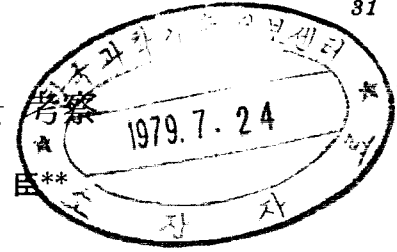


<論 文>

圓筒셸의 嚴密理論에 관한 考察

金 天 旭* · 李 永 臣**

(1978. 6. 30 接受)



Study on the Exact Theory of Cylindrical Shells

Chon Wook Kim and Young Shin Lee

Abstract

In order to specify the accuracy of the cylindrical shell theories, several cylindrical shell equations are studied. Cheng's equation is used as the exact theory for circular cylindrical shells. An error factor is defined and used for the measure of the accuracy in various cylindrical shell theories. The line load applied along generators of a thin-walled circular cylindrical shell of finite length is investigated as a numerical example. These numerical results show that Cheng's equation is used for the fundamental cylindrical shell equation and the difficulties in computation by a digital computer are same as the simplified equations, such as Donnell's, Morley's, and Vlasov's equations.

I. 緒 論

셸構造는 船舶, 航空機, 각종 化學裝置뿐 아니라 現代建築에 있어 特殊建物등에 널리 사용되고 있다. 따라서 작용하는 荷重도 用途에 따라 多樣하고 支持狀態도 各樣各色이므로 解析方法도 多樣하다.

1888년에 Love⁽¹⁾는 彈性셸의 擧動을 記述하는 基本方程式을 近似理論에 의하여 유도하였다. 그는 Kirchhoff의 假定에 기초하였고 셸은 얇고 처짐도 작다고 가정하였다.

Love의 셸理論이 발표된 이후 많은 研究者들에 의하여 셸理論의 嚴密解와 近似解가 제시되었다. 이들 理論의 대부분은 모두 Kirchhoff의 假定에 기초를 두고 있으며 셸의 力學的 擧動을 잘 표현하면서 解를 쉽게 구하려고 하였다. 그러나 실제로 위의 두 條件은 서로 相衡되는 것이어서 嚴密理論이 되면 解를 구하기 어렵고 近似理論이 되면 解는 비교적 쉽게 얻을 수 있지만 誤差를 가져온다. 따라서 各種 셸理論은 자기 長點과

短點을 가지고 있으며 셸構造의 解析에 있어 適用의 制限을 받는다.

圓筒셸은 셸構造중에서도 가장 널리 사용되고 用途가 多樣하므로 適用되는 理論도 상당히 많다. 일반적으로 圓筒 셸의 嚴密理論에는 Flügge⁽²⁾의 方程式이 가장 널리 알려져 있다. 그러나 Flügge의 方程式은 數值解 이외의 解析方法은 없으므로 電子計算機가 발달되기까지는 셸構造를 解析하는데 널리 사용되지 못하였다. Donnell⁽³⁾은 1933년 대담한 假定에 기초하여 單純化시킨 圓筒셸理論을 제시하였으며 그의 方程式을 사용하여 圓筒셸의 挫屈問題를 많이 다루었다.

Donnell의 方程式은 圓筒셸理論중 가장 널리 사용되고 있으나 單純化를 위한 假定 때문에 荷重에 따라서는 큰 誤差를 가져온다. Donnell의 方程式의 精密度에 대해서는 많은 研究가 이루어졌다^(4,5,6)

Morley⁽⁷⁾는 Donnell의 方程式과 Flügge의 單純化된 方程式을 比較하여 비교적 誤差가 적은 方程式을 제시하였으며 이 方程式은 Koiter⁽⁸⁾에 의하여 理論적으로 지원되었다. Vlasov⁽⁹⁾는 獨自의으로 單純化된 圓筒셸의 方程式을 제시하였으며 실제의 셸構造解析에 有用함을 보여주었다.

최근에 Cheng⁽¹⁰⁾은 圓筒셸에 대한 嚴密理論을 새로 誘導하고 Flügge 및 Donnell의 方程式과 比較하여 檢

* 正會員, 延世大學校 工科大學

** 正會員, 忠南大學校 工業教育大學

本 論文에 대한 討論은 1979年 2月 15日까지

本 學會 事務室로 送付하여 주십시오.

討하였다. ⁽¹¹⁾

本 研究에서는 Cheng의 理論을 이용하여 각종 圓筒셀方程式의 嚴密解에 대한 誤差와 이들의 特性을 檢討한다.

