sum_r\{\ddot{q}_m q_n q_r+\dot{q}_m\dot{q}_n q_r\}$$
$$\times(bcB_{mnrj}-A_{mnrj}). \qquad (4.4)$$

단,

$$A_{mnrj}=mnr\int_0^1(f_{mn}\cos r\pi y+\pi rF_{mn}\sin r\pi y)\sin j\pi y dy$$

$$f_{mn}(y)=\int_0^y\cos m\pi y\ \cos n\pi y\,dy$$

$$F_{mn}(y)=\int_y^1 f_{mn}(y)\,dy$$
$$=\int_y^1\left\{\int_0^y\cos m\pi y\cos n\pi y\ dy\right\}dy$$

$$B_{mnrj}=mnr\int_0^1(f''_{mn}\cos r\pi y-3\pi rf'_{mn}\sin r\pi y-3\pi^2r^2f_{mn}\cos r\pi y-\pi^3r^3F_{mn}\sin r\pi y)\sin j\pi y\,dy \qquad (4.5)$$

이며,

$$\overline{N}=\frac{\pi^2}{2}\sum_m\sum_n mnF_{mn}(y)\ Q_{mn}(\tau)$$
$$Q_{mn}(\tau)=2(\dot{q}_m q_n+\dot{q}_m\dot{q}_n) \qquad (4.6)$$

이다. 4階聯立非線型微分方程式 (4.4)를 풀기 위하여 역시 strained parameter 法을 利用한다. 이때 (3.6)~(3.8)을 適用하고, (4.4)로부터 ε 의 같은 次數의 係數를 等置하면

$$\varepsilon^1:\frac{b^2c}{2}\omega_0^4q_{j1}^{\mathrm{IV}}+\frac{1}{2}\{1+b(1+c)j^2\pi^2\}\omega_0^2q''_{j1}$$
$$+\frac{j^4\pi^4}{2}q_{j1}=0 \qquad (4.7)$$

$$\varepsilon^2:\frac{b^2c}{2}\omega_0^4\ q_{j3}^{\mathrm{IV}}+\frac{1}{2}\{1+b(1+c)j^2\pi^2\}\omega_0^2\ q''_{j3}$$
$$+\frac{j^4\pi^4}{2}q_{j3}$$
$$=-b^2c\,\omega_0^4\,\omega_2\ q_{j1}^{\mathrm{IV}}-\frac{1}{2}\{1+b(1+c)j^2\pi^2\}$$
$$\omega_0^2\omega_2\ q''_{j1}-ab^2c\pi^3\omega_0^4\sum_m\sum_n\sum_r(q_{m1}^{\mathrm{IV}}q_{n1}q_{r1}$$
$$+4q'''_{m1}q'_{n1}q_{r1}+3q''_{m1}q''_{n1}q_{r1}+2q'''_{m1}q_{n1}$$
$$q'_{r1}+6q''_{m1}q'_{n1}q'_{r1}+q''_{m1}q_{n1}q''_{r1}+q'_{m1}q'_{n1}$$
$$q''_{r1})A_{mnrj}+a\pi^3\omega_0^2\sum_m\sum_n\sum_r(q''_{m1}q_{n1}q_{r1}$$
$$+q'_{m1}q'_{n1}q_{r1})(bcB_{mnrj}-A_{mnrj}) \qquad (4.8)$$

ε^5 ……………………………………………

初期條件으로 역시 (3.12)와 같이

$$q_j(0)=\varepsilon c_j,\quad \dot{q}_j(0)=0 \qquad (4.9)$$

으로 취하면, (4.7)의 解로서

$$q_{j1}=c_j\ \cos p_j t' \qquad (4.10)$$

를 얻으며

$$(p_j\omega_0)^2=\frac{\{1+b(1+c)j^2\pi^2\}-\sqrt{\{1+b(1+c)\ j^2\pi^2\}^2-4b^2c\ j^4\pi^4}}{2b^2c} \qquad (4.11)$$

