게 임 理 論

朴 淳 達*

1. 서 론

(i) 定 義

게임理論(Game Theory)은 1944년에 발간된 Von Neuman and Oskar Morgenstern의 책 "Theory of Games and Econmic Behavior" 이후로 定立된 학문이라고 할 수 있다. 게임理論도 넓은 의미의 數理計劃의 일종으로써 그 기초는 1920年에 부터 형성되기 시작하였으나 1944년 그들의 책이 발간되면서 비로서 게임理論이 학문적인 바탕이 이루어 지고 널리 알려지기 시작했다.

이 게임理論은 어떠한 상황이든 利害相衝(conflict of interest)이 일어나는 경우를 다루기 위하여 개발된 것이다. 이 이해의 相衝은 경제뿐만 아니라 政治, 軍事, 및 一般社會生活에 흔히 일어나는 문제이다.

예를들어 두 경쟁회사가 판매시장 확장을 위하여 투쟁하는 경우를 보자. 한쪽 회사가 판매시장을 확보하면 다른 회사는 그 만큼의 시장을 잃게 된다. 이러한 경우는 두 회사가 치열한 비협조적 경쟁을 유지할 경우이다. 그러나 어떤 제 3자가 나타나 두개의 회사에 協商을 종용하여 協商이 이루어 질 수도 있다. 이 경우 어떻게 협상에 응할 것인가 가 문제를 제기된다. 경쟁상대가 3者일 경우에는 더욱 복잡해 진다. 3者일 경우에는 그중 두 회사가 결탁하여 다른 회사와 경쟁할 수 있게되는 데 이때 어떠한 조건으로 누구와 결탁해야 하느냐의 문제가 대두 된다.

이러한 형태의 문제는 이와같이 經濟的인 상황에서만 일어나는 것이 아니고 꼭 같이 서로 대치되고 있는 軍事상황에도 응용할 수 있고 그리고 나아가 서로 이해가 얽혀 있는 주변국가를 포함한 상황에서도 응용될 수 있다.

일상 생활에서도 '섯다', '짓고 땡', '포카' 등의 노름에서 어느 정도까지 열려보느냐의 문제는 바로 이해상충의 문제이다. 가끔 夫婦사이에 휴일을 보내는 방법에 알력이 생기는 수가 있다. 남편은 운동경기장에 가자고 한고 부인은 아이들과 수영장에 가자고 한다. 이 경우는 두 사람이 어떤 行爲에 대한 가치(utility)가 다르기 때문에 생기는 현상으로써 어떠한 결정이 양쪽에 다 같이 만족스러운 것인가 하는 문제는 바로 이해상충의 문제로 처리될 수 있다.

이와같이 여러가지 형태의 이해상충 문제를 다루기 위하여 발전된 것이 게임理論이다. 이러한 문제를 다루는 방법은 여러가지 있겠으나 이 게임理論은 좀 더 計量的으로 처리할려고 한다. 따라서 예를 들어 게이밍(gaming)에 비하여 이 게임이론은 문제의 formulation이 엄격하여 分析이 엄한rule에 의하여 解도 명확하게 나타난다. 물론 그 대신 게이밍에 비하여 응용범위가 제한되는 단점을 피할 수 없다.

(ii) 게임理論의 分類

게임理論은 각 利害相衝의 상황에 알맞는 모델을 개발하게 된다. 그런데 이 모델의 분류는 사람이든, 단체이든, 國家이든 그 상황에 관련된 사람 또는 단체가 몇 명인가에 따라 2人게임, 3人게임, N人게임등으로 분류한다.

* 서울工大, 産業工學科

그런데 2人이든, N人이든 解를 모색하는 도중 서로 協商이 가능한 경우가 있고 그렇지 않는 경우가 있다. 이런 경우를 각각 Conperative, Noncoperative 라고 부른다.

그런데 利害에 관심이 한 사람 밖에 없는 경우도 있다. 예를 들어 일주일 휴가를 얻어 여행을 갈까 하는 데 어디로 가는 것이 좋은 것인가 결정해야 할 경우에는 위에서 말한 경우와는 아주 다르다. 이 경우의 모델을 Game against Nature 라고 한다.

이외 이해상충에 관련된 者가 택할 수 있는 代案이 연속적인 경우, 예를 들어 두 군함이 포격전을 전개한다고 할때 포격의 가장 적합한 지점은 연속적인 성질을 가진다. 이러한 경우를 다루는 Differential game 이 있고 또한 확률의 개념이 내포한 Stochastic game 등 여러 형태의 게임이 있을 수 있다.

- 게임 모델
  - 2-人 게임
    - 非協助的 (Non-Cooperative)
      - 零和 (Zero-sum)
      - 非零和 (Non-zero-sum)
    - 協助的 (Cooperative)
  - N-人 게임
    - 非協助的 (Non-Cooperative)
    - 協助的 (Cooperative)
  - Game against Nature
  - Differential game, Stochastic game

그림 13 게임의 分類

(iii) 게임의 型態

게임은 그 형태로 보아 크게 Extensive form 과 Normal form 으로 나누어 볼 수 있고 Normal form 에서 N-人 게임의 특수한 경우를 나누는 Characteristic function form 을 나누어 볼 수 있다.

Extensive form 은 게임이 이루어 지는 절차를 tree 형태로 나타낸 것이다. 예를 들면 두 사람이 동전을 넌져 저녁사기의 내기를 한다면 이 상황을 Extensive form 으로 나타내면 그림 14와 같이 된다.

예로써 이 그림에서 Player 1 이 동전의 뒤를 던지고 Player 2 가 앞으 던졌으면 Player 2가 이긴다는 것을 나타내고 있다.

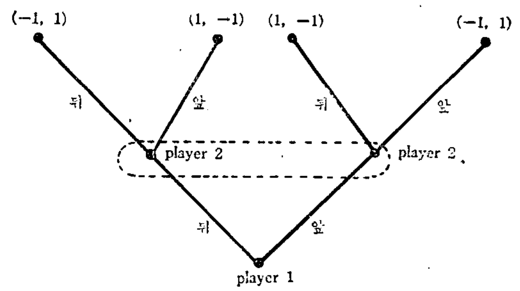

그림 4 동전게임

Normal form 은 게임을 數式的인 형태로 나타내 볼려는 형태이다. 각 player 가 각각 σ_i 라는 代案을 선택했을 때 일어나는 값을 $\pi(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$라고 두면 이 게임은 이 π의 함수를 통해서 처리할 수 있게 된다.

Characteristic function form 은 N-人 게임에서 2-人 게임에서는 일어나지 않는 團合(Coalition)의 현상이 일어날 수 있게되는 데 이러한 특성을 살리는 함수의 형태로써 게임을 처리할 때 Characteristic function form 이라고 한다.

그런데 Extensive form 은 복잡한 경우를 나타내기에는 너무나 번잡하기 때문에 학문적으로 게임을 다룰 때는 Normal form 과 Characteristic function form 으로 다루게 된다.

(iv) 用 語

게임 : 利害相衝 상황의 構造를 記述하는 규칙

團略(strategy) : 다른 명칭으로 代案(alternative), action, option 등의 용어가 있다. 戰略이란 게임을 운용하는 方案을 뜻한다.