II. 圓筒셀理論

本 研究에서 취급한 圓筒셀은 閉鎖形으로서의 幾何學的 모델을 Fig. 1에서 보여 준다.

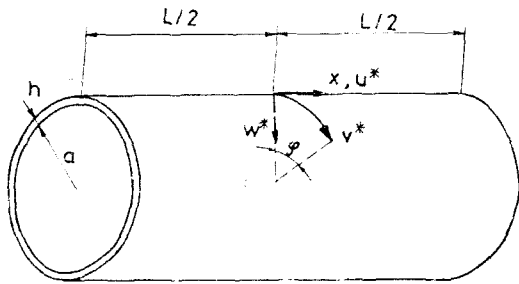


Fig. 1. Geometry and coordinates of the cylindrical shell

變位는 無次元量으로 표시하기 위하여 變位 u^* , v^* , w^* 를 반지름 a 로 나누어 다음과 같이 정의한다.

$$u = u^*/a, \quad v = v^*/a, \quad w = w^*/a$$

圓筒셀의 基本方程式은 Cheng ⁽¹⁰⁾에 의하여 다음과같이 垂直變位 w 에 대한 8階偏微分方程式으로 주어진다.

$$\begin{aligned} \nabla^4(\nabla^2+1)^2w + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^4w}{\partial x^4} + 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^6w}{\partial x^2\partial\phi^4} \right. \\ \left. + \frac{\partial^4w}{\partial x^2\partial\phi^2} - \frac{\partial^6w}{\partial x^6} \right\} + k_1^2 \left\{ \frac{\partial^4w}{\partial x^4} - \frac{\partial^2w}{\partial\beta^2} \right. \\ \left. - \frac{\partial^4w}{\partial\beta^4} \right\}^2 = \frac{a^4}{D} \nabla^4Z \end{aligned} \quad (1)$$

여기서

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2},$$

$$k^2 = \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)^2,$$

$$k_1 = k(1-\nu),$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

Z = 垂直分布荷重

이다.

Cheng의 方程式은 k 또는 k_1 을 완전히 무시하지 않음으로서 오히려 Eq. (1)을 다음과 같이 한쌍의 4階共軛方程式으로 표시할 수 있음을 보였다.

$$LL_w = \frac{a^4}{D} \nabla^4Z \quad (2)$$

여기서

$$\begin{aligned} L = (\nabla^2+1)\nabla^2 + i \left\{ \frac{1}{k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right. \\ \left. + k_1 \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

Flügge의 嚴密理論은 Kempner ⁽⁵⁾에 의하여 다음과 같이 單純化되어 표시되었다.

$$\begin{aligned} \nabla^4(\nabla^2+1)^2w + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^4w}{\partial x^4} + 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^6w}{\partial x^2\partial\phi^4} \right. \\ \left. + \frac{\partial^4w}{\partial x^2\partial\phi^2} - \frac{\partial^6w}{\partial x^6} \right\} = \frac{a^4}{D} \nabla^4Z \end{aligned} \quad (4)$$

Eq. (4)를 Eq. (1)과 비교하면, Eq. (1)에서 $k_1 \rightarrow 0$ 으로 한 경우에 해당한다.

Vlasov의 方程式은 Eq. (4)에서 $\frac{\partial^4w}{\partial x^2\partial\phi^2} \rightarrow 0$ 으로 한 경우이며, 다음과 같다. ⁽⁶⁾

$$\begin{aligned} \nabla^4(\nabla^2+1)^2w + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^4w}{\partial x^4} + 2(1-\nu) \\ \left\{ \frac{\partial^6w}{\partial x^2\partial\phi^4} - \frac{\partial^6w}{\partial x^6} \right\} = \frac{a^4}{D} \nabla^4Z \end{aligned} \quad (5)$$

Morley의 方程式은 Eq. (4)에서 괄호 []속의 값이 零이 된 경우이며 다음과 같이 주어진다.

$$\nabla^4(\nabla^2+1)^2w + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^4w}{\partial x^4} = \frac{a^4}{D} \nabla^4Z \quad (6)$$

가장 널리 사용되는 Donnell의 方程式은 다음과 같이 가장 간단한 形態로 주어진다.

$$\nabla^8w + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^4w}{\partial x^4} = \frac{a^4}{D} \nabla^4Z \quad (7)$$

Cooper ⁽¹²⁾는 Naghdi ⁽¹³⁾에 의하여 제시된 셀理論중에서 셀斷面의 剪斷變形만을 고려하여 다음과 같은 方程式을 제시하였다.

$$\begin{aligned} \nabla^8w + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^4w}{\partial x^4} + \frac{12(1+\nu)}{5} \\ \left(\frac{\partial^6w}{\partial x^6} + \frac{\partial^6w}{\partial x^4\partial\phi^2} \right) = \frac{a^4}{D} \nabla^4Z \end{aligned} \quad (8)$$

이상의 각종 圓筒셀理論을 檢討하면, Cheng의 方程式이 가장 一般化된 것임을 알 수 있다.

