大韓機械學會論文集 第2卷 第1號 pp. 27~30, 1978

<論 文>

圓筒型 휜의 最適設計

趙 星 煥*

(1978年 8月 31日 授受)

Optimum Design of Uniform Circular Fins

by
Sung Hwan Cho

Abstract

Conditions for increasing heat transfer by increasing uniform circular fin length are investigated. When free end of the fin is not thermally insulated, correction fin length, which gives equal heat transfer from an insulated end fin, is given. Optimum design of a uniform circular fin based on the equivalent fin with insulated end is given.

1. 序 論

熱傳達을 增加시키기 위하여 *fin*이 많이 利用되고 있다. 冷暖房器機의 熱交換器에서도 *fin*이 많이 使用된다. *fin*은 對流面積을 增加시키는 동시에 傳導熱抵抗을 增加시키므로 항상 熱傳達을 增加시키지는 않는다. 또 大部分의 *fin* 解析에서는 *fin*의 自由端이 絶緣된 것으로 가정하고 있으며, 自由端이 絶緣되지 않은 *fin*에 대해서는 두께의 1/2을 길이에 추가해 주도록 권하고 있다[1].

本 論文에서는 圓筒型表面에 부착된 直4角形의 *fin*의 最適設計條件을 구하기 위하여 다음과 같은 두가지 問題를 解析한다. 즉

(1) *fin*의 길이가 增加하면 熱傳達이 增加하기 위한 條件은 무엇인가?

(2) *fin*의 끝이 絶緣되지 않은 경우 *fin*의 끝이 絶緣된 것으로 가정하여서 같은 率의 熱傳達을 얻기 위해 追加해 주어야 할 길이는 얼마인가?

本 解析에서 *fin*에서의 熱傳達은 一次元 定常狀態로 가정하고, *fin* 材質의 熱特性과 熱傳達係數는 溫度에 관계없이 一定한 것으로 가정하였다.

2. *fin*이 熱傳達을 增加시키는 條件

*fin*의 길이가 增加하면 對流熱傳達面積은 增加하나 熱傳導抵抗이 함께 增加하므로 항상 熱傳達이 增加하는 것은 아니다. 直線 *fin*에 대한 解析은 參考文獻[2]에 주어져 있다.

그림 1은 本 論文의 解析對象인 圓筒型 *fin*을 보여준다. *fin*에서의 溫度分布는 다음 微分方程式을 만족한다.

$$\frac{d^2T}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dT}{dR}-\frac{2h}{kB}(T-T_f)=0 \qquad (1)$$

여기서 T는 *fin*의 溫度, T_f는 流體의 溫度, R은 半지름, B는 *fin*의 두께, k는 熱傳導係數, h는 熱傳達係數이다. 경계조건은

$$R=R_0 \text{ 일 때 } T=T_0 \qquad (2)$$

$$R=R_L \text{ 일 때 } k\frac{dT}{dR}+h_L(T-T_f)=0 \qquad (3)$$

h_L은 *fin* 끝에서의 熱傳達係數이다. 식 (1)~(3)의 解는

$$\frac{T-T_f}{T_0-T_f}=\frac{I_1(ml)K_0(mr)+K_1(ml)I_0(mr)+b\{I_0(ml)K_0(mr)-K_0(ml)I_0(mr)\}}{I_1(ml)K_0(m)+K_1(ml)I_0(m)+b\{I_0(ml)K_0(m)-K_0(ml)I_0(m)\}} \qquad (4)$$

*正會員, 陸軍士官學校 機械工學科

本 論文에 대한 討論은 1978年 12月15日까지 本 學會事務室로 送付하여 주십시오.