單純戰略(pure strategy) : 게임을 운용하는 戰略이 여러개가 있을 때 그 중 하나만 선택하여 게임을 운용할 때 이 선택된 하나의 戰略을 單純戰略이라 한다.

混合戰略(mixed strategy) : 게임을 운용하는 戰略集合에 주어지는 確率分布를 混合戰略이라고 한다.

利得(payoff) : 각 참가자가 각기 單純戰略을 선택했을 때 나타나는 각 참가자에게 돌아가

는 利得

2. 2人 零和(Two person zero sum) 게임

(i) 條件및 假定

2人 零和게임은 우선 player(參加者)가 2人이어야 한다. 물론 이때 참가자는 個人일 경우도 있고 團體일 수도 있으며 國家일 수도 있다. 어떠한 경우에는 利害가 관련된 者둘밖에 없어야 한다.

이 2人은 각각 戰略集合을 가지고 있고 각 참가자의 전략은 상대방의 전략과는 상호獨立이다. 그리고 각 참가자의 戰略集合도 상호간 독립성이 유지되어야 한다.

그리고 2人이 게임을 운용할 때 서로 의견을 교환하거나 協商할 기회가 전혀 없으며 또한 상대방이 어떠한 전략을 선택할 것인가에 대해서도 전혀 情報가 없다. 따라서 서로 전혀 상대방을 모른 체 게임을 하게 된다. 이런 상황을 non-cooperative, stricty competive 라고 하며 零和게임은 이러한 상황에서 이루어진다.

2人 零和게임에서 참가자 1에 대한 이득은 바로 참가자 그의 손해이고 그 반대도 성립하여 참가자 2人의 이득과 손해가 일치하는 경우를 다루게 된다. 따라서 각 참가자의 이득과 손해를 합하면 零이 된다.

이 2人 零和게임은 결국 참가자 1은 그의 이득을 最大化할려고 하고 참가자 2는 그의 손해를 最小化할려고 한다. 결국 참가자 1에게는 어떠한 戰略이 그의 이득을 최대화시키는 것이며 참가자 2에게는 어떤 戰略이 그의 손해를 최소로 줄이는 것인지를 찾아 낼려고 한다.

(ii) 문제의 定立

참가자 1의 戰略을 $A_1, A_2, \cdots A_m$ 라고 하고 참가자 2의 戰略을 $B_1, B_2 \cdots, B_n$ 라고 하고 그 集合을 각각 A, B 라 하자. 그리고 참가자 1이 A_i 라는 戰略을 그리고 참가자 2가 B_j 라는 戰略을 선택했을 때 참가자 1에 돌아 오는 이득(payoff)을 U_{ji}, 참가자 2에게 돌아 오는 이득을 $-U_{ji}$ 라고 하자.

이때 2人 零和게임은 行列로 표시할 수 있으며 보통 참가자 1 즉 이 게임에서 참가자 2人 中 이익면에서 기준을 삼는 者를 왼쪽 즉 例의 위치에 두고 상대방을 윗쪽 즉 行의 위치에 둔다. 따라서 다음과 같은 行列이 된다.

$$\begin{array}{cc} & \text{참가자 2} \\ \text{참가자 1} & \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \cdots\cdots B_n \\ U_{11} & U_{12} \cdots\cdots U_{1n} \\ U_{21} & U_{22} \cdots\cdots U_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ U_{m1} & U_{m2} \cdots\cdots U_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{이득行列} \\ \text{(Payoff} \\ \text{matrix)} \end{array} \end{array}$$

여기서 U_{ij} 는 참가자 1에게는 이득, 참가자 2에게는 손해를 뜻하게 된다. 이 行列을 (A, B, U)라고 표현하기도 한다. 이 行列을 이득行列(payoff matrix)라고 하며 2人 零和게임 운용의 기본 모델이 된다.

(iii) 2人 零和게임의 例

2人零和게임은 일상생활, 軍事, 政治등 여러분야에 흔히 찾을수 있는 게임의 종류이다. 여기 소개하는 게임은 McDonald 와 Turkey 가 1949년 FORTUNE 誌에 발표한 Colonel Blotto 게임으로 알려져 있는 게임이다.

Colonel Blotto 와 그의 敵은 똑 같은 전투능력을 가진 연대를 각각 4개, 3개를 가지고 있다. 그런데 高地 2개를 두고 쟁탈권을 전개하는 데 각각 어떠한 배치가 가장 적절한 것인가가 문제이다.

지금 Colonel Blotto 가 2개의 고지를 점령키 위하여 제1, 제 2고지에 병력을 배치할 수 있는 代案은 (4,0), (0,4), (3,1), (1,3), (2,2)의 다섯 가지가 있다. 예를 들어 (4,0)은 제 1고지에 4개 연대, 제 2고지에 하나도 배치하지 않는 戰略을 뜻한다. 이에 비하여 敵軍은 (3,0), (0,3), (2,1), (1,2)의 4가지가 있다. 그런데 Colonel Blotto 의 利得函數(payoff function)는 예를 들어 1의 戰略 (3,1)과 敵의 戰略 (2,1)이 서로 전개되었을 대 Colonel Blotto 는 敵의 2개 연대를 전멸시키고 제 1고지를 차지할 수 있으며 제 2고지에서는 각각 1개연대씩 대치하여 승부가 나지 않는다. 그

래서 이때의 이득을 적 2개 연대를 섬멸시켰으므로 2점, 그리고 고지 1을 차지 했기 때문에 1점, 합하여 3점을 Colonel Blotto가 얻게 된다. 이와같은 方法으로 이득(payoff)을 구하게 되면 그림 3과 같은 利得行列(payoff matrix)을 얻게 된다.

이러한 例에서는 항상 이 이득함수가 論議의 代象이 된다. 이 이득함수가 실제로 그대로 반영하고 있는 것인가. 반드시 이렇게 實數로 나타날 수 있는 것인가 등 여러가지 문제가 나타난다. 그러나 실제 상황을 2人零和게임으로 定立할 때 돈이라든가 어떤 특정가치의 측정기준(즉 utility)이 있게되면 이득함수는 Colonel Blotto게임과 같이 實數函數의 이득행렬을 구할 수 있다. 그렇지 못할 경우 이득함수가 實數函數로 나타낼 수 없으면 그 解를 구하기 힘들게 된다.

$$
\begin{array}{cc|cccc}
 & & & \text{敵} & & \\
 & & (3,0) & (0,3) & (2,1) & (1,2) \\
\hline
 & (4,0) & 4 & 0 & 2 & 1 \\
\text{Colonel} & (0,4) & 0 & 4 & 1 & 2 \\
\text{Blotto} & (3,1) & 1 & -1 & 3 & 0 \\
 & (1,3) & -1 & 1 & 0 & 3 \\
 & (2,2) & -2 & -2 & 2 & 2
\end{array}
$$

그림 3 Colonel Blotto게임

(iv) 解의 槪念

① 참가자 1과 2의 이득과 손해

Colonel Blotto게임의 경우 Colonel Blotto가 그의 이득을 최대로 증대시키기 위해서는 예를 들어(4,0)을 선택하는 것이 좋다. 그런데 그의 적이 Colonel Blotto의 의사를 짐작했다면 (0,3)의 전략을 선택하고 말 것이다. 그러면 Colonel Blotto는 4의 이득을 바라다가 0의 이득을 얻게 된다. 더 나아가 Colonel Blotto가 적의 의중을 짐작하여 (0,4)란 전략을 선택하면 4란 이득을 다시 얻을 수 있으나 그의 적이 다시 이 Colonel Blotto의 선택에 대해 (3,0)이란 戰略을 선택해 버리면 다시 Colonel Blotto는 0이란 이득에 머물러져야 한다.