III. 圓筒셀의 解

$x=0$ 에 대하여 對稱인 半徑方向力을 받는 경우 셀의 變位는 다음과 같이 줄수 있다. ⁽¹⁴⁾

$$w = Ae^{i\phi} \cos nx$$

$$u = Be^{i\phi} \sin nx$$

$$v = Ce^{i\phi} \cos nx$$

여기서

$$n = \frac{m\pi a}{L} \quad (9)$$

A, n : 定數,
 B, C, p : 複素數

Eq. (9)를 Eq. (1)의 同次式에 대입하면 다음과 같은 特性方程式을 얻는다.

$$(p^2 - n^2)(p^2 - n^2 + 1)^2 + \frac{1}{k^2}n^2 + (n^4 - p^4 - p^2) \left[\frac{2k_1}{k}n^2 + k_1^2(n^4 - p^4 - p^2) \right] = 0 \quad (10)$$

Eq. (10)에서 特性根 p 는 다음과 같이 複素로 쓸 수 있다.

$$p_{1,2,3,4} = \pm \alpha_1 + i\beta_1, \quad p_{5,6,7,8} = \pm \alpha_2 \pm i\beta_2 \quad (11)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= R \frac{1}{2} \cos \frac{\Phi_1}{2} \\ \beta_1 &= R \frac{1}{2} \sin \frac{\Phi_1}{2} \\ \alpha_2 &= R \frac{1}{2} \cos \frac{\Phi_2}{2} \\ \beta_2 &= R \frac{1}{2} \sin \frac{\Phi_2}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

이고

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \\ R_2 &= \sqrt{A_2^2 + B_2^2} \\ A_1 &= \frac{1}{2(1+k_1^2)} \left[2n^2 - k_1^2 - 1 + r \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} + k_1 \sin \frac{\theta_1}{2} \right) \right] \\ B_1 &= \frac{-1}{2(1+k_1^2)} \left[2k_1n^2 + r \frac{1}{2} \left(k_1 \cos \frac{\theta_1}{2} - \sin \frac{\theta_1}{2} \right) \right] \\ A_2 &= \frac{1}{2(1+k_1^2)} \left[2n^2 - k_1^2 - 1 - r \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} + k_1 \sin \frac{\theta_1}{2} \right) \right] \\ B_2 &= \frac{-1}{2(1+k_1^2)} \left[2k_1n^2 - r \frac{1}{2} \left(k_1 \cos \frac{\theta_1}{2} - \sin \frac{\theta_1}{2} \right) \right] \\ \Phi_1 &= \cos^{-1} \frac{A_1}{R_1} = \sin^{-1} \frac{B_1}{R_1} \\ \Phi_2 &= \cos^{-1} \frac{A_2}{R_2} = \sin^{-1} \frac{B_2}{R_2} \\ r_1 &= \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \\ X_1 &= 1 - 4(1-\nu)n^2 - 4k_1^2n^4 - k_1^2 \\ Y_1 &= \frac{2}{k} (2n^2 + kk_1) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\theta_1 = \cos^{-1} \frac{X_1}{r_1} = \sin^{-1} \frac{Y_1}{r_1}$$

이다.

이들 特性根을 대입하고 實數部와 虛數部를 분리시키면 w 에 대한 式을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w = [e^{-\alpha_1\varphi}(A_1\cos\beta_1\varphi + A_2\sin\beta_1\varphi) + e^{-\alpha_2\varphi}(A_3\cos\beta_2\varphi + A_4\sin\beta_2\varphi) + e^{\alpha_1\varphi}(A_5\cos\beta_1\varphi + A_6\sin\beta_1\varphi) + e^{\alpha_2\varphi}(A_7\cos\beta_2\varphi + A_8\sin\beta_2\varphi)] \cos nx$$

그러나 閉圓筒セル의 경우 φ 의 증가에 따라 垂直變位 w 가 指數的으로 증가할 수는 없으므로 위 式에서 $A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = 0$ 이 되어야 하며 따라서 w 에 대한 式은 다음과 같다.

$$w = [e^{-\alpha_1\varphi}(A_1\cos\beta_1\varphi + A_2\sin\beta_1\varphi) + e^{-\alpha_2\varphi}(A_3\cos\beta_2\varphi + A_4\sin\beta_2\varphi)] \cos nx \quad (14)$$

特性根 p 가 구해졌으므로 나머지 解析은 Donnell理論과 같은 비교적 單純化된 解析法을 사용하여도 무방하다.