이다. (4.10)을 (4.8)의 右邊에 代入하고, 永年項을 없이하기 위해서 $\cos p_j t'$ 의 項을 0으로 놓으므로써

$$\omega_2=\frac{1}{\{1+b(1+c)j^2\pi^2\}\omega_0^2p_j^2-2b^2c\,\omega_0^4\ p_j^4}\times$$
$$[ab^2c\pi^3\omega_0^4\{c_j^2p_j^4A_{jjjj}+\sum_{l\neq j}(c_l^2p_j^2-2p_j^2p_l^2c_l^2)A_{jllj}+3p_j^2\sum_{l\neq j}p_l^2c_l^2A_{ljlj}\}$$
$$+a\pi^3\omega_0^2\{c_j^2p_j^2C_{jjjj}+p_j^2\sum_{l\neq j}c_l^2C_{jllj}$$
$$+\sum_{l\neq j}c_l^2p_l^2C_{ljlj}\}]. \qquad (4.12)$$

단,

$$C_{mnrj}=bc\,B_{mnrj}-A_{mnrj}. \qquad (4.13)$$

1項近似解는

$$q_j(\tau)=\varepsilon c_j\ \cos\omega'_j\tau \qquad (4.14)$$

이고,

$$\omega'_j=p_j\omega_0(1+\frac{1}{2}\varepsilon^2\omega_2) \qquad (4.15)$$

이다. (4.14)를 (4.3)에 代入하여 解를 얻으며, (4.15)가 振動數-振幅의 關係式이다.

5. 考 察

參考로 定量的인 比較를 위하여 두께 (h)가 一

定인 矩形斷面의 긴 單純支持보가 初期條件

$$w(x,0)=\varepsilon h c_1 \sin\frac{\pi}{l}x,\ \dot{w}(x,0)=0 \tag{5.1}$$

으로 自由振動하는 경우를 생각하자. 따라서

$$q_1(0)=\varepsilon c_1 \qquad \dot{q}_1(0)=0 \tag{5.2}$$

$$q_k(0)=0 \quad \dot{q}_k(0)=0,\ k=2,3,\cdots,N.$$

兩端거리가 一定히 유지될 때는 (3.17)~(3.19)로부터

$$q_1(\tau)=\varepsilon c_1\cos\omega_1'\tau,\ \ q_k(\tau)=0,\ \ k=3,5\cdots \tag{5.3}$$

이며,

$$\omega_1'=p_1\omega_0(1+\frac{1}{2}\varepsilon^2\omega_2), \tag{5.4}$$

$$\omega_2=\frac{\pi^4(ac\pi^2+\dfrac{a}{b}-abc\,p_1^2\omega_0^2)(3c_1^2)}{16p_1^2\omega_0^2\{[1+b(1+c)\pi^2]-2b^2c\,p_1^2\omega_0^2\}} \tag{5.5}$$

이다. 矩形斷面보에서

$b=\dfrac{k_1^2}{l^2}=\dfrac{h^2}{12l^2}$ 이며, 보통 $\dfrac{h^2}{l^2}(=a)=O$ (10^{-2})이고, $c=3.05$ 程度이므로 b^2 以上을 포함하는 項을 無視하면 (3.15)는

$$(p_j\omega_0)^2=\frac{j^4\pi^4}{1+b(1+c)j^2\pi^2}$$
$$=j^4\pi^4\{1-b(1+c)j^2\pi^2\} \tag{5.6}$$

로 近似시킬 수 있으며, (5.5)는

$$\frac{\omega_2}{2}=\frac{3}{32}c_1^2\left(\frac{h^2}{l^2}\frac{E}{kG}\pi^2+\frac{h^2}{k_1^2}\right) \tag{5.7}$$

가 된다. 이때

$$\frac{\omega_1'}{p_1\omega_0}=1+\frac{3}{32}\varepsilon^2c_1^2\left(\frac{h^2}{l^2}\frac{E}{kG}\pi^2+\frac{h^2}{k_1^2}\right) \tag{5.8}$$

