Bull. Korean Math. Soc.
Vol. 14, No. 1, 1977.

4色問題—(提起에서 解決까지)

嚴 相 燮

0. 序言.

지난 1世동안에 걸쳐서 未解決이었던 4色問題가 電子計算機의 使用에 의하여 肯定的으로 解決되었다는 報道에 接한것은 지난해의 10月頃이엇었다. 그러나 外國文獻을 求하기가 如意치 못하는 環境에서, 더구나 電子計算機의 使用에는 完全白紙인 筆者는 그 當時는 別로 興味를 느끼지 못했는 것 만은 事實 이었다.

그後 外誌 Sugaku Seminar의 今年 2月號 以後에 東京, 立敎大學의 島內剛一敎授의 이 4色問題에 關한 詳細한 解說이 連載 되어있다. 筆者가 調査한 바에 의하면 上記外誌의 解說은 4色問題를 肯定的으로 解決한 Appel-Haken의 論文(타이프친 것으로 150페이지에 달하는 尨大한 論文임)의 飜譯을 兼한 原論文에 가장 忠實한 解說이라는 것이었다.

筆者는 이 4色問題가 肯定的으로 解決 되었다는 뉴스를 傳하는것 만으로 本稿의 目的으로 삼기로 했으나, 旣往붓을 든 바에야 젊은 數學徒들을 爲하여 原論文의 譯이기도 한 위의 外誌의 內容을 中心으로 하여 4色問題의 提起에서 解決까지를 數學史的 見地에서 可及的 쉽게 解說해 보는것도 本會報의 第3目的에 어긋나지는 않을 것이라고 짐작되므로 以下 時代를 따라가며 概觀해 보고자 한다.

1. 4色問題의 提起와 略史.

de Morgan(1850)에 의하면, 4色問題는 처음에 地圖印刷業者들의 經驗에 의하여 그들의 話題에 오르기 始作한 것이 由來이라고 되어있다. 即 어떤 地圖라도 4色만 있으면 各 나라를 구별하여 색칠할 수 있다고 業者들이 느끼기 始作한것이다. 그러나 이 地圖를 나라別로 구별색칠한다 해도 이 問題가 意味를 가지려면 다음 두가지의 條件이 必要充分하다.

1) 모든 나라는 모두 連結領域이다. 물론 바다도 그 連結領域의 하나라고 본다.

2) 境界線에 의하여 서로 이웃하는 두나라는 서로 다른 색으로 칠해야 하

지만 有限個의 點만에 의하여 서로 接하는 두나라는 같은 색을 칠해도 무방하다.

이와같이 색을 칠하는 것을 "구별색칠한다"고 말하기로 한다.

예컨대 다음의 圖1과 같은 地圖에서는 바깥쪽 바다까지 포함해서 α, β, γ인 3色으로 칠할 수 있으나 圖2와 같은 地圖에서는 아무래도 4色이 必要하다. 또 圖3에서와 같이 1點만에서 接하고 있는 두나라는 같은 색을 칠해도 무방하다고 한다. 또 다른 한 文獻에 의하면 實은이 4色問題는 이미 1840年에 A. F. Möbius가 問題로서 提起한 것이라고 되어 있으나 筆者로서는 確認하기 어렵다.

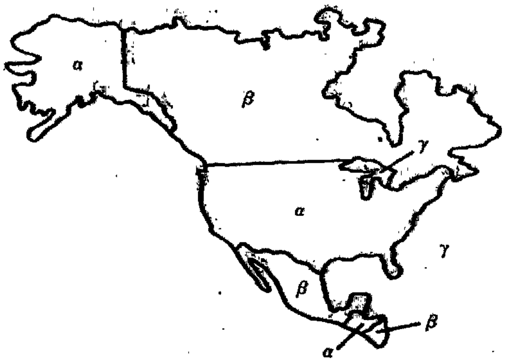

圖1

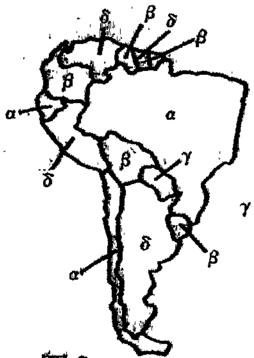

圖2

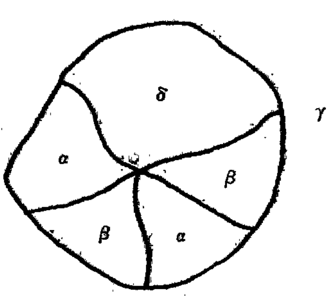

圖3

正確히는 1878年 6月13日에 A. Cayley가 London의 數學會에서 問題로서 提起한 것이다. 卽

「어떤 地圖라도 4色으로 구별색칠할 수 있다는 것을 證明하든가, 또는 5色이 아니면 구별색칠할 수 없는 地圖를 만들어라」는 것이다. Cayley는 地理學會誌(Proceedings of the Royal Geographical Society, Vol. 1 (1879), pp. 259-261)에서도 이 問題의 어려움을 指摘한 바 있다.