軸方向 및 圓周方向變位는 다음 式으로부터 구해진다.

$$\nabla^4 u = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w \quad (15)$$

$$\nabla^4 v = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + (2+\nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] w \quad (16)$$

w 의 값이 Eq. (14)에서 주어졌으므로 이를 Eqs. (15)와 (16)에 대입하고 풀면 u 와 v 에 대하여 다음 式을 얻는다.

$$u = [e^{-\alpha_1\varphi} \{ A_1(N_1'\cos\beta_1\varphi - N_1\sin\beta_1\varphi) + A_2(N_1\cos\beta_1\varphi + N_1'\sin\beta_1\varphi) \} + e^{-\alpha_2\varphi} \{ A_3(N_2'\cos\beta_2\varphi - N_2\sin\beta_2\varphi) + A_4(N_2\cos\beta_2\varphi + N_2'\sin\beta_2\varphi) \}] \sin nx \quad (17)$$

$$v = [e^{-\alpha_1\varphi} \{ A_1(M_1'\cos\beta_1\varphi - M_1\sin\beta_1\varphi) + A_2(M_1\cos\beta_1\varphi + M_1'\sin\beta_1\varphi) \} + e^{-\alpha_2\varphi} \{ A_3(M_2'\cos\beta_2\varphi - M_2\sin\beta_2\varphi) + A_4(M_2\cos\beta_2\varphi + M_2'\sin\beta_2\varphi) \}] \cos nx \quad (18)$$

여기서

$$N_1' = \frac{1}{(a_1^2 + b_1^2)^2} \{ \nu n^3(a_1^2 - b_1^2) + n[(\alpha_1^2 - \beta_1^2)(a_1^2 - b_1^2) + 4a_1b_1\alpha_1\beta_1] \}$$

$$N_1 = \frac{2}{(a_1^2 + b_1^2)^2} \{ \nu n^3 a_1 b_1 + n[(\alpha_1^2 - \beta_1^2)a_1 b_1 - (a_1^2 - b_1^2)\alpha_1 \beta_1] \}$$

$$N_2' = \frac{1}{(a_2^2 + b_2^2)^2} \{ \nu n^3(a_2^2 - b_2^2) + n[(\alpha_2^2 - \beta_2^2)(a_2^2 - b_2^2) + 4a_2b_2\alpha_2\beta_2] \}$$

$$N_2 = \frac{2}{(a_2^2 + b_2^2)^2} \{ \nu n^3 a_2 b_2 + \dots \}$$

$$\begin{aligned}
& +n[(\alpha_2^2-\beta_2^2)a_2b_2-(a_2^2-b_2^2)\alpha_2\beta_2] \quad (19) \\
M_1' &= \frac{1}{(a_1^2+b_1^2)^2} \{-\alpha_1[(\alpha_1^2-\beta_1^2)(a_1^2-b_1^2) \\
& +4a_1b_1\alpha_1\beta_1]-2\beta_1[(\alpha_1^2-\beta_1^2)a_1b_1- \\
& (a_1^2-b_1^2)\alpha_1\beta_1]+(2+\nu)n^2[\alpha_1(a_1^2-b_1^2) \\
& +2\beta_1a_1b_1]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{1}{(a_1^2+b_1^2)^2} [2(\alpha_1^2-\beta_1^2)a_1b_1-2(a_1^2-b_1^2)\alpha_1\beta_1 \\
& +\beta_1[(\alpha_1^2-\beta_1^2)(a_1^2-b_1^2)+4a_1b_1\alpha_1\beta_1] \\
& -(2+\nu)n^2[\beta_1(a_1^2-b_1^2)-2a_1b_1\alpha_1]]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_2' &= \frac{1}{(a_2^2+b_2^2)^2} \{-\alpha_2[(\alpha_2^2-\beta_2^2)^2(a_2^2-b_2^2) \\
& +4a_2b_2\alpha_2\beta_2]-2\beta_2[(\alpha_2^2-\beta_2^2)^2a_2b_2-(a_2^2-b_2^2)\alpha_2\beta_2] \\
& +(2+\nu)n^2[\alpha_2(a_2^2-b_2^2)+2\beta_2a_2b_2]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_2 &= \frac{1}{(a_2^2+b_2^2)^2} [2(\alpha_2^2-\beta_2^2)a_2b_2-2(a_2^2-b_2^2)\alpha_2\beta_2 \\
& +\beta_2[(\alpha_2^2-\beta_2^2)(a_2^2-b_2^2)+4a_2b_2\alpha_2\beta_2] \\
& -(2+\nu)n^2[\beta_2(a_2^2-b_2^2)-2a_2b_2\alpha_2]] \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \alpha_1^2 - \beta_1^2 - n^2, & b_1 &= 2\alpha_1\beta_1 \\
a_2 &= \alpha_2^2 - \beta_2^2 - n^2, & b_2 &= 2\alpha_2\beta_2
\end{aligned} \quad (21)$$