이와같이 이득의 최대화, 손해의 최소화에 대한 論議를 되풀이하면 해답없이 끝없이 전개된다.

그런데 한편 Colonel Blotto의 어떤 전략에 대해 적이 가장 좋은 戰略을 선택했을 때 값을 생각해 보자. 이때의 값을 安全水準

Colonel Blotto의 전략 ; (4,0), (0,4), (3,1), (1,3), (2,)

적의 가장 좋은 전략 ; (0,3), (3,0), (0,3), (3,0), (3,0)

Colonel Blotto의 이득 ; 0 0 −1 −1 −2

이라고 한다. 이때 Colonel Blotto의 安全水準을 가장높이는 戰略은 (4,0), (0,4)이다. 2人零和게임에서는 Colonel Blotto의 가장 좋은 전략이란 이러한 完全水準을 가장 높이는 戰略을 뜻한다. 그러니까 게임理論이란 Colonel Blotto에게 어떤 戰略이 그에게 가장 많은 이득을 가져다 주는 戰略을 말해주기 보다는 그에게 最小 어느 정도는 보장할 수 있는 戰略을 말해 줄 뿐이라 할 수 있다.

참가자 2 즉 Colonel Blotto의 敵에 대해서도 이와같은 論議가 그대로 적용된다. 게임이론은 적에게 결국 그의 손해를 높이는 데 최대 보장하는 戰略 즉 安全水準을 최대화하는 전략을 말해준다.

敵의 전략 : (3,0), (0,3), (2,1), (1,2)

Colonel Blotto의 가장 좋은 戰略 :

(4,0), (0,4), (3,1), (1,3)

敵의 손해(안전수준) :

−4 −4 −3 −3

즉 Colonel Blotto게임의 경우 (2,1), (1,2)가 된다.

② 鞍點(Saddle Point, Equilibrium Point)

2人零和게임에서는 결국 참가자 1은 그의 안전수준을 최대화하는 戰略을 찾는 것으로써 $Max_i\ Min_j\ U_{ij}$에 해당하는 전략을 선택하게 되고 참가자 2는 $Min_j\ Max_i\ U_{ij}$가 해당되는 戰略을 선택하게 된다.

그런데 $Max_i\ Min_j\ U_{ij} = Min_j\ Max_i\ U_{ij}$가 성립하는 U_{ij}가 있을 때(i, j)를 鞍點이라고 하고 U_{ij}를 게임의 値(the value of the game)이라고 한다. 그런데 이 鞍點은 게임에 따라 있을 수도 있고 없을 수도 있다. 예를 들어

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

과 같은 경우 (1,1)이 안점이며 4가 게임의 値가 된다. 그러나

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

의 경우에는 鞍點이 존재하지 않는다.

③ 混合戰略

前述한 바와 같이 다음의 게임은 鞍點이 없다. 이 게임

$$\begin{array}{ccc} & & \text{참가자 } 2 \\ & & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \text{참가자 } 1 & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

에서 참가자 1의 안전수준을 최대화하는 것은 A_2으로서 2, 그리고 참가자 2는 B_1으로서 3이 된다. 따라서 $Max_i\ Min_j\ U_{ij} \neq Min_j\ Max_i\ U_{ij}$가 되기 때문에 鞍點이 없다. 그런데 예를 들어 참가자 1이 $\left(\frac{1}{2}A_1,\ \frac{1}{2}A_2\right)$라는 確率분포로써 즉 A_1, A_2를 각각 50%의 확률로써 섞어서 선택하게 되면 그에게

$$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$$

로써 참가자 2가 어떠한 戰略을 선택하든 $\frac{5}{2}$라는 값이 그에게 보장된다. 單純戰略을 선택했을 때는 그 밖에 보장받지 못했지만 이와같이 혼합전략을 사용하면 $\frac{5}{2}$가 보장받게 된다. 참가자 2에도 마찬가지로 B_1와 B_2를 $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$의 확률분포로 혼합전략을 적용하면 참가자 2에게도 최소 $\frac{5}{2}$가 보장받게 된다.

지금 참가자 1과 2의 혼합전략을 각각 X, Y라고 하자. 그러면 참가자 1이 보장받는 양은 결국 $\underset{y}{Min}\ \underset{x}{Max}\ XUY'$이 되고 참가자 2는 $\underset{x}{Max}\ \underset{y}{Min}\ XUY'$가 된다. 이 두 값사이에는

$$\underset{x}{Mix}\ \underset{y}{Min}\ XUY' \leq \underset{y}{Min}\ \underset{x}{Max}\ XUY'$$

가 성립되며 等式이 성립될 때 그 값을 게임의 値라고 한다.

④ 게임理論의 基本定理

참가자 1과 2의 혼합전략 $X=(x_1, x_2, \cdots x_m)$, $Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 가운데 어떤 혼합전략 X^*, Y^*가 있어서 게임의 値 v와 다음과 같은 等式이 성립될 때 $(X^*,\ Y^*)$를 이 게임의 解라고 하고

$$X^*UY^{*\prime}=v$$

X^*, Y^*를 참가자 1과 2의 最適戰略(optimal strategy)라고 한다.

게임理論의 基本定理 ; 2人 零和게임에서는 어떤 값 v가 존재하여 다음 等式이 성립한다.

$$\underset{x}{Max}\ \underset{y}{Min}\ XUY' = \underset{y}{Min}\ \underset{x}{Max}\ XUY'$$

(v) 解를 구하는 方法

① 축차 近似法(Successive Approximations)

이 방법의 근본 개념은 어떤 참가자의 單純전략에 대해 상대방의 최선의 戰略을 선택하는 작업을 계속한다면 결국 각 참가자가 선택할 混合戰略을 구할 수 있다는 것이다.

우선 記號를 설명해 두자.

N: 回數

$i(N)$; N번째 참가자 1이 선택하는 단순전략

$j(N)$; N번째 참가자 2가 선택하는 단순전략

$K_i(N)$; 참가자 2가 계속 i란 단순전략을 사용할 때 N번째 후 참가자 1이 받는 이득

$H_i(N)$; 참가자 1이 계속 i란 단순전략을 사용할 때 N번째 후 참가자 2가 받는 이득

$V(N)$; N번째 후 참가자 1이 평균 최소한 예상하는 액수

$\bar{V}(N)$; N번째 후 참가자 1이 평균 최대한 예상하는 액수

이때

$$V(N)=\frac{1}{N}\ \underset{j}{Min}\ K_j(N)$$

$$\bar{V}(N)=\frac{1}{N}\ \underset{i}{Max}\ H_i(N)$$

가 된다.