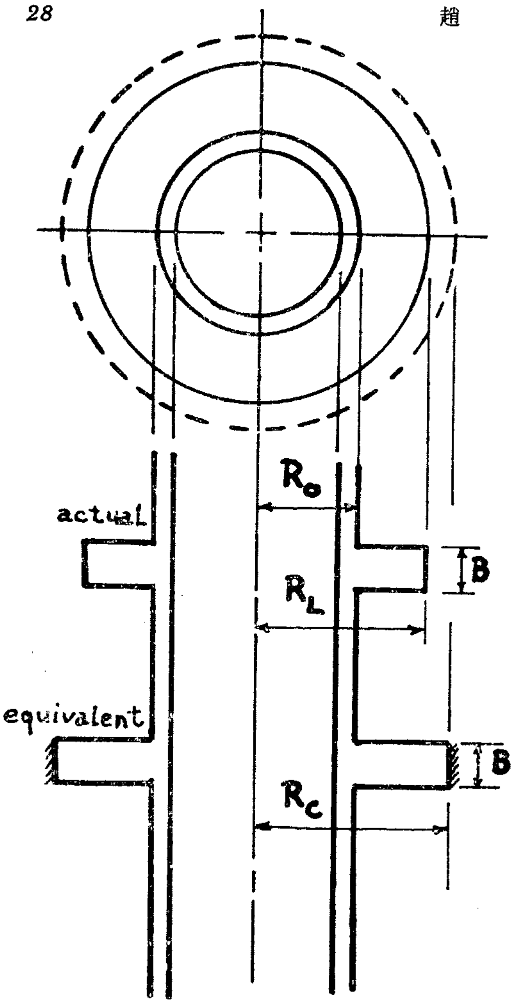

Fig. 1. Circular fin

여기서 變數는 다음과 같이 無次元項으로 表示되었다.

$$\left.\begin{aligned} m&=R_0\sqrt{\frac{2h}{Bk}} \\ l&=\frac{R_L}{R_0} \\ r&=\frac{R}{R_0} \\ b&=\frac{h_L}{h}\sqrt{\frac{Bh}{2k}} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

한 개의 fin으로부터의 熱傳達은

$$Q=-2\pi R_0 B\, k\frac{dT}{dR}\bigg|_{R=R0}$$

에서 구할 수 있으며, 식 (4)의 結果를 利用하면

$$E=\frac{Q}{2\pi R_0^2 k(T_0-T_f)}$$

$$=\frac{2}{m}\,\frac{I_1(ml)K_1(m)-K_1(ml)I_1(m) +b\{I_0(ml)K_1(m)+K_0(ml)I_1(m)\}}{I_1(ml)K_0(m)+K_1(ml)I_0(m) +b\{I_0(ml)K_0(m)-K_0(ml)I_0(m)\}} \tag{6}$$

을 얻는다. fin의 길이를 增加시켰을 때 熱傳達이 增加하는 條件은

$$\frac{dQ}{dR_L}>0 \text{ 또는 } \frac{dE}{dl}>0$$

이며, 식 (6)을 l에 대해 微分하고

$$I_0(X)K_1(X)+I_1(X)K_0(X)=\frac{1}{X}$$

의 關係[3]를 利用하여 整理하면

$$1+\frac{b}{ml}-b^2>0 \tag{7}$$

을 얻을 수 있다. 그림 2에서 曲線 1은 式 (7)의 관계를 나타낸다. 식 (7)을 만족하지 않으면 fin의 길이를 增加시켰을 때 熱傳達은 감소되어 絶緣效果를 나타낸다.

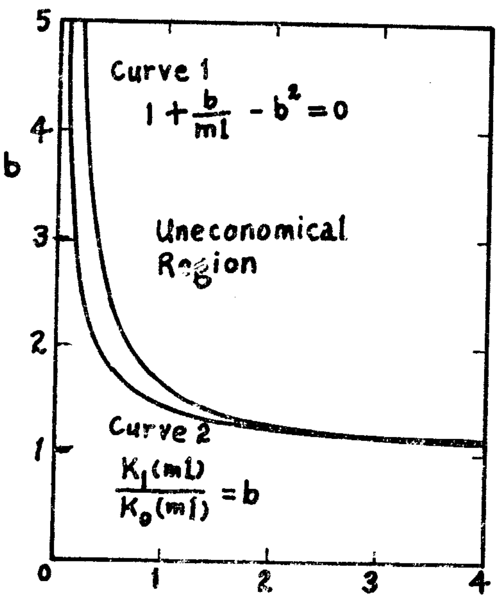

Fig. 2. Criteria for correction length

3. 修正길이

fin의 끝이 絶緣되지 않은 경우에는 통상 fin의 두께의 절반을 fin의 길이에 追加한 후 fin의 끝이 絶緣된

것으로 가정하고 解析한다〔1〕. 이것은 物理的인 解析에 依存한 것이며 數學的인 根據는 없다.