Eqs. (14), (17), 및 (18)에서 常數 A_1 , A_2 , A_3 , 및 A_4 는 셸의 境界條件으로부터 求解된다.

한편, 그 밖의 圓筒셸의 方程式의 特性方程式은 다음과 같이 주어진다.

Flügge의 方程式 :

$$\begin{aligned}
(p^2-n^2)^2(p^2-n^2+1)^2 + \frac{1}{k^2}n^4 + 2(1-\nu)n^2 \\
(n^4-p^4-p^2) = 0 \quad (22)
\end{aligned}$$

Vlasov의 方程式 :

$$\begin{aligned}
(p^2-n^2)^2(p^2-n^2+1)^2 + \frac{1}{k^2}n^4 + 2(1-\nu)n^2 \\
(n^4-p^4) = 0 \quad (23)
\end{aligned}$$

Morley의 方程式 :

$$(p^2-n^2)^2(p^2-n^2+1)^2 + n^4/k^2 = 0 \quad (24)$$

Donnell의 方程式 :

$$(p^2-n^2)^4 + n^4/k^2 = 0 \quad (25)$$

Cooper의 方程式 :

$$(p^2-n^2)^4 + \frac{n^4}{k^2} + \frac{12(1+\nu)}{5}n^4(p^2-n^2) = 0 \quad (26)$$

이상의 特性方程式의 根은 Eq. (11)과 같은 모양으로 주어진다. Donnell의 方程式의 解는 Hoff⁽¹⁵⁾에 의하여 다음과 같이 주어졌다.

$$\alpha_1 = \left(\frac{n}{2}\right) \{ (n+K) + [(n+K)^2 + K^2]^{1/2} \}^{1/2},$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \left(\frac{n}{2}\right) \{ (n-K) + [(n-K)^2 \\
& + K^2]^{1/2} \}^{1/2},
\end{aligned}$$

$$\beta_1 = \left(\frac{1}{2}\right) (nK/\alpha_1)$$

$$\beta_2 = \left(\frac{1}{2}\right) (nK/\alpha_2)$$

여기서 $4K^4=1/k^2$ 이다.

IV. 數值例

圓筒셸의 嚴密理論에 대한 評價는 特性根의 값을 비교하여 論議하는 것이 일반적이지만, 本 研究에서는 圓筒셸의 實際問題를 풀어 數值를 비교하여 檢討한다.

위에서 설명한 各種 圓筒셸理論의 近似化 過程에서 가장 문제가 되는 것은 剪斷力에 대한 것과 셸두께의 영향이다. 剪斷力에 대한 영향은 Fig. 2에서 보는 것 같은 線荷重을 받을 때에 뚜렷하므로 單純支持의 圓筒셸이 線荷重을 받는 경우를 數值例로 하였다.