지금 예로써 다음과 같은 게임을 들어 보자.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{참가자 } 2 \\
 & \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \end{array} \\
\text{참가자 } 1 \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

참가자 1이 ①을 선택하면 $K_1(N)$ 즉 참가자 2가 $\boxed{1}$을 계속 선택할 때 참가자 1이 받는 액수는 2가 된다. 꼭같이 $K_2(N)$는 1, $K_2(N)$은 0이 되며 $V(N)$는 결국 2, 1, 0 중 최소량 0가 된다. 이것은 결국 참가자 1의 전략 ①에 대해서는 참가자 2가 $\boxed{3}$의 전략을 선택하는 것이 가장 좋다는 뜻이 된다. 그러면 참가자 2 의 전략 $\boxed{3}$에 대해서 참가자 1이 ①을 선택하면 0을 받게 되고, 즉 $H_1(N)=0$가 되고 마찬가지로 $H_2(N)=3$, $H_3(N)=-3$가 되어 $V(N)=3$이 된다. 이것은 참가자 2의 $\boxed{3}$에 대해 참가자 1은 ②를 선택하는 것이 가장 좋다는 결론이 나온다. 이러한 절차를 계속하면 그림 15와 같이 된다.

N	$i(N)$	$k_1(N)$	$k_2(N)$	$k_3(N)$	$v(N)$	$j(N)$	$H_1(N)$	$H_2(N)$	$H_3(N)$	$v(N)$	$v-v$
1	①	2	1	0	0	$\boxed{3}$	0	3	−3	3.0	3
2	②	4	1	3	0.5	$\boxed{2}$	1	3	0	1.5	1
3	②	6	1	6	0.33	$\boxed{2}$	2	3	3	1.0	0.67
4	②	8	1	9	0.25	$\boxed{2}$	3	3	6	1.5	1.25
5	③	7	4	6	0.8	$\boxed{2}$	4	3	9	1.8	1
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

그림 15 축차 근사법

이러한 절차를 계속할 수 있다. 회수를 많이하면 할수록 정확한 解를 구할 수 있다. 결국 解는

$$X^0=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\text{①의 회수}}{N},\ \frac{\text{②의 회수}}{N},\ \frac{\text{③의 회수}}{N}\right)$$

$$Y^0=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\boxed{1}\text{의 회수}}{N},\ \frac{\boxed{2}\text{의 회수}}{N},\ \frac{\boxed{3}\text{의 회수}}{N}\right)$$

가 된다. 그러나 회수를 무한히 한다는 것은 불가능 하기 때문에 요구되는 정확도에 따라 회수를 조정할 수 있다. 회수를 5번으로 한정했을 때 解는

$$X=\left(\frac{1}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{1}{5}\right),\quad Y=\left(\frac{0}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5}\right)$$

이 된다.

② 線型計劃法에 의한 解法

어떤 게임 (A,B,U)가 다음과 같이 주어져 있다.

$$(A,B,U)=\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots\cdots & U_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{m2} & U_{mn} & \cdots\cdots & U_{mn} \end{pmatrix}$$

그리고 이 게임의 值를 v라고 하자. 그러면 참가자 1의 어떠한 混合戰略 $X=(X_1, X_2,\cdots, X_m)$에 대해서도 다음 不等式이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^{m} u_{ij}\,x_i\geq v,\quad j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$$

그런데 2人 零和게임에서는 참가자 1은 다음 等式을 만족하는 $X^*=(X_1^*, X_2^*.\cdots, X_m^*)$를 구하고자 한다.

$$\underset{j}{Min}\sum_{i=1}^{m} u_{ij}\,x_i^*=v$$

여기서 $x_i/v=z_i$라고 두면 결국 이 문제는 다음과 같은 선형계획법으로 변환된다.

$$Min\sum_{i=1}^{m} Z_i$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{m} u_{ij}\,z_i\geq 1,\quad j=1,\ 2,\cdots\cdots,n$$

$$z_i\geq 0,\ \text{모든 } i$$

이 선형계획법 문제를 푼다면 $x_i=v\cdot z_i$를 구하면 결국 참가자 1의 最適解를 구하게 된다.

참가자 2에게는 어떤 혼합전략

$Y=(y_1,\ y_2,\cdots\cdots, y_n)$에 대해

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} y_j \leq v, \quad i=1, 2, \cdots\cdots m$$

가 성립되고 다음 式을 만족시키는

$Y^* = (y_1^*, y_2^*, \cdots\cdots, y_n^*)$를 구하고져 한다.

$$\underset{i}{Max} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} y_j^* = v$$

결국 $y_j/v = \omega_j$ 라고 두면 이 문제는

$$Max \sum_{j=1}^{n} \omega_j$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij}\omega_j \leq 1, \quad i=1,2,\cdots\cdots,m$$

$$\omega_j \geq 0, \quad v_j$$

과 같이 되어 선형계획 문제가 된다.

3. 2人 非零和게임 (Two Person Non-Sero-Zum Game)

2人 非零和게임은 零和게임의 경우 참가자 1과 2가 이익이 완전히 상반하는 경우와 달리 각각의 이익과 손해가 일치하지 않는 경우를 통 털어 일컫는다. 이런 경우 이익과 손해의 차이가 무한일 수도 있겠으나 여기에서는 有限한 경우만을 다룬다. 零和게임은 非零和게임의 특수한 경우로 볼 수 있다.

이 非零和게임에서는 두 참가자가 정확히 상반되는 이익과 손해액을 가지기 때문에 零和게임이 하나의 行列 즉 이득행렬로써 표현할 수 있는 데 비해 이 非零和게임에서는 두개의 行列로써 표현하게 된다.

지금 참가자 1의 戰略을 $i=1,2,\cdots,m$ 라 두고 참가자 2의 戰略을 $j=1,2,\cdots,n$ 라고 들 때

a_{ij} ; 참가자 1이 i 전략을 그리고 참가자 2가 j 전략을 사용할 때 참가자 1이 받는 이익

b_{ij} ; 참가자 1이 i 전략을 그리고 참가자 2가 j 전략을 사용할 때 참가자 2가 받는 이익

라 둔다. 그러면 이 非零和게임은 Bimatrix 으

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}), & (a_{12}, b_{12}) \cdots (a_{1n}, b_{1n}) \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ (a_{m1}, b_{m1}), & (a_{m2} b_{m2}) \cdots (a_{mn}, b_{mn}) \end{pmatrix}$$

로 표현된다. 이 게임을 Bimatrix 게임이라고 부른다.

이 Bimatrix 게임은 두 가지 경우가 있다. 첫째 어떤 형태의 結託(Collusion)이라도 허용되지 않은 非協助的(non-cooperative) 경우가 있고 두째로 結託(Collusion)이 허용되는 協助的(Cooperative)의 경우가 있다.

이 장에서는 이 두 경우를 각각 별도로 다루기로 한다.