이제 *fin*의 길이가 實際길이보다 R_a만큼 길다고 하고 끝이 절연된 것으로 가정하면, 溫度分布는 式 (1)과 式 (2)를 만족하여야 하며, *fin* 끝에서의 境界條件만 변한다. 즉

$$R=R_L+R_a=R_c \text{ 일 때 } \frac{dT}{dR}=0 \tag{8}$$

이제 式 (1), (2) 및 (8)을 만족하는 解는

$$\frac{T-T_f}{T_0-T_f}=\frac{I_1(mlc)K_0(mr)+K_1(mlc)I_0(mr)}{I_1(mlc)K_0(m)+K_1(mlc)I_0(m)} \tag{9}$$

이며, 이 *fin*에서의 熱傳達은

$$E=\frac{Q}{2\pi R_0^2h(T_0-T_f)}$$
$$=\frac{2}{m}\frac{I_1(mlc)K_1(m)-K_1(mlc)I_1(m)}{I_1(mlc)K_0(m)+K_1(mlc)I_0(m)} \tag{10}$$

이다 여기서

$$lc=(R_L+R_a)/R_0=R_c/R_0 \tag{11}$$

이다. 이제 이 修正길이가 加算된 *fin*이 實際의 *fin*과 等價이기 위해서는 두 *fin*에서의 熱傳達이 서로 같아야 한다. 즉 式 (6)과 式 (10)을 比較하여

$$\frac{I_1(mlc)K_1(m)-K_1(mlc)I_1(m)}{I_1(mlc)K_0(m)+K_1(mlc)I_0(m)}$$
$$=\frac{I_1(ml)K_1(m)-(K_1(ml)I_1(m)+b\{I_0(ml)K_1(m)+K_0(ml)I_1(m)\}}{I_1(ml)K_0(m)+K_1(ml)I_0(m)+b\{I_0(ml)K_0(m)-K_0(ml)I_0(m)\}} \tag{12}$$

이며, 이 式을 整理하면

$$\frac{K_1(mlc)}{I_1(mlc)}=\frac{K_1(ml)-bK_0(ml)}{I_1(ml)+bI_0(ml)} \tag{13}$$

式 (13)에서 lc는 m, l, b의 函數로 주어진다. 따라서 修正된 길이 lc를 구할 수 있다. $lc>l>1$이어야 하므로

$$\frac{K_1(mlc)}{I_1(mlc)}>0$$

이며, 따라서 lc가 存在하는 條件은

$$\frac{K_1(ml)}{K_0(ml)}>b \tag{14}$$

이다. 그림 2의 曲線 2는 이 관계를 나타낸다. 이條件은 式 (7)에서 얻은 條件보다 더 制限된다. 즉 *fin*의 길이가 增加하면 熱傳達이 增加하더라도 等價絕緣 *fin*은 存在하지 않을 수 있다. 이것은 直線 4角形 *fin*의 경우와는 다르다〔2〕. 그림 3은 式 (13)을 圖示한 것이다. 주어진 m, l, b의 값에 대하여 等價길이 lc를 구할 수 있다. $b=0$의 경우가 바로 끝이 絕緣된 경우에 해당한다.

4. 最適 圓筒型 *fin*의 設計

끝이 絕緣된 圓筒型 4角形 *fin*에서 最適條件은 Jakob〔4〕에 주어져 있다. 즉 傳達해야 할 熱量 Q와 R_0, k, h, h_L, T_0 및 T_f가 주어졌을 때 식 (10)에 의하여 E를 計算하면 이 條件에서의 最適 m과 mlc의 값을 參考文獻 〔4〕의 그림 11-11에서 구하고, 式 (5)에서 *fin*의 두께 B와 *fin*의 바깥 반지름 R_c을 구할 수 있다.