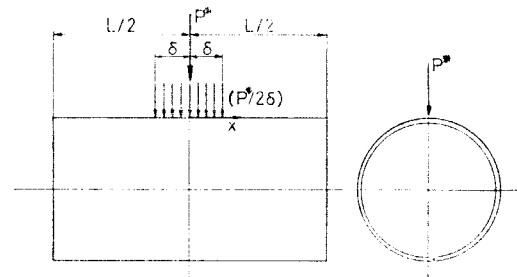


Fig. 2. Applied line loadings

荷重은

$$\begin{aligned}
|x| \leq (\delta/a) \text{에서 } (p^*/2\delta) \\
(\delta/a) < |x| \leq (L/2a) \text{에서 } 0
\end{aligned} \quad (28)$$

으로 정의되고 다음과 같이 級數로 표시할 수 있다.

$$Z = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{p^*}{m\pi\delta} \sin\left(\frac{m\pi\delta}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi a}{L}x\right) \quad (29)$$

圓筒셸의 兩端이 單純支持인 경우에 境界條件은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
x = \pm \frac{L}{2a} \text{에서} \\
u_{,x} = v = w = w_{,xx} = 0
\end{aligned} \quad (30)$$

이 境界條件과 $\varphi=0$ 에서 작용하는 荷重을 고려하면, 常數 A_1 , A_2 , A_3 , 및 A_4 에 대한 聯立方程式을 얻고 이를 行列로 표시하면, 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} -\alpha_1 & \beta_1 & -\alpha_2 & \beta_2 \\ M_1' & M_1 & M_2' & M_2 \\ -\alpha_1 N_1' - \beta_1 N_1 & -\alpha_1 N_1 + \beta_1 N_1' & -\alpha_2 N_2' - \beta_2 N_2 & -\alpha_2 N_2 + \beta_2 N_2' \\ -(D/a)^2(\alpha_1^3 - 3\alpha_1\beta_1^2) & -(D/a^2) & -(D/a^2) & -(D/a^2) \\ & \times (\beta_1^3 - 3\beta_1\alpha_1^2) & \times (\alpha_2^3 - 3\alpha_2\beta_2^2) & \times (\beta_2^3 - 3\beta_2\alpha_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Z \end{pmatrix} \quad (31)$$

Eq. (31)로부터 常數 $A_1, A_2, A_3,$ 및 A_4 를 구하여 變位 $w, u,$ 및 v 를 얻고 이들 값을 이용하여 應力 및 모우멘트를 算出한다.

本 研究에서 사용한 圓筒殼의 幾何學的 치수 및 荷重은 다음과 같다.

$$1 \leq L/a \leq 10, \quad 10 \leq a/h \leq 500,$$

$$1/40 \leq \delta/L \leq 1/4$$

위의 數值例는) 電子計算機에 의하여 計算되었다.

Cheng의 方程式을 基礎로 하여 각종 圓筒殼方程의 誤差를 算出하였는데 誤差는 다음式으로 주어지는 誤差係數를 사용하여 표시하였다.

$$\epsilon = 1 - \frac{\text{其他 圓筒殼 理論值}}{\text{Cheng의 理論值}} \quad (32)$$

Eq. (29)로 표시되는 級數는 13項까지 사용하면 충분함을 檢證하였고 計算値는 $x=\varphi=0$ 에 대해서 구하였고 殼의 길이는 $L=5\alpha_0$ ($\alpha_0=\delta/2a$)로 취하였다.

Vlasov, Cooper, 및 Flügge의 理論値는 이미 발표된 研究의 結果^{6,12,5)}를 채용하였다. Fig.3~Fig.7에서는 各 理論値의 誤差를 보여 준다.