(1) 非協助的 게임 (Non-Cooperative game)

① 假定 및 條件

참가자는 2명이며 2人 零和게임에서의 조건과 같다. 단 이 게임에서는 참가자 2명이 각각 얻는 이익과 손해가 합쳐 零이 되지 않는다.

② 例 1

battle of sexes 로 알려진 예로써 부부가 휴일을 즐기는 방법을 논의하는 도중 운동경기를 보러 가는 것과 극장에 가는 두 방안이 나와 의견이 엇 갈린다. 이 경우 남편과 부인이 운동경기다 영화에 대한 자기 가치가 다르기 때문이지 각각 떨어져서 각기 좋은 것을 선택한다는 것은 또한 바람직 하지 않다. 그래서 다음과 같은 이익행렬(payoff matrix)이 나타난다.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{부인} \\ & & \begin{array}{cc} \text{운동경기} & \text{영화} \end{array} \\ \text{남편} & \begin{array}{c} \text{운동경기} \\ \text{영　화} \end{array} & \begin{pmatrix} (2,1) & (-1,-1) \\ (-1,-1) & (1,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

즉 부부가 다 같이 운동경기에 참관하러 갈 때는 부인보다도 남편의 이득이 더욱 많다. 그러나 다 같이 영화관람하러 가면 반대가 된다. 그러나 이 두 경우 모두 각기 흩어져서 가는 것 보다는 낫다.

③ 例 2

A.W. Tucker 가 제시한 例로써 prisoners' dilemma 라고 알려져 있는 예이다. 지금 두 사람이 범행을 서로 알고있는 범법자가 잡혔다. 그런데 이 두 사람이 서로 상대방의 범법행위를 알고 있기 때문에 범죄행위를 자백할 때와

안할 때, 그리고 서로 협동해서 침묵을 지킬 때와 아닐 때에 따라 刑量이 달라진다.

$$\begin{array}{cc} & \text{범법자 2} \\ & \begin{array}{cc} \text{침묵} & \text{자백} \end{array} \\ \text{범법자 1} \begin{array}{c} \text{침묵} \\ \\ \text{자백} \end{array} & \begin{pmatrix} \text{각각 1년} & \text{범법자1:10년, 범법자2:3개월} \\ \text{범법자 1:3개월, 범법자 2:10년} & \text{각각 8년} \end{pmatrix} \end{array}$$

이것을 實數値로 고친 결과는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} (0.9,\ 0.9) & (0,\ \ 1) \\ (1,\ \ 0) & (0.1,\ 0.1) \end{pmatrix}$$

물론 실수치가 반드시 이렇게 되어야 한다는 것은 아니다.

④ **평형점**(Equilibriun Point)

주어진 Bimatrix (A,B)에서 한 쌍의 混合戰略(X^*, Y^*)가 다음 조건을 만족시키면 平衡에 있다(in equilibrium)고 말한다.

$$XAX^{*\prime} \leq X^*AY^{*\prime}$$

$$X^*BY' \leq X^*BY^{*\prime}$$

예 1의 경우 平衡點은[(0,1), (1,0)]과 [(0,1)과 (0,1)]이 된다. 즉 다같이 운동경기에 참관하러 가거나 다같이 영화관 람하러 가는 것이 平衡點이 된다. 그러나 예를 들어 [(0,1) (1,0)]은 평형점이 되지 못한다.

定理 : 모든 Bimatrix 게임은 적어도 하나의 平衡點이 존재한다.

⑸ **解**

非協助的게임의 모든 평형점의 쌍들이 서로 可換(interchangible)일 때 Nash의 의미로 可解(Soluable in the sense of Nash)라고 한다.

예 1의 경우 平衡點이 [(1.0), (1.0)]과 [(0.1), (0.1)]이 있으나 서로 可換이 아니다. 즉 [(1.0), (0.1)]은 평형점이 되지 못한다. 따라서 Nash의 의미로 非可解이다. 그러나 例 2의 경우 평형점은 [(0.1), (0.1)]로써 可解가 된다.

(ii) 協助的 게임(Cooperative Game)

① **假定 및 條件**

이 게임에서는 참가자 2人 상호간에 협상이 가능하다. 말하자면 다같이 약속하에 어떠한 戰略을 택할 수도 있고 또는 사전에 자기는 어떤 戰略을 택한다고 선언하고 택할 수도 있다. 이러할 事前 의사 전달은 결국 게임 운영에 영향을 미치게 된다.

② **Von-Neumann과 Morgenstern의 解**

참가자들이 협조해서 게임운영할 때 얻어지는 이득(Payoff)의 集合을 R'라고 두자. 예를 들어 예 1의 battle of sexes의 R'는 그림 5와 같이 된다.

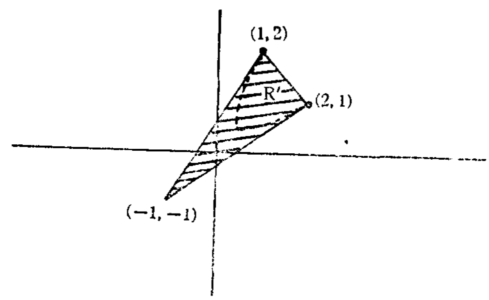

그림 5 예 1의 R'

정의 : R'의 어떤 점 (u,v)을 다른 點(u',v')에 대해 다음과 같은 관계식이 성립하면 jointly dominated 하다고 한다.

$$u' \geq u,\quad v \geq v$$

정의 : Undominated outcome을 R'의 Joint maximal set 또는 Pareto optimal set 라고 한다.

예를 들어 그림 6의 경우 Pareto optimal set는 線分 abcd가 된다.

그런데 여기서 각 참가자에게 그가 Maximin 戰略을 사용해서 독자적으로 보장 받을 수 있는 최대량을 보장하는 R'의 Joint maximal set로써 그 게임의 Negotiation set를 형성하게 된다. 이 Negotiation set를 Von Neumann과 Morgenstern의 Cooperative solution이라고 한

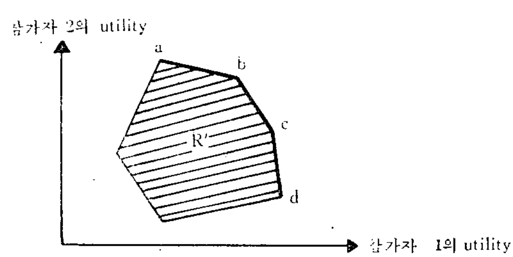

그림 6

다. 그림 6의 경우 그림 7과 같은 解를 얻게 된다.

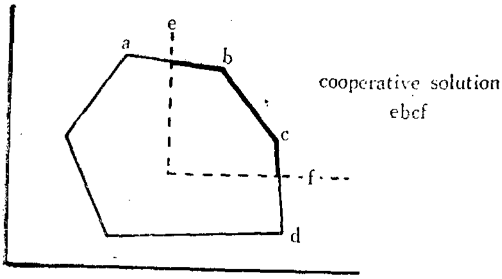

그림 7

4. N人 게임

N人 게임이 2人 게임과 크게 다른 點은 2人의 게임에서는 結託(Coalition)이란 것이 없지만 N人 경우 즉 3人이상의 경우 그 일부가 서로 결탁하여 타인과 대결할 수 있는 가능성이 있다는 것이다. N人 게임에서는 이러한 결탁때문에 복잡한 문제가 많이 야기된다. 결탁은 모든 가능한 경우를 모두 허용할 수도 있고 어느 정도의 제한을 가하면서 게임을 처리할 수도 있다.

