# 모멘트를 變数로 하는 聯立方程式에 依한 構造解析

南 政 秀　　国立建設研究所建築基準科

## 1. 머 리 말

本稿에서 紹介하고자하는 8聯立方程式을 利用한 構造物의 解析方法은 모멘트 分配法으로 널리 알려진 Hardy-Cross理論에 그 基礎를 두고 있는 構造物의 解析方法으로서,

本 解析法에서 誘導되는 各 関係方程式들은 그 関係式의 誘導方法이 部材角과 部材의 回転角을 関係式의 変数로 하는 Slope-Deflection Method의 連立方程式 構成方法과 흡사 하지만,

方程式에 対한 未知数는 모멘트로서 部材端部에 作用되는 作用모멘트와, 節点의 合모멘트(作用모멘트+ 節点에 対한 伝達모멘트) 및 横変位를 勘案할 때의 修正모멘트 等을 択하고 있음이 다르다고 하겠다.

이와같은 未知의 모멘트를 変数로 하는 方程式들을 各 節点의 모멘트 平衡関係로 부터 誘導해내고, 이를 連立方程式의 解析으로 上記한 未知 모멘트의 값을 求한 후 이 들의 값을 初期의 関係式에 代入하여 各 部材端의 最終모멘트(Resulting Moment, Final Moment)를 얻어낸다.

이 解析法은 対称構造이든 非対称構造이든, 荷重条件이 어떠하든 構造物의 解析이 可能하지만 多径間, 多層 構造物에 対하여는 Slope Deflection Method와 같이 多元聯立一次方程式의 解析에 많은 時間과 労力의 消耗를 要하는 短点을 가지고 있지만 Motrix解法의 Computer Program化에 依할 경우는 問題가 다르다.

本 構造物 解析方法이 極히 새로운 技法이라고 生覚은 하지 않지만 本稿가 関心있는 여러 技術者들에게 다소나마 参考가 되었으면 좋겠다.

参考文献　1. 谷口 忠：建造力学, 裳華房, 1969
2. N. Hope shi：The Aualy sis of Comtinuous Structures, Concrete, April 1969

## 2. 基本 関係式의 誘導

(Fig 1)의 部材 ABC는 連続보의 一部分을 表示하고 있는 것으로 이 連続보에 対하여 Hardy-Cross法 (모멘트 分配法; Moment Distribution Method)에 依한 모멘트 伝達 및 分配가 完了된 다음의 節点 B点의 左右 両側 部材端 最終모멘트 $M_{BA}$와 $M_{BC}$가 어떻게 해서 얻어지는가를 調査하므로서 本 解析方法의 基本概念은 理解될 수 있다.

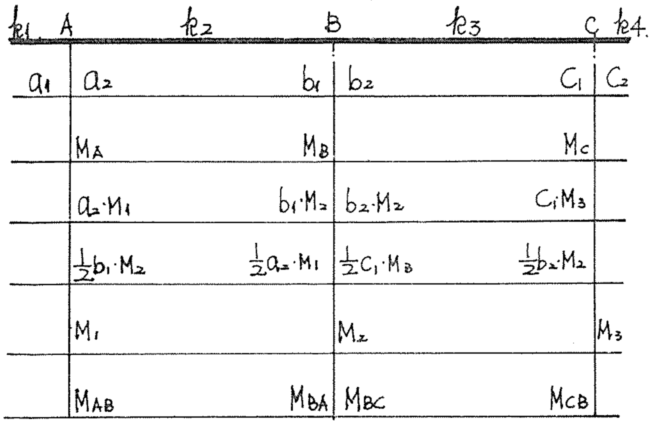
물론 이러한 Hardy-Cross法에 依한 모멘트 分配에 있어서 節点의 拘束, 拘束解除, 모멘트의 分配 및 伝達의 過程은 通常의 基本原理에 依하여 이루어진 것이다. 生覚하는 것으로, 即 各 節点에 作用하는 모멘트는 그 節点에 모이는 各 部材의 分配率에 따라서 分配되고 그 分配된 모멘트의 1/2이 그 部材의 他端으로 伝達되었다고 生覚한다는 것이다.