이지만 상당히 긴 보 ($\dfrac{h}{l}\ll 1$)에 대하여는

$$\frac{\omega_1'}{p_1\omega_0}=1+\frac{3}{32}\frac{\varepsilon^2c_1^2h^2}{k_1^2} \tag{5.9}$$

이 된다. 이 關係는 Euler 보에서 軸方向弾性力을 고려한 非線型圓振動數와 線型振動數의 비를 나타낸 式과 同一한 꼴의 式이다 〔5〕,〔6〕,〔7〕. 또한 (5.8) 및 (5.9)에서 볼 수 있는 바와 같이 非線型의 영향이 커서 無視할 수 없는 部分은 (3.1)의 右邊에서 끝에 있는 2개의 項이며, 그 中에서도 맨 끝의 項이 가장 큰 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.

軸方向의 變位가 自由로울 때는 (4.12)로부터

$$\omega_2=\frac{ac_1^2\pi^3}{\{1+b(1+c)\pi^2-2b^2c\omega_0^2p_1^2\}}\times$$
$$\{b^2c\,p_1^2\omega_0^2A_{1111}+C_{1111}\}. \tag{5.10}$$

여기서

$$A_{1111}=\frac{\pi}{12}-\frac{3}{32\pi},$$

$$B_{1111}=-\frac{13\pi}{32}-\frac{\pi^3}{12},$$

$$C_{1111}=-bc\left(\frac{\pi^3}{12}+\frac{13\pi}{32}\right)-\left(\frac{\pi}{12}-\frac{3}{32\pi}\right)$$

이다. 이때

$$\frac{\omega_2}{2}=\frac{c_1^2h^2\pi^3}{l^2}\left\{-\frac{\pi}{24}+\frac{3}{64\pi}-\frac{k_1^2}{l^2}\left(-\frac{\pi^3}{24}+\frac{13\pi}{16}\right)\right\} \tag{5.11}$$

로 近似시키면, 線型振動數에 대한 比가

$$\frac{\omega_1'}{p_1\omega_0}=1-\frac{\varepsilon^2c_1^2h^2}{l^2}\pi^3\left\{\frac{\pi}{24}-\frac{3}{64\pi}+\frac{k_1^2}{l^2}\left(-\frac{\pi^3}{24}+\frac{13\pi}{16}\right)\right\} \tag{5.12}$$

로 표시된다.

(5.9)는 軸方向 弾性力이 hardening type 의 非線型이고, 軸方向 慣性力은 (5.12)에서 보는 바와 같이 softening type (振幅의 增加에 따라 振動數가 減少하는)의 非線型임을 보여 주고 있다. 이것은 Euler 보에서 〔5〕,〔6〕,〔7〕 및 〔15〕에서 指摘한바와 同一한 特性이다.

本文에서는 strained parameter 法에 의한 計算結果를 보여 주었으나 (3.5) 및 (4.4)를 multiple-time scales 法에 의해서도 計算하였다. 즉,

$$T_m=\varepsilon^m\tau,\quad m=0,1,\cdots,M. \tag{5.13}$$

$$q_j(\tau)=\varepsilon^{1/2}\sum_{m=0}^{M-1}\varepsilon^m q_{jm}(T_0,T_1,\cdots,T_M)$$
$$+O(\varepsilon T_M)$$

라 놓고, 이들을 (3.5) 및 (4.4)에 代入하고 自由振動에 대한 1項近似解 및 振動數 — 振幅의 關係를 구하였던바 (3.17), (3.18) 및 (4.12), (4.14)와 同一한 結果를 얻었다. 다만 數式의 計算과 數學的 處理上 若干의 複雜한 點이 있었을 뿐이다.

〔後 記〕

本 硏究는 1977年度 峨山社會福祉事業 財團의 學術硏究費의 支援에 의하여 이루어진 것으로서 關係諸位에게 심심한 謝意를 表한다.