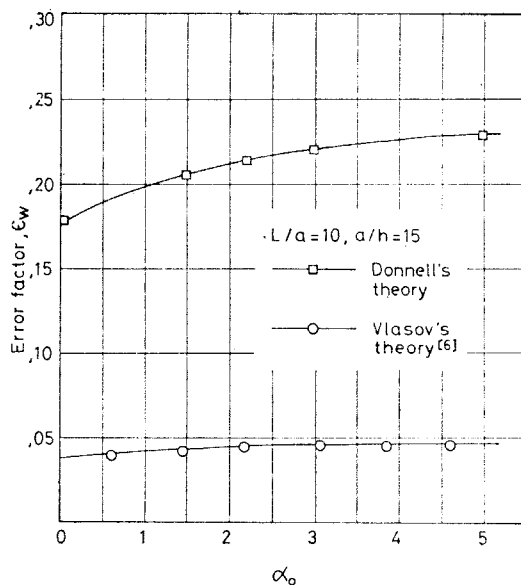


Fig. 4. Radial displacements in a thin cylindrical shell

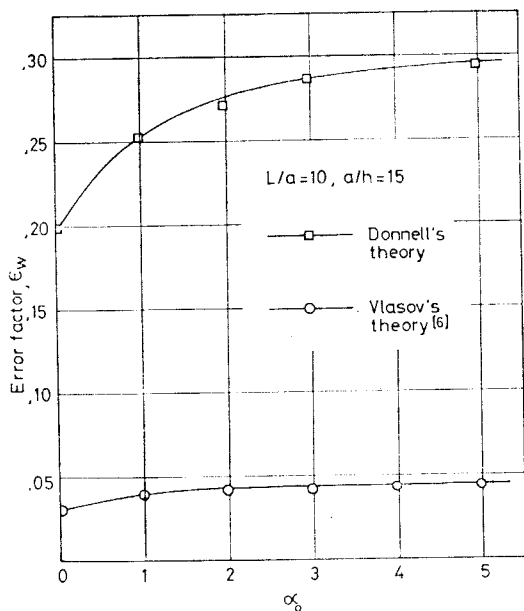


Fig. 3. Radial displacements in a thick cylindrical shell

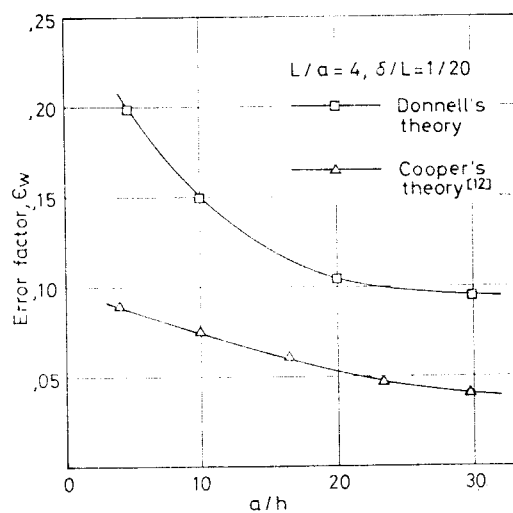


Fig. 5. Radial displacements with increasing radius-thickness ratio

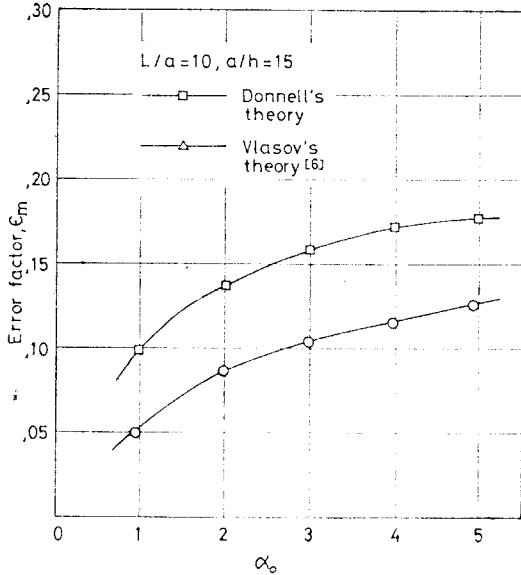


Fig. 6. Bending moment

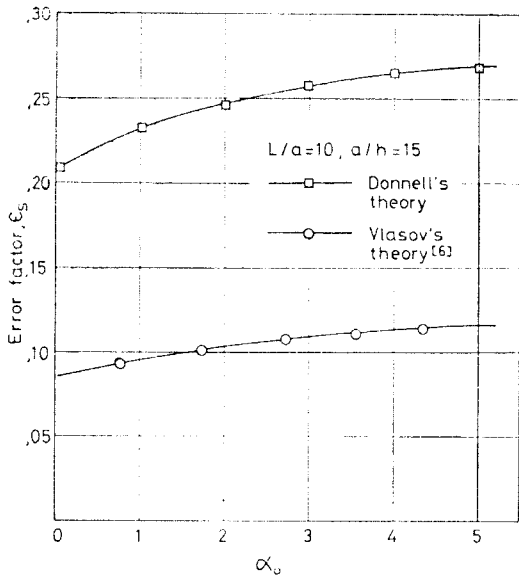


Fig. 7. Longitudinal stress

V. 檢 討

Fig. 3 및 Fig. 4는 半徑方向變位 w 에 대한 各理論의 誤差를 보여 준다. 잘 알려져 있는 것과 같이,

Donnell의 方程式의 誤差는 매우 크며 셸의 半徑對 두께 比의 값이 작을 수록 誤差가 커짐을 알 수 있다

Fig. 6은 굽힘모우멘트에 대한 各理論의 誤差를 보여 준다. 여전히 Donnell의 理論이 큰 誤差를 나타내는

데 다만 集中荷重($\alpha_0=0$)인 경우에는 誤差가 거의 없다 그러므로 集中荷重에 의한 圓筒셸의 굽힘應力을 구할 경우에는 Donnell의 理論도 사용 가능함을 알 수 있다

Fig. 5에서는 셸의 두께의 영향을 보여 준다. 剪斷變形을 고려한 Cooper의 理論은 Donnell의 理論보다 두께에 덜 민감함을 알 수 있으나 반드시 精確한 理論이라고 단정할 수는 없다.