(Fig 1)에 있어서 連続보의 各 節点에 모멘트가 作用한다고 할 때 節点 B의 作用모멘트를 $M_B$, 또한 各 節点에 対하여 作用모멘트와 인접한 節点으로 부터 伝達되어온 伝達모멘트와의 合을 그 節点의 合모멘트라 하고 이들 A, B, C의 各 節点에 대하여

$M_1$, $M_2$, $M_3$라 表示하면,

節点 B에 있어서 $b_1M_2$, $b_2M_2$는 分配모멘트를 나타내게 되고 $1/2a_2M_1$, $1/2C_1$, $M_3$는 節点 A와 C로 부터 節点 B에 伝達된 伝達모멘트를 나타내게 된다.

지금 (Fig 1)의 連続보에 対하여 各 部材端의 最終모멘트를 이와같은 모멘트 構成要素들로 表示하면 다음과 같이 된다.




〈Fig 1〉

$M_{BA}=M_B+b_1\cdot M_2+\frac{1}{2}a_2\cdot M_1$ ··························(1)

$M_{BC}=\quad b_2\cdot M_2+\frac{1}{2}C_1 M_3$ ··························(2)

式(1)과 式(2)에서 $M_{BA}=-M_{BC}$의 關係를 利用하면 節点 B에 對한 모멘트 關係式은

$$M_B+b_1\cdot M_2+b_2\cdot M_2+\frac{1}{2}a_2\cdot M_1+\frac{1}{2}C_1\cdot M_3=0$$

의 關係를 얻게 되고 任意 節点에서 分配率의 合은 1.0이라는 것에 注意하면 $b_1+b_2=1.0$으로서 上記 式은,

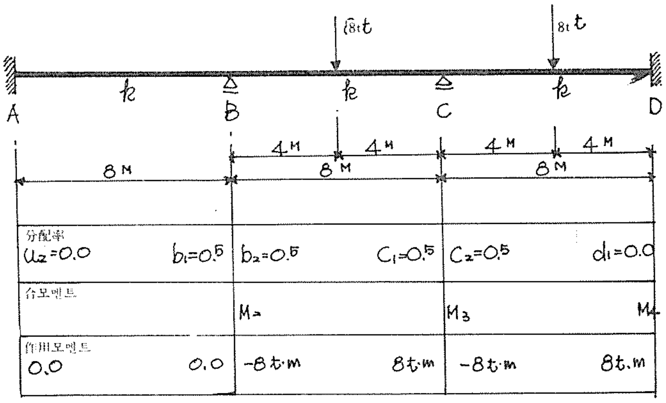
$M_B+M_2+\frac{1}{2}a_2\cdot M_1+\frac{1}{2}C_1\cdot M_3=0$ ························(3)

으로 表現될 수 있을 것이다.

前述한 모멘트 關係式(式3)에서 알 수 있는 바와 같이 連續構造物의 各 節点에 있어서, 그 하나 하나의 節点에 對하여 未知의 合모멘트(式3에서 $M_2$)와 인접한 節点에서 伝達되는 伝達모멘트(式3에서 $\frac{1}{2}a_2\cdot M_1$, $\frac{1}{2}C_1\cdot M_3$)및 節点에 作用하는 作用모멘트 (式3에서 $M_B$)로 이루어지는 모멘트의 關係式을 얻게 되고 이들 各 節点에 對한 關係式들로 形成되는 聯立一次方程式의 解로서 未知의 모멘트 ($M_1$, $M_2$, $M_3$)를 求한 후 式(1) 및 式(2)로 부터 部材端의 最終모멘트를 얻을 수 있게 된다.

〈例 1〉

이 解析方法을 利用하여 〈Fig 2〉와 같은 連續보의 部材端모멘트를 求해보기로 한다. (担 k; Stiffness)




〈Fig 2〉

節点 A에 있어서

$M_{AB}=\frac{1}{2}b_1\cdot M_2=0.25M_2$

節点 B에 있어서

$M_{BA}=b_1\cdot M_2=0.5M_2$

$M_{BC}=(-8)+b_2\cdot M_2+\frac{1}{2}C_1\cdot M_3$

$=(-8\ +0.5M_2+0.25M_3$

⇨ $M_{BA}+M_{BC}=0$의 關係에서

$(-8)+M_2+0.25M_3=0$ ······················ (EX. 1)