이렇게하여 여러가지 종류의 地圖를 調査해 봤으나 4色이 必要한 地圖는 있으나 5色이 아니면 구별색칠할 수 없는 地圖는 發見되지 못했다.

Cayley가 問題를 提起한 다음해인 1879年에 A. B. Kempe가 硏究의 成果를 發表하였다. Kempe 自身은 一時나마 4色問題가 解決 되었다고 自負 했으나 1890年에 P. J. Heawood가 誤謬點을 指摘하므로서, Kempe의 證明은 5色만 있으면 모든 地圖를 구별색칠할 수 있다는 證明밖에 되지 않음이 밝혀졌다. 이렇게 하여 그後 長長 90餘年間 4色問題는 迷宮에 빠진 채 難問題로 남게 되었다.

今世紀에 들어와서 P. Franklin은 그의 論文 "The four-color-problem, Scripta Math., 6 (1939), 149 - 156, 197 - 210"에서 36개國 보다 작은 나라로 된 任意의 地圖에 對해서는 4色問題가 肯定的으로 解決됨을 밝혔다.

1969年에 H. Heesch 는 그의 論文 "Untersuchungen Zum Vierfarbenproblem, B-I-Hochschulscripten 810/810*a*/810*b*, Bibliographes Institut, Mannheim/Vienna/Zurich 에서 Kempe 의 方法을 精密化하면 4色問題는 解決될 것이라는 豫想을 發表하였다.

또한 Heesch 는 그의 論文 "Chromatic reduction of the triangulations T_e, $e=e_5+e_7$, J. Combinatorial Theory Vol. 13 (1972), pp. 46 - 53,"에서 放電手續(discharging procedure)이라는 方法을 案出했다.

實은 이 Heesch 가 1950年頃, Kiel 大學 在職中에 어느 colloquium 에서 위에서 말한 方法을 發表한 바 있으며 그때 學生으로 參席했던 W. Haken 은 이미 이問題에 關心을 가졌다고 한다.

1967年에 Haken 은 Heesch 의 豫想을 證明하자면 어떠한 技術的인 困難이 있는가, 또 計算機使用의 可能性에 對해서 質問한 바 있다. 이것이 契機가 되어 (現在) Illinois 大學敎授인 W. Haken 은 그 放電手續을 改良하는 일을 擔當하고 同僚인 K. Appel 은 프로그램밍을 分担하여 4年間 걸려서 1500 時間의 電子計算機의 使用이라는 記錄과 아울러 드디어 1976年 7月에 4色問題를 肯定的으로 解決한 것이다.

2. 輪環面上의 7色問題.

「平面 또는 球面上의 有限個의 나라로 이루어진 任意의 地圖는 4色으로 구별색칠할 수 있다」라는 것이 4色問題인데 이 4色問題가 1世紀동안 解決되지 못했는 反面에 輪環面(torus)上의 7色問題, 卽「輪環面上의 有限個의 나라로 이루어진 任意의 地圖는 7色으로 구별색칠할 수 있다」라는 問題는 初期에 이미 證明되었으니 이 節에서 그 證明을 살펴보자.

輪環面은 다음 圖4의 直4角形에 있어서 같은 文字를 붙인 2邊을 各各 붙여서 이루어지는 曲面이므로 圖5인 輪環面 대신에 圖4에서 7色問題를 생각하면 充分하다.

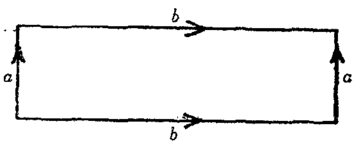

圖4

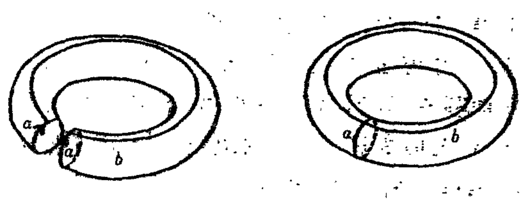

圖5

위의 圖 4 인 輪環面을 다음 圖 6 과 같은 7개의 區域으로 나누면 1~7 인 7개의 區域은 그어느 둘도 境界線에 의하여 서로 이웃하고 있다.

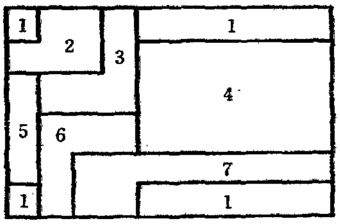

圖 6

그러므로 輪環面上의 地圖를 구별색칠 하자면 최소한 7개의 色이 必要함을 알수 있다. 그런데 實은 7개의 色이 充分하다는 것이 다음과 같이 해서 증명된다.