參 考 文 獻

1. S.Woinowsky-Krieger : The Effect of an Axial Force on the Vibration of Hinged Bars, J. Appl. Mech., Vol. 17, 1950, pp. 35-36.
2. D.Burgreen : Free Vibrations of a Pin-Ended Column with Constant Distance between Pin Ends, J. Appl. Mech., Vol. 18, 1951, pp. 135-139.
3. T.Wah : The Normal Modes of Vibration of Certain Nonlinear Contiuous Systems, J. Appl. Mech., Vol. 31, 1964, pp. 139-140.
4. P.H.McDonald : Nonlinear Dynamic Coupling in a Beam Vibration, J. Appl. Mech., Vol. 22, 1955, pp. 573-578.
5. A.V.Srinivasan : Large Amplitude Free Oscillations of Beams and Plates, AIAA Journal, Vol. 3, No. 10, 1965, pp. 1951-1953.
6. D.A.Evensen : Nomlinear Vibrations of Beams with Various Boundary Conditions, AIAA Journal, Vol. 6, No. 2, 1968, pp. 370-372.
7. J.D.Ray & C.W.Bert : Nonlinear Vibrations of a Beam with Pinned Ends, J. Engr. for Industry. Trans. ASME, Vol. 93, No. 4, 1969, pp. 997-1004.
8. J.G.Eisley : Nonlinear Vibration of Beams and Rectangular Plates, ZAMP, Vol. 15, 1964, pp. 167-174.
9. J.G.Eisley : Large Amplitude Vibrations of Buckled Beams and Rectangular Plates, AIAA Journal, Vol. 2, No. 12, 1964, pp. 2207-2209.
10. R.W.Dickey : Free Vibrations and Dynamic Buckling of the Extensible Beam, J. Math. Analy. Appl., Vol. 29, 1970, pp. 443-454.
11. N.J.Lee & C.H.Lim : Nonlinear Vibrations of Extensible Beams with Various Axially Immovable End Conditons, J. KSAS, Vol. 4, No. 2, 1976, pp. 24-30.
12. W.Y.Tseng & J.Dugundji : Nonlinear Vibrations of a Beam under Harmo: Excitation, J. Appl. Mech., Vol. 37, 1970, pp. 292-297.
13. L.W.Rehfield : Large Amplitude Forced Vibrations of Elastic Structures, AIAA Journal, Vol. 12, NO. 3, 1974, pp. 388-390.
14. H.Wagner : Large Amplitude Free Vibrations of a Beam, J. Appl. Mech., Vol. 32, 1965, pp. 887-892.
15. S.Atluri : Nonlinear Vibrations of A Hinged Beam Including Nonlinear Inertia Effects, J. Appl. Mech., Vol. 40, 1973, pp. 121-126.
16. G.R.Buchanan, J.C.Huang & T.K.M.Cheng : Effect of Shear on Nonlinear Behavior of Elastic Bars, J. Appl. Mech., Vol. 37, 1970, pp. 212-215.
17. G.R.Verma : Nonlinear Vibrations of Beams and Membranes, ZAMP, Vol. 23, 1972, pp. 805-814.
18. N.J.Lee : The Effect of Longitudinal Inertia Force and Shear Deformation on the Large Amplitude Vibrations, Trans. KSME, Vol. 1, No. 2, 1977, pp. 82-88.
19. G.V.Rao, I.S.Raju & K.K.Raju : Nonlinear Vibrations of Beams Considering Shear Deformation and Rotary Inertia, AIAA Journal, Vol. 14, No. 5, 1976, pp. 685-687.
20. 林澈虎·李樂周, 兩端거리 一定인 힌지된 Timoshenko 보의 非線型振動에 대하여, 서울大學校 工大硏究報告, 제 9 권, 제 2 호, 1977. pp. 89～93.
21. K.Washizu : *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon press, 1968, pp. 142-149.
22. G.R.Cowper : The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, J. Appl. Mech., Vol. 33, 1966, pp. 335-340.
23. T.C.Huang : The Effect of Rotary Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams with Simple End Conditions, J. Appl. Mech., Vol. 28, 1961, pp. 579-584.
24. C.W.Silva : Dynamic Beam Model with Inertial Damping Rotary Inertia and Shear Deformation, AIAA Journal, Vol. 14, No. 5, 1976, pp. 676-680.