節点 C에 있어서

$M_{CB}=8+C_1\cdot M_3+\frac{1}{2}b_1\cdot M_2$

$=8+0.5M_3+0.25M_2$

$M_{CD}=(-8)+C_2 M_3=(-8)+0.5M_3$

⇨ $M_{CB}+M_{CD}=0$의 關係에서

$M_3+0.25M_2=0$ ································· (EX. 2)

節点 D에 있어서

$M_C=8+\frac{1}{2}C_2\cdot M_3=8+0.25M_3$

上記한 關係式 (Ex 1) 및 (Ex 2)로 부터

$$\left.\begin{array}{l} M_2+0.25M_3=8 \\ 0.25M_2+M_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M_2=8.52\,t\cdot m \\ M_3=-2.13\,t\cdot m \end{array}$$

의 값을 얻고 이를 $M_{AB}$, $M_{BA}$, $M_{BC}$, $M_{CB}$, M , M 關係式에 代入하면,

$M_{AB}=2.13\,t\cdot m$

$M_{BA}=4.26\,t\cdot m$ $\qquad M_{BC}=-4.26\,t\cdot m$

$M_{CB}=9.06\,t\cdot m$ $\qquad M_{CD}=-9.06\,t\cdot m$

$M_{DB}=7.47\,t\cdot m$

를 얻게 된다.

### 3. 横変位를 일으키는 構造物에의 適用

前述한 連續構造物의 解析法은 横変位를 일으키는 構造物에 對하여도 有効하게 利用될 수 있으며 같은 方法에 依하여 多立聯立一次方程式을 形成시킬 수 있다.

特히 이러한 横変位를 일으키는 構造物을 Hordy-Cross 法에 依하여 解析할 때에는

○기둥의 横変位를 許容하고 節点의 変形을 拘束

○기둥의 横変位를 拘束하고 節点의 変形을 許容.

의 過程을 되풀이 함에 있어서 모멘트에 對한 節点의 拘束과 横変位의 拘束, 節点의 拘束 解除와 横変位의 拘束 解除, 이에 따른 모멘트의 分配와 그 伝達의 操作過程이 너무 번잡하고 労力의 消耗가 대단하다.

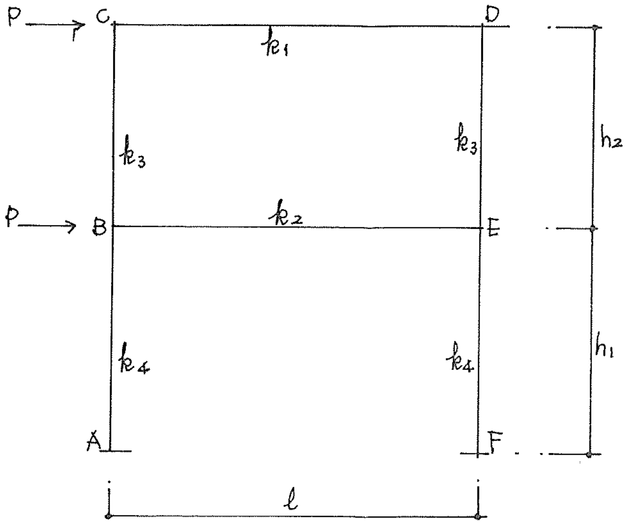
〈Fig 3·a〉와 같은 対称構造物이 表示된 바와 같은 Stiffness와 荷重의 條件下에 있을 때, 이 構造物은 対称構造物이기 때문에 〈Fig 3·b〉와 같은 簡単한 変換構造物로 바꾸어 解析할 수 있다.

다만 이와같은 変換構造物에 依하여 解析할 때에는 아래와 같은 注意点에 對한 理解를 하고 있어야 한다.

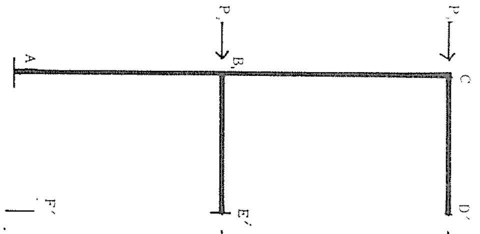
即 変換構造物에 있어서,

○기둥의 Stiffness는 実構造物에 있어서 그 層 各 기둥 Stiffness의 合이고,

3. Ottar P. Halldorsson & Chu-Kia Wang :Stability Analysis of Frame work by Methods, Journal of ASCE, Str. Division, July 1968.