끝이 絕緣되지 않은 圓筒型 *fin*의 경우에는 위에서 구한 最適 絕緣 *fin*과 같은 熱傳達을 가지는 *fin*을 구하면 된다. 즉 위에서 說明한 것과 같은 方法으로 m과 lc를 구한 후, 그림 3을 利用하여 $b=0$에 해당하는 점을 구하고, 그 점에서 수평으로 왼쪽으로 움직여서 실제경우의 b의 값에 해당하는 곡선상의 점을 구하여 수직으로 움직여서 ml의 값을 구하여서 l의 값을 얻는다.

5. 計 算 例

다음과 같은 條件에서 最適 圓筒型 *fin*을 設計해 보자.

$T_0=170°C$,
$T_f=30°C$
$k=210W/(m\cdot K)$
$h=h_L=250W/(m^2\cdot K)$
$R_0=30.2mm$
$Q=400W$

式 (10)에 의하여 $E=1.99$이며, 參考文獻 〔4〕에서 이 경우의 最適條件은 $m=1.16$, $mlc=2.36$이다. 式 (5)에서 $B=1.61mm$, $b=0.031$이다. 그림 3에서 $ml=2.33$을 얻으며, 따라서 $l=1.45$, $R_L=43.7mm$이다. 즉 最適 *fin*은 두께가 1.61mm이며, 길이가 $R_L-R_0=13.5mm$이다.

6. 結 論

끝이 絕緣되지 않은 圓筒型 表面에 부착된 直 4角形에 대하여 最適크기를 設計하는 方法을 소개하였다. 이를 위하여 圓筒型 *fin*이 熱傳達을 增加시키는 條件과

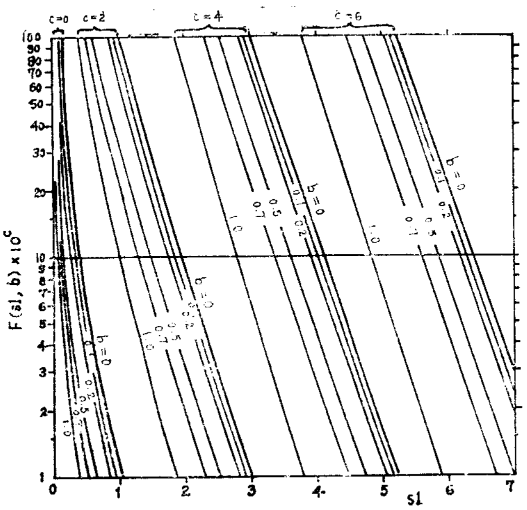

Fig. 3. Correction length

또 끝이 絕緣된 것으로 가정한 等價 *fin* 이 存在하는 條件을 구하였다. 本 論文의 結果 다음과 같은 事實을 얻을 수 있다.

(가) 式 (7)의 관계를 만족하지 않으면 圓筒型 *fin* 의 길이가 길어질수록 熱傳達은 감소되어 絕緣效果를 發生한다.

(나) 等價 絕緣 *fin*이 存在하기 위한 條件은 式 (13)이며, 이 條作은 式 (7)보다 더 制限的이다. 等價 *fin* 이 存在하는 경우 等價 *fin*의 길이는 式 (13) 또는 그림 3에 의하여 計算할 수 있다.

(다) 最適 圓筒型 *fin*은 參考文獻 〔4〕의 그림 11-11과 本 論文의 그림 3을 利用하여 設計할 수 있다.

參 考 文 獻

1. D.R. Harper and W.B. Brown, "Mathematical Equations for Heat Conduction in the Fins of Air-Cooled Engines", NACA Report No. 158 (1922).
2. E.R.G. Eckert and R.M. Drake, *Analysis of Heat and Mass Transfer*, p. 28. McGraw-Hill, New York (1972).
3. M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, p. 375. Dover, New York (1965).
4. M. Jakob, *Heat Transfer*, vol. 1, p. 234. Wiley, New York (1949).