輪環面上의 區域의 數를 f, 區域과 區域의 境界線의 數를 e, 境界線의 끝인 境界點의 數를 v 라 하면 Euler 의 公式에 의하여

$$v-e+f=0$$

이다. (球面과 同相인 圓柱에서는 $v-e+f=2$ 이다. 이 圓柱에서 上下兩底面을 除外하고난 上下兩圓을 서로 붙인것이 輪環面이므로 輪環面에서의 $v-e+f$ 의 값은 圓柱(또는 球面)의 그것보다 2 작다.)

輪環面上의 各境界點에는 몇 개인가의 境界線이 모여있을 터이니 例컨대 다음 圖 7 의 (a)과 같이 5개의 境界線이 모여 있다고 가정하자. 이때 이 境界點을 包含하는 한小國 u 를 建設해 본다.

(a) (b)

圖 7

이때 境界點, 境界線은 늘겠지마는 한 境界點에 모이는 境界線은 3개 석이다. 그런데 萬一 (b)의 地圖가 7色으로 구별 색칠되면 u 의 둘레의 各나라는 u 와 다른 나머지 6色으로 구별색칠할 수 있게되고, 따라서 u 를 지워버린 처음의 地圖(a)도 7色으로 구별색칠이 可能하게 된다. 그러므로 輪環面上의 구별색칠을 論할 때는 各境界點에 3개의 境界線이 모여 있다고 생각해도 무방함을 알 수 있다. 이때의 地圖을 **標準地圖**라고 부르기로 한다. 標準地圖에 있어서는 v 개의 各境界點에서 總計 $3v$ 개의 境界線이 나아가고 있으나 各境界線은 그 兩端인 두 境界點에서 2번씩 計算되었으므로 結局 $3v=2e$ 이다. 이것을 위의 Euler 의 公式에 代入하면 $e=3f$ 를 얻는다. 그러므로 標準地圖는 6邊以下의 나라(境界線이 6개 이하인 나라)를 반드시 포함하

게 된다. 왜냐하면 各나라가 모두 7邊以上의 나라라면 境界線의 總數를 計算하므로서 $e \geqq \frac{7f}{2}$ 라야 하고 이것은 $e=3f$ 에 矛盾인 까닭이다.

다음 圖8, (a)인 나라가 6邊國이고 6개의 境界線에 의하여 1, 2, …, 6 인 나라와 接하고 있다고 하자. 이때 萬一 1에 接하는 境界線을 버리고 a 를

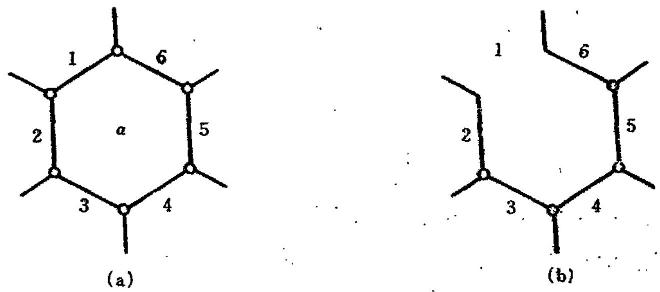

圖8

1에 合併하기로 하면 나라數가 1개 작은 標準地圖가 생긴다. 萬一 이 變更된 地圖가 7色으로 구별색칠 된다면 1, 2, …, 6에는 기껏해야 6가지의 色이 使用되었으므로 처음의 地圖(a)으로 되돌아가서 생각하면 나라 a 에는 나머지 1色을 칠할 수 있게된다. a 가 5邊以下의 나라인 경우에도 위의 論法은 適用된다. 따라서 나라의 數에 對한 數學的歸納法에 의하여 證明이 끝났다. 그러므로 輪環面上의 7色問題는 肯定的으로 解決되었는 바이다.

3. 4色問題의 整理.

우리는 다시 4色問題로 되돌아간다. Cayley의 問題提示에 있는바인 "5色이 아니면 구별 색칠할 수 없는 地圖를 만들 수 있느냐?"를 보기 爲해서 可及的 두 나라가 境界線으로 隣接하는 地圖를 平面上에 만들어 보자.

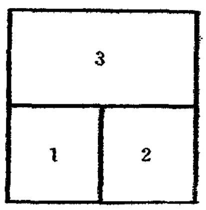

圖9

세나라 1, 2, 3이 서로 隣接하게 되는 地圖는 다음 圖9와 같이 손쉽게 만들어진다.