그리고 副次的支拂(side payment)의 문제도 야기 된다. 결탁을 할때 결탁을 하는 상대방에게 별도의 코미션이든 다른 형태의 副次的支拂을 줄 수 있다. 따라서 N人 게임에서는 참가자가 상호의사를 소통하여 결탁이 가능한지 아닌 지 또는 副次的支拂이 있는지 없는지 등으로 분류될 수 있다.

이 N人게임을 참가자가 N人이 있다. 이 참가의 集合을 In이라고 두고 각 참가자의 戰略集合을 각각 $S_1, S_2, \cdots, S_n$라 두자. 그리고 각 參加者가 $R_i(i=1,2,\cdots,n)$라는 戰略을 택할 때 참가자 i에게 돌아 오는 이익이 $M_i(R_1, R_2, \cdots, R_n)$가 되는 n개의 실수値 이익함수(payoff function), $M_1, M_2\cdots, M_n$가 있다고 하자. 이때 이러한 형태로써 게임을 처리할 때 正規型이라고 한다.

여기에서 S_i의 $s_i(i=1,2,\cdots,n)$은 각기 單純戰略이 되겠으나 각 s_i에 대해 $\sigma_i(s_i)$의 確率을 주는 $\sigma_i=[\sigma_i(s_1), \sigma_i(s_2), \cdots, \sigma_i(s_n)]$을 생각하면 이 σ_i가 곧 混合戰略이 된다. 이 混合戰略에 대해서는 각기 확률이기 때문에 $\sigma_i(s_i)\geq 0$, $\sum_{si\in Si}\sigma_i(s_i)=1$ 이 된다.

그러면

$$M_j(s_1, s_2, \cdots, \sigma_k, \cdots, s_n)=\sum_{sk\in Sk}\sigma_i(s_i)M_j(s_1, s_2, \cdots, s_k, , \cdots, s_n)$$

가 성립한다.

N人게임에서 전술한 바와 같이 協助的게임과 非協助的게임이 있다. 먼저 協助的게임에 대해 살펴보자.

(가) 副次的支拂

副次的支拂은 여러가지 형태로 나타난다. 선거에서 일정한 額數를 주고 유력한 후보를 사전에 출마를 포기하게 할 때 거래되는 것도 이 副次的支拂이다. 또 어떤 공사를 受注할 때 코미션을 주고 공사를 낙찰받게 될때 거래되는 코미션도 하나의 副次的 支拂이다. 이러한 副次的支拂은 돈 뿐만 아니라 物件, 노력봉사등 여러가지의 형태를 가진다.

例로써 세사람이 게임을 하는데 만일 어느 두 사람이 결탁을 하면 나머지 한 사람은 결탁한 두 사람에게 각각 1씩 주어야 한다고 하면 가능한 利得形態는 (−2,1,1), (1,−2,1) (1,1,−2)의 3가지가 된다. 이러한 게임에서는 세 사람이 두 사람씩 결탁할 수 있는 조건이 똑같기 때문에 이득형태가 꼭같이 일어날 수 있다. 따라서 이 세 이득이 안정되어(Stable) 있는 상태에 있다.

그러나 예를 들어 참가자 2와 3이 결탁을 했을 때는 참가자 1이 2와 3에게 각각 1대신 2에게는 1.1을 3에게는 0.9를 지불한다고 하기로 하자. 그러면 참가자 2는 결탁에 어려운 처지에 놓이게 된다. 왜냐하면 참가자 3은 참가자 1과 결탁할려고 하기 때문이다. 그러나 이때 참가가 2가 3에게 0.1의 副次的支拂을 주겠다고 제의하면 결탁에 어려움이 없게 된다.

이 副次的支拂은 여러 형태로 나타나고 副次的支拂의 각 참가자의 價値가 각기 다르다. 그런데 이 각각의 가치가 서로 비교할 수 없

게 되면 게임의 운용이 불가능하게 된다. 그리고 여러가지 형태의 이득(payoff)이 混用하게 되면 여러가지 복잡한 문제가 발생한다. 따라서 앞으로는 서로 轉移가능한(transferable)한 價値測度(utility)가 있다고 가정한다. 즉 N人 되임은 이 價値測度를 사용하여 正規型으로 처리하게 된다.

(나) 結託(Coalition)

參加者의 집합 I_n에서 이 I_n의 部分集合을 결탁이라고 한다. 이 部分集合은 參加者 들에서 部分集合 S만큼 서로 결탁한다는 뜻이다. 어떠한 결탁도 허용한다면 I_n의 모든 부분집합이 결탁이 되는 셈이다.

따라서 결탁이 허용되지 않을 경우 예를 들어 非協助的인 경우에는 2人 이상의 결탁이 이루어지지 않기 때문이다. 이러한 경우의 例를 들어 보면 $I_3=\{1,2,3\}$이라고 할 때 이 I_3의 結託構造는 $(\{1\},\{2\},\{3\})$이게 된다. 그러나 모든 결탁이 허용된다면 이때의 結託構造는 $(\{1\},\{2\},\{3\},\{1,3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\})$이 된다.

(다) 特性函數(Characteristic Function)

特性函數란 參加者의 집합 I_n의 부분집합 S에 實數를 주는 함수로써 다음 조건을 만족하는 實數値函數를 뜻한다.

즉

$$v\ ;\ \{S\subset I_n\} \longrightarrow \{\text{實數}\}$$
$$S \longrightarrow v(S)\ ;\ \text{어떤 實數}$$

로써 여기서 $v(S)$는 게임에서 I_n의 部分集合 S가 얻을 수 있는 價値(utility)의 量을 의미하며

(i) $v(I_n)=0$

(ii) $v(S)=-v(-S)$, 단 모든 부분 집합 $S\subset I_n$에 대하여 特性函數라 한다.

그런데 零和게임의 경우 特性函數는 다음의 조건들을 만족시킨다.

(i) $v(I_n)=0$

(ii) $v(S)=-v(-S)$, 단 모든 $S\subset I_n$

(iii) $v(\phi)=0$

(iv) 만일 R과 S가 I_n의 部分集合이고 $R\cap S=\phi$이면

$$v(R\cup S)\geq v(R)+v(S)$$

그러나 非零和 게임이 되면 조건 (i)과 (ii)는 만족되지 않는다.

그런데 참가자들 중 結託이 단독으로 행동하는 것보다 利롭지 못할 때 이 게임을 inessential 게임이라고 한다. 즉 조건 (iv)에서 等式이 되는 경우이다.

즉,

$$v(R\cup S)=v(R)+v(S)$$

따라서 어떤 게임이 inessential이 되는 필요충분조건은 다음 조건을 만족시키는 것이다.

$$v(I_o)=\sum_{i=1}^{n} v(\{i\})$$

inessential이 아닌 게임은 모두 essential게임이라고 한다.