実構造物 〈Fig·3a〉



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 分配率； | 0.0 | $b_1$ | $b_2$<br>$b_3$ | $C_1$<br>$C_2$ |
| 使用모멘트； | $M_A$ | $M_A$<br>0 | $M_1$<br>0 | $M_1$<br>0 |
| 分配모멘트； | 0.0 | $b_1 M_2$<br>$b_3$ | $b_2 M_2$<br>$M_2$. | $C_1 M_1$<br>$C_2 M_1$ |
| 伝達모멘트； | $\frac{1}{2}b_1 M_2$, | 0.0<br>0. | $\frac{1}{2}C_1 M_1$<br>0 | $\frac{1}{2}b_2 M_2$<br>0.0 |
| 合모멘트； | $M_3$ | | $M_2$ | $M_1$ |
| 修正모멘트； | $M_y$ | $M_y$<br>0. | $M_x$<br>0 | $M_x$<br>0.0 |
| 最終모멘트； | $M_{AB}$ | $M_{BA}$ | $M_{BC}$<br>$M_{BE}'$ | $M_{CB}$<br>$M_{CD}'$ |

〈Fig-3·b〉 変換構造物

○보의 Stiffness는 実構造物에 있어서 보 Stiffness의 3倍로 하여야 한다는 것이다.

$M_A$와 $M_B$를 節点에 対한 作用모멘트라 하고 $M_1$, $M_2$, $M_3$를 各各 節点 C, 節点 B 및 節点 A에 対한 合모멘트로서 節点의 作用모멘트(后述하는 修正모멘트를 包含한다)와 인접된 節点에서 伝達되는 伝達모멘트의 合이라고 하면,

$C_1M_1$, $C_2 \cdot M_2$는 節点 C에 있어서의 分配모멘트이고, b $b_2 \cdot M_2$, $b_3 \cdot M_3$는 節点 B에 있어서의 分配모멘트를 나타내며, $\frac{1}{2}b_1 \cdot M_2$ $\frac{1}{2}C_1M_1$, $\frac{1}{2}b_2M_2$는 各各 인정된 節点으로부터 節点 A, B, C에 伝達된 伝達모멘트이다.

変換構造造物은 b′, E′, F′를 固定으로 考慮하기 때문에 実際 構造物과는 달리 構造物, 即 기둥의 横変位가 拘束되고 있다.

따라서 節点의 横変位를 許容함으로서 作用되는 未知의 모멘트 값이 導入되어야 하며, 이러한 節点의 横変位 効果에 対한 修正모멘트가 $M_x$, $M_y$이다.

이러한 構造物에 対한 모멘트 関係 聯立一次方程式은 다음의 順序로 이루어진다.

節点 C에 있어서

$M_{CB} = M_A + C_1M_1 + \frac{1}{2}b_2 \cdot M_2 + M_x$

$M_{CD}' = \quad C_2M_1$

⇨ $M_{CB} = -M_{CD}'$의 関係에서

$M_A + M_1 + \frac{1}{2}b_2M_2 + M_x = 0$ ·································(4)

節点 B에 있어서

$M_{BC} = M_A + b_2 \cdot M_2 + \frac{1}{2}C_1 \cdot M_1 + M_x$

$M_{BA} = M_B + b_1 \cdot M_2 + M_y$

$M_{BE}' = \quad b_3 \cdot M_2$

⇨ $M_{BC} + M_{BA} + M_{BE}' = 0$의 関係를 利用하면,

$M_A + M_B + M_2 + \frac{1}{2}C_1 \cdot M_1 + M_x + M_y = 0$ ················(5)

또 $M_{CB}$, $M_{BC}$, $M_{BA}$, $M_{AB}$가 不均衡 모멘트(Unbalanced Moment)를 修正한 后의 各 部材端에 対한 最終모멘트라고 하면,

構造物의 上層에 対하여는

$M_{CB} + M_{BC} = 2M_A$ ················································(6)

構造物의 下層에 対하여는

$M_{BA} + M_{AB} = 2M_B$ ················································(7)

의 関係가 있다.