Flügge의 理論値는 文獻(5)에서 단지 한 點으로 주어져 있는데 誤差係數 ϵ_w 는 0.03정도를 보여 준다.

VI. 結 論

圓筒셸에 대한 各種 嚴密理論의 차이를 精確히 檢討하기 위하여 兩端이 單純支持된 圓筒셸에 Line load가 작용하는 問題를 다루었다. Cheng의 理論을 基礎로 하여 各理論의 誤差를 검토한 결과 다음과 같은 結果를 얻었다.

(i) Cheng의 方程式은 電子計算機로 解析할 경우에는 Vlasov 또는 Donnell의 方程式의 解와 비슷한 정도의 어려움을 가지고 있다. 따라서 굽힘이 수반되는 圓筒셸의 問題는 Cheng의 理論을 사용하는 것이 안전하다.

(ii) Donnell의 方程式과 그 밖의 方程式을 비교하면 方程式의 첫 項 $\nabla^4(\nabla^4+1)^2w$ 이 셸두께의 영향을 고려된 것임을 알 수 있다. 따라서 셸의 굽힘현상이 크지 않은 얇은 圓筒셸의 古典의 挫屈의 問題에서는 Donnell의 方程式이 사용되어도 충분함을 알 수 있다.

끝으로 이 研究는 峨山社會福祉事業財團研究費의 지원을 받은 것임을 밝힌다.

參 考 文 獻

1. Love, A.E.H., "On the Small Free Vibrations and Deformations of Thin Elastic Shells", *Phil. Trans. Royal Society(London)*, 17A, pp.491-546 (1888).
2. Flügge, W., *Statik und Dynamik der Schalen*, Edwards Bros., Inc., Ann Arbor, Michigan, 1943.
3. Donnell, L.H., "Stability of Thin-Walled Tube Under Torsion", *NASA TR-479*, 1933.
4. Hoff, N.J., "The Accuracy of Donnell's Equations", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 22, *Trans. ASME, Ser. E*. Vol. 77, 1955, pp. 329-334.
5. Kempner, J., "Remarks on Donnell's Equations", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 22, *Trans.*

- ASME, Ser. E*, Vol. 77, 1955, pp. 117-118.
6. Nerubails and V.A. Sibiryaks, "The Error of the Donnell-Vlasov Equations", *PMM*, Vol. 6, No.6, 1970, pp. 112-115.
 7. Morley, L.S.D., "An Improvement on Donnell's Approximation for Thin-Walled Circular Cylinders", *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 12, 1959, pp. 89-99.
 8. Koiter, W.T., "A Consistent First Approximation in the General Theory of Elastic Shells", *Proceedings, Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, Delft*, 1960, ed., Koiter, W.T., North Holland Publishing Co.
 9. Vlasov, V.Z., "General Theory of Shells and Its Applications in Engineering", *NASA TTF-99*, 1964.
 10. Cheng, S. "Accurate Fourth-Order Equation for Circular Cylindrical Shells", *Journal of Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE*, Vol. 98, 1972, pp. 641-656.
 11. Cheng, S., "On an Accurate Theory for Circular Cylindrical Shells", *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Ser. E*, 1973, pp. 582-588.
 12. Cooper, R.M., "Cylindrical Shells under Line Load", *Journal of Applied Mechanics, Vol. 24, Trans. ASME, Ser. E*, Vol. 79, 1957, pp. 553-558.
 13. Naghdi, P.M., and Berry, J.G., "On the Equations of Motion of Cylindrical Shells", *Journal of Applied Mechanics, Vol. 21, Trans. ASME, Ser. E*, Vol. 76, 1954, pp. 160-166.
 14. Kraus, H., *Thin Elastic Shells*, John Wiley, New York, 1967, p. 223.
 15. Hoff, N.J., Kempner, J., and Pohle, F.V., "Line Load Applied Along Generators of Thin-Walled Circular Cylindrical Shells of Finite Length", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. XI, No. 4, 1954, pp. 411-425.