(라) S—同値(S-equivalence)

예를 들어 두 사람이 어떠한 전략을 선택하는 데 이득(paxoff)이 한 사람은 圓으로 돼 있고 다른 사람은 錢으로 되어 있는 이득 行列을 사용한다고 할 때 두 사람의 선택은 조금도 틀리지 않는다. 이런 경우는 戰略的으로 同値인 것이다. 그래서 두개의 特性函數 v와 v'가 있는 데 I_n의 모든 부분집합 S에 대하여

$$v(S)=c\cdot v'(s),\ \text{단 } c\text{는 常數}$$

가 성립할 때 v와 v'를 戰略的으로 同値라고 한다. 나아가 두 함수가 어떤 常數만큼 차이가 나더라도 꼭같은 결과가 나타난다.

그래서 n개의 常數 $a_1, a_2, \cdots. a_n$과 陽의 常數인 c가 있어 모든 $S\subset I_n$에 대하여

$$v'(s)=c\cdot v(s)+\sum_{i\in S} a_i$$

가 성립하면 特性函數 v와 v'를 가진 두개의 N人 게임은 서로 S—同値라고 한다.

(마) 正規化(Nornalization)

S—同値의 관계는 反射(reflexive), 대칭(symmetric), 轉移律(transitive)을 만족시키기 때문에 S—同値로써 特性函數를 몇 그룹으로 合類할 수 있다.

(i) (−1,0)正規化

Von-Neumann과 Morgenstern 의 定理:

각각 同値 Class에서 다음 관계식을 만족시키는 특성함 수는 단 하나뿐이다.

$v(\{i\}) = -1, \ V_i \in I_n$

그리고

$v(I_n) = 0$

(ii) (0,1) 正規化

이것은 상기 조건에서 $v(\{i\}) = 0$ 그리고 $v(I_n) = 1$이 되면 바로 (0,1)正規化가 된다.

(바) Imputation 과 Core

게임을 운영하는 동안에 각 참가자가 正規型의 利得行列에서 얻어지는 이득과 그리고 副次的支拂를 전부 합쳐 참가자 i의 이득 합계를 x_i라고 하자. 그러면 n 참가자에 대해서는 즉

$X = (X_1, X_2, \cdots. X_n)$

가 생긴다.

이때 다음 두 조건을 만족시키면 이 n-tuple을 특성함수 v를 가진 게임의 Imputation 이라고 부른다.

(i) $v(\{i\}) \leq x_i, \ V_i \in I_n$

(ii) $\sum_{i \in In} x_i = v(I_n)$

그리고 다음 조건을 추가로 만족 시키면 Core 라고 부른다.

(iii) $v(s) \leq \sum_{i \in S} x_i$, I_n의 모든 s

따라서 非零和게임의 essential 게임을 포함하여 空集合의 Core를 가지게 된다. Constant-sum 게임에서 Core가 空集合이 아니면 그 게임은 inessential 이 된다. 그리고 平衡에 도달하는 利得은 바로 impution 이란 것을 알 수 있다.

그리하여 뒤에서도 거론 되겠지만 解의 기본 槪念에서 imputation 의 조건들을 만족시키지 않는 集合들은 제거된다.

(iv) 解

어떤 게임에서 結託을 T라고 두자. 그러면 이 T는 I_n의 부분집합들로 이루어져 있는 집합이 된다. 예를 들어 $I_3 = \{1,2,3\}$이라고 할 때($\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$)도 T가 될 수 있고 ($\{2,3\}$, $\{1\}$)도 T가 될 수 있다.

지금 두 개의 imputation $Y = (y_1, y_2, \cdots. y_n)$, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$가 있다고 하자. 어떤 結託 T가 있어 공집합이 아니고 다음 조건이 성립하면 Y는 T에 대해서 X를 우월(dominate)하다고 한다.

(i) $v(T) \geq \sum_{i \in T} y_i$

(ii) $y_i > x_i \ \ V_i \in T$

이때 이 T를 效率的集合라고 한다.

Von-Neuman 과 Morgenstern 은 다음 조건을 만족시키는 imputation 의 集合 A를 特性函數型에 있어서 게임의 解라고 한다.

(i) 만일 $X, Y \in A$ 면, X와 Y는 서로 우월하지 않다.

(ii) A에 속하지 않는 Z에 대해 Z를 우월하는 imputation 이 최소한도 하나 이상 A 안에 있어야 한다.

예로써 非零和 3人 게임의 예를 들어 보자. 이 게임의 (0,1)正規化는 다음과 같다.

$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$

$v(\{1,2\}) = v(\{2,3\}) = v(\{1,3\}) = 1$

$v(\{1,2,3\}) = 1$

그런데 여기서 結託 $\{1,2\}$를 생각해 보면 결탁해서 1을 받게 되는 데 참가자 1과 2가 꼭같이 나눈다고 볼 수 있다. 다른 結託에도 꼭같이 적용된다. 그래서

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right),$$

$$\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

의 세 개의 imputation 이 서로 우월하지 않는 imputation 이 된다.

위의 세계의 집합을 ˇ 라고 하자. 그러면 예를 들어 $\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$은 F에 속하지 않는다. 그런데 , 에 속하는 $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$은 結託 $\{1,2\}$에 대하여 $\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$을 우월한다.

따라서 F는 解의 모든 조건을 갖추고 있어 이 게임의 解가 된다.

(사) **非協助的 게임**(Non-Cooperative game)

N人 非協助的 게임은 2人 非協助的 非零和 게임과 비슷하다. 이 게임에서도 역시 문제가 되는 것은 平衡點(equilibrium point)의 存在 여부이다.

의금 임의의 참가자 i의 戰略集合 S_i에 있어 어떠한 전략 r_i에 대해서도 다음의 부등식이 성립하면 n-tuple $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$을 平衡點이라고 한다.

$$M_i(s_1, s_2, \cdots, s_i, \cdots, s_n) \geq M_i(s_1, s_2, \cdots, r_i \cdots, s_n)$$

이렇게 平衡點을 정의하게 되면 다음과 같은 Nash의 定理가 성립한다.

定理(Nash)의 基本定理 ; 混合戰略 集合에서는 모든 有限게임은 최소한 하나의 평형점을 가진다.

5. 對自無 게임

對自然게임은 게임을 운영하는 편이 하나 있는 경우이다. 그러나 이 게임을 운영하는 者는 여러 개의 戰略을 가지고 最適의 것을 선택할려고 할 때 여러 가지 基準에 비추어 선택하게 된다.

이렇게 볼 때 결국 게임을 운영하는 者는 둘인 데 하나는 利害에 적극적으로 행동하는 반면 다른 하나는 이해에 관심이 없는 자로 보면 2人 게임으로 볼 수 있다. 그러나 물론 利得(payoff)은 1人에 한하여 뜻이 있게 된다. 이때 후자를 自然(Nature)이라 부른다.