이를 다르게 表示하면 式(8) 및 (9)와 같다.

$$\begin{aligned} M_{CB} + M_{BC} &= M_A + C_1M_1 + \tfrac{1}{2}b_2 \cdot M_2 + M_x \\ &\quad + M_A + b_2M_2 + \tfrac{1}{2}C_1M_1 + M_x \\ &= 2M_A \end{aligned}$$

로 부터

$1.5C_1 \cdot M_1 + 1.5b_2 \cdot M_2 + 2M_x = 0$ ··························(8)

또 $$\begin{aligned} M_{BA} + M_{AB} &= M_B + b_1M_2 + M_y \\ &\quad + M_B + \tfrac{1}{2}b_1 \cdot M_2 + M_y \\ &= 2M_B \end{aligned}$$

로 부터

$1.5b_1 \cdot M_2 + 2M_y = 0$ ················································(9)

上記한 式 (4), (5), (8), (9)의 関係式들을 聯立해서 풀면 未知変量인 $M_1$, $M_2$, $M_x$, $M_y$를 求하게 되고 이들 값으로 部材端의 最終모멘트를 計算해 낼 수 있다.

〈例 2〉

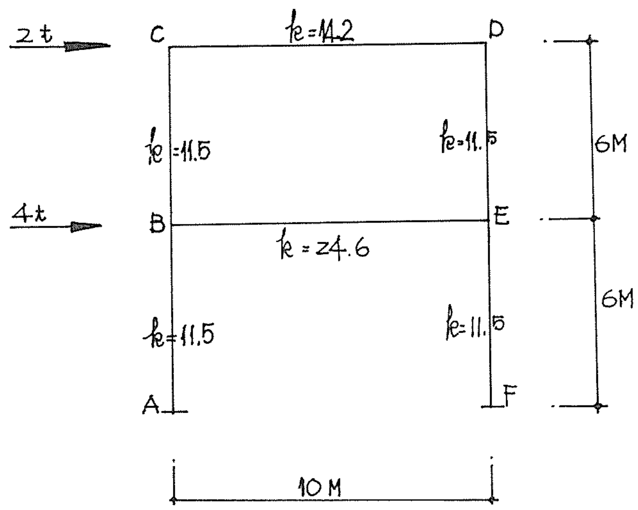
〈Fig 4·a〉와 같은 荷重條件과 Stiffness를 가지는 構造物에 対하여 部材端의 最終모멘트를 計算해 보기로 한다.

가. 먼저 変換構造物〈Fig4·b〉가 〈Fig 3·b〉와 같은 変換構造物로 生覚하면 〈Fig4·b〉의 変換構造物 部材의 Stiffness는 다음과 같다.

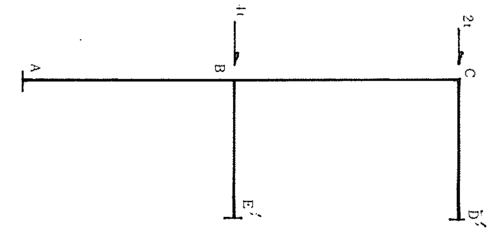
○기둥의 Stiffndess

$K_{BC} = K_{AB} = 11.5 \times 2 = 23.0$

○보의 Stiffness




〈Fig 4·a〉




| | A | B | B | B | C | C |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 分配率 ; | 0.0 | 0.195 | 0.61 | 0.195 | 0.35 | 0.65 |
| 作用모멘트 ; | −9t·m<br>0.0 | −9t·m | 0.0 | −3t·m | −3t·m | 0.0 |
| 分配모멘트 ; | | 0.195$M_2$ | 0.61$M_2$ | 0.195$M_2$ | 0.35$M_1$ | 0.65$M_1$ |
| 傳達모멘트 ; | $\frac{1}{2}$0.195$M_2$ | 0.0 | 0.0 | $\frac{1}{2}$0.35$M_1$ | $\frac{1}{2}$0.195$M_2$ | 0.0 |
| 合모멘트 ; | $M_3$ | $M_2$ | | | $M_1$ | |
| 修正모멘트 | $M_y$ | $M_y$ | 0.0 | $M_x$ | $M_x$ | 0.0 |
| 最終모멘트 | $M_{AB}$ | $M_{BA}$ | $M'_{BE}$ | $M_{BC}$ | $M_{CB}$ | |

〈Fig 4·b〉

$K'_{CD} = 14.2 \times 3 = 42.6$

$K'_{BE} = 24.6 \times 3 = 73.8$

이들의 값을 比로 勘案하여

$K_{BC} = K_{AB} = 11.5$

$K'_{CD} = 14.2 \times 1.5 = 21.3$

$K'_{BE} = 24.6 \times 1.5 = 36.9$

로 나타내어도 좋을 것이다.

나. 分配率 (Distribution Factors)

$D \cdot F_{BC} = D \cdot F_{BA} = 11.5/(11.5 \times 2 + 36.9) = 0.195$

$D \cdot F_{CB} = 11.5/(11.5 + 21.3) = 0.35$

$D \cdot F'_{CD} = 0.65$, $D \cdot P'_{BE} = 0.61$

다. 作用모멘트

実構造物에 荷重을 作用시킬 때의 作用모멘트

$M_{CB} = M_{BC} = M_A = -3\ t \cdot m$

$M_{BA} = M_{AB} = 3\ t \cdot m + 6\ t \cdot m = -9\ t \cdot m$

라. 関係方程式의 計算

節点 C에 있어서는 式(4)로 부터

$M_1 + \frac{1}{2} b_2 M_2 + M_x + M_A = 0$

$M_1 + \frac{1}{2} \times 9.195 \times M_2 + M_x - 3 = 0$ ……………(EX 3)

節点 B에 있어서는 式(5)로 부터

$M_2 + \frac{1}{2} C_1 M_1 + M_x + M_y + M_A + M_B = 0$

$M_2 + 0.175 M_1 + M_x + M_y - 12 = 0$ ………………(EX4)

上層의 모멘트 関係에 있어서는 式(8)로 부터

$1.5 C_1 M_1 + 1.5 b_2 M_2 + 2 M_x = 0$

$0.525 M_1 + 0.2925 M_2 + 2 M_x = 0$ ………………(EX 5)

下層의 모멘트 関係에 있어서는 式(9)로 부터

$1.5 b_1 M_2 + 2 M_y = 0$

$0.2925 M_2 + 2 M_y = 0$ ………………………………(EX 6)

上記 (EX 3)～(EX 6)를 聯立化 시키면

$$\begin{cases} M_1 + 0.0975 M_2 + M_x = 3 & —① \\ 0.175 M_1 + M_2 + M_x + M_y = 12 & —② \\ 0.525 M_1 + 0.2925 M_2 + 2 M_x = 0 & —④ \\ 0.2925 M_2 + 2 M_y = 0 & —④ \end{cases}$$

을 얻고 解는 다음과 같다.

$M_1 = 5.2317 t \cdot m$, $M_2 = 17.6082 t \cdot m$

$M_x = -3.9485 t \cdot m$, $M_y = -2.5752 t \cdot m$

이 값들을 各 部材端모멘트 関係式에 代入하여 最終모멘트를 求하면 아래와 같다.

$M_{CB} = M_A + C_1 \cdot M_1 + \frac{1}{2} b_2 \cdot M_2 + M_x$

$= -3 + 0.35 \times 5.2317 + 0.5 \times 0.195 \times 17.6082 + (-3.9485) = -3.40 t \cdot m$

$M'_{CD} = C_2 \cdot M_1 = 3.40 t \cdot m$

$M_{BC} = M_A + b_2 \cdot M_2 + \frac{1}{2} C_1 M_1 + M_x$

$= -3 + 0.195 \times 17.0682 + 0.5 \times 0.35 \times 5.2317 - 3$

$3.9485 = -2.5994 t \cdot m$

$M_{BA} = M_B + b_1 \cdot M_2 + M_y$

$= -9 + 0.195 \times 17.6082 - 2.5752 = -8.142 t \cdot m.$

$M'_{BE} = 0.61 \times 17.6082 = 10.741 t \cdot m$

4. 結 語

以上에서 構造物 節点의 最終모멘트를 構成하는 各 모멘트 要素를 変数를 하는 聯立方程式을 세우는 方法과 이의 解法을 例와 더불어 説明해 보였다.

앞서 記述된 바와 같이 本 方法이 特別히 새로운 理論은 물론 아니지만 節点에 作用하는 各 MOMENT의 要素들을 쉽게 把握할 수 있으며 特히 構変位를 일으키는 対称形 構造物의 解析에 利用 価値가 있다는 것을 理解할 수 있을 것이다.