이 對自然게임은 under certainty의 경우, under risk의 경우, under un,certainty의 경우로 나누어 볼 수 있는데 under certainty는 自然이 가지는 戰略이 하나 뿐인 경우가 되면 이때의 게임은 단순하게 된다. under certainty는 自然에 대하에 定量的으로 확실하게 어떤 값(utility)을 줄 수 있을 때를 말하고, Game under risk의 경우는 自然이 가지는 戰略에 確率分布로 주어지는 경우를 말한다. 그런데 이렇게 확률분포가 주어지면 확률처리를 하여줌으로써 처리된다.

(가) 모델의 定立

게임을 운영하는 2人 중에 利害에 적극적으로 행동하는 者를 意思決定權者(Decision Maker), 그리고 다른 者를 自然이라고 한다.

지금 意思決定權者의 戰略을 $A_1, A_2, \cdots, A_n$이라고 하자. 그리고 自然의 戰略을 state라 부르는 데 state를 $s_1, s_2, \cdots, s_n$이라고 하자. 그리고 A_i와 S_j에 대한 利得(payoff)은 U_{ij}라고 하자. 그러면 다음과 같은 行列이 이루어 진다.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & \cdots\cdots\cdots & S_n \end{array} \\ (A,S,U)=\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array} & \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots\cdots & U_{1n} \\ U_{21} & U_{11} & \cdots\cdots & U_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{m1} & U_{m2} & \cdots\cdots & U_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

例로써 오므렛트의 문제를 보자. 어떤 主婦가 접시에 다섯 개의 달걀을 이미 깨뜨려 두고 있다. 그런데 여섯 개째의 달걀을 들고 이것을 깨뜨려 섞어 여섯개의 오므렛트를 만들 것인지 아니면 여섯 째가 썩은 달걀인지 모르니 다른 그릇에 깨뜨려 보아 섞을 것인지를 망설이고 있다. 이 상황을 行列로 표시해 보면 다음과 같다.

戰略(strategy) \ state	썩 은 달 걀	좋 은 달 걀
여섯개와 아예 섞어 버린다	오므렛트를 못 먹음	여섯개의 오므렛트
다른 접시에 일단 깨뜨린다	다섯개의 오므렛트 그리고 접시를 씻어야 함	여섯개의 오므렛트 그리고 접시를 씻어야 함
버린다	다섯개의 오므렛트	다섯개의 오므렛트 그리고 달걀하나 버림

그림 48 오므렛트의 문제

이 그림 48에서는 각 경우가 단순히 順序로 나타난다. 다시 말하면 6가지의 경우로 이루어지는 行列의 각 要素는 단순한 順序가 주어져 있을 뿐이다. 그러나 이러한 順序에 어떠한 價値基準(utility)를 적용하면 實數로 전환시킬 수 있다. 실제 對自然게임의 경우를 이러한 行列로 바꾸어 보면 順序만이 주어지는 경우도 있고 數字로 주어지는 경우도 있다.

(나) 解

지금 어떤 利得行列(A,S,U)가 주어졌다고 하자. 그런데 對自然게임의 경우에는 決定權者는 하나 뿐이기 때문에 이 決定權者가 어떤 基準(criterion)을 사용하여 A 중의 어떤 戰略을 선택하느냐 하는 것이 문제이다. 그래서 對自然게임에서는 어떠한 基準을 사용하여 最

適의 적략을 선택하느냐가 문제이다.

對自然게임에 적용되는 決定基準은 利得의 형태 즉 實數로 주어지느냐 아니면 順序로 주어지느냐에 따라 다르다. 그러나 여기에서는 그 利得이 實數로 주어지는 경우의 基準을 논의하기로 하자.

(i) Maximin기준(Wald기준이라고도 함)

이 基準의 基本 着想은 安全水準을 最大化하는 것이다. 따라서 다음 관계식을 만족시키는 $A_k(\epsilon A)$를 최적의 解로 선택한다. 이때 이 A_k를 Maximin 기준이 의한 最適의 解라고 한다.

$$Min_j U_{kj} \geq Min_j U_{ij} \quad V_i$$

(ii) Maximin-regret 基準(Savage 기준이라고도 함)

이 기준의 기본 착상은 위험 부담(risk 또는 regret)를 줄이자는 데 있다. 그래서 주어진 이익 行列(A,S,U)에서 각 列에서 최대 위험부담인 것을 뺀

$$U_{ij} = U_{ij} - Max_h U_{hj}$$

것으로 정의 한 다음, 다음 식을 만족시키는 A_k를 선택하면 이 A_k가 이 기준의 최적의 해가 된다

$$Min_j r_{kj} \geq Min_j r_{ij} \quad V_i$$

예를 들어

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 100 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots \text{payoff matrix}$$

과 같이 이익 행렬이 주어 졌다면 이 行列에서 위험부담 行列를 만들면 다음과 같이된다.

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -99 \end{pmatrix} \cdots \text{regrett payoff matrix}$$

따라서 여기서는 A_1이 Maximin-regret 기준에 의하면 최적의 해가 된다.

(iii) Hurwicz's α기준

이 Hurwicz's α 기준은 maximin 기준이 소극적·비관적인 선택과 적극적·낙관적으로 각 列의 maximum을 선택하여 이들 선택 사이의 戰略을 구할려고 하는 着想에서 비롯되었다.

지금

$$m_i = Min_j U_{ij}, \quad M_i = Max_j U_{ij}$$

라고 두자. 이때 $0 \leq \alpha \leq 1$인 α에 대하여 다음 式을 만족시키는 戰略을 선택하여 이것을 최선의 전략으로 한다.

$$\alpha m_k + (1-\alpha)M_k \geq \alpha m_j + (1-\alpha)M_j, \text{ 모든 } j$$

이러한 방법의 Hurwicz's α 기준이라고 하며 결국 $\alpha=1$로 두면 Maximin 기준이 되고 $\alpha=0$로 두면 Maximax 기준이 된다.

이 기준에 의한 것의 구체적 예를 들어 보면, 이익 行列(payoff matrix)이 다음과 같이 주어 졌다고 할 때

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 15 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

여기서 α(optimal index)를 0.4라고 가정한다면 A_1은 $0 \times 0.4 + 15 \times 0.6 = 9$이고 A_2는 $4 \times 0.4 + 8 \times 0.6 = 6.4$가 되어 A_1이 최적의 解가 된다.

(iv) Laplace 기준

이 基準의 着想은 모든 戰略(strategy)이 꼭 같은 확률로 일어난다고 생각한 데서 비롯된 것이다.

그래서 이 기준은 다음 조건을 만족시키는 A_k를 최적의 解로 삼는다.

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} U_{kj} \geq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} U_{ij} \quad V_i$$

이 기준에 의한 例를 들어 보면 이익行列(payoff matrix)이 다음과 같을 때

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

A_1의 경우는 $\frac{1}{3}(7+5+8) = \frac{20}{3}$이고 A_2는 $\frac{1}{3}(5+6+7) = \frac{18}{3}$이며, A_3는 $\frac{1}{3}(9+5+7) = \frac{21}{3}$이기 때문에 A_3가 이 기준에 의한 최선의 戰略이 된다.