이때 第4의 나라를 設定하여 그것을 1, 2, 3의 모두에 隣接되게 하자면 다음 圖10의 (a)과 같이 하면 되지만 이때 第5의 나라를 添加하여 1, 2, 3, 4의 모두에 隣接되게 할 수는 없다. 勿論 第4의 나라를 圖10의 (b), (c), (d)와 같이 設定할 수는 있으나 어느 경우이든 한 나라가 남은 세 나라에 둘러싸여서, 第5의 나라를 1, 2, 3, 4에 모두 隣接되게 添加할 수가 없다.

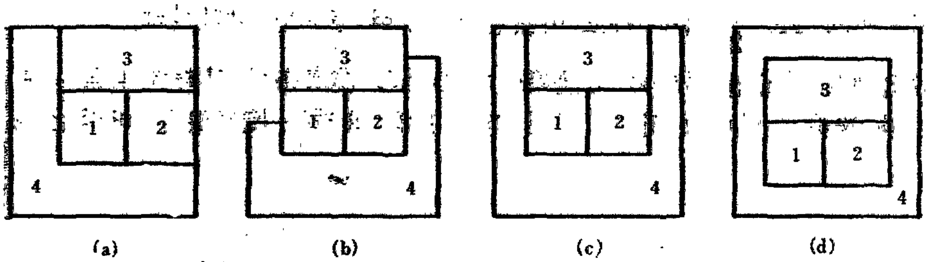

圖10

以上의 4色問題의 說明에 있어서는 地圖는 平面上에 그려진 것이라고 생각하였으나 地圖는 地球儀의 그것과 같이 球面上에 그려진 것이라 해도 4色問題로서는 同等한 것이다. 왜냐하면 지금 球面上에 그려져 있는 한 地圖에 對하여 그 바다에 該當하는 한 點 P를 잡고 그곳에 작은 구멍을 뚫었다고 생각하여 球面을 그 구멍을 擴大하면서 平面上에 펼치면 平面上에 있어서 바다로 둘러 싸인 섬으로 이룩되는 地圖가 생기는 까닭이다.

球面은 다음 圖11의 凸4面體 $ABCD$와 同相이므로 위에서 말한 구멍을 뚫는 點 P를 面BCD內의 어느 點으로 잡았을 때는 구멍을 擴大하면서 平面에 펼쳐진 地圖는 다음 圖12의 (a)와 같은 平面圖가 된다. 다음에 萬一 구멍을 뚫는 點 P의 位置를 圖11의 點 A, 또는 線 AB 上에 잡아서 위에서와 같이 그 구멍을 擴大하면서 平面에 펼쳐 놓으면 다음 圖12의 (b) 또는 (c)와 같게 된다.

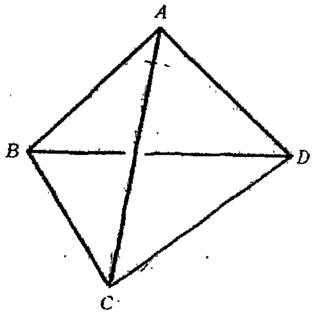

圖11

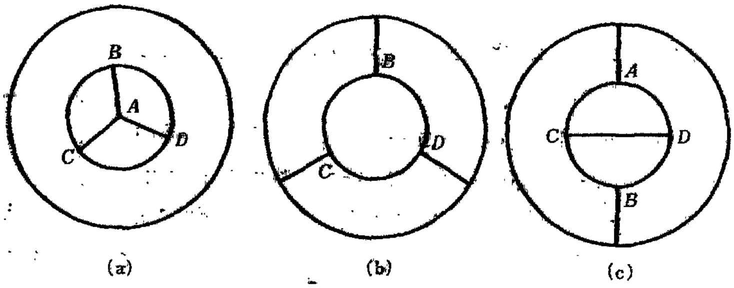

圖12

위의 圖 12의 (a), (b), (c)은 앞에서 말한 圖10의 (d), (b), (c)와 各各 同形임을 볼 수 있다. 그러므로 4色問題에 關하는 限, 平面上의 경우나 球面上의 경우나 같은 問題가 되는 것이다. 그러므로 4色問題에서는

1) 球面上의 有限個의 나라로 된 任意의 地圖에 對해서 생각하기로 한다.

또 앞 2節에서 말한 輪環面의 경우에서와 마찬가지로 생각하여 標準地圖에 限해서 생각하면 된다. 卽 4色問題에서는

2) 1개의 境界點에는 4개國 以上의 나라가 모여 있지는 않다고 생각하기로 한다.

다음에는 境界線이 2개以上의 閉曲線으로 分離되어 있는 경우에 對해서 생각하기로 한다. 例컨대 다음 圖13의 Y나라와 같은 경우에 對해서는 圖14의 (a), (b)와 같이 各各 다른 地圖로 나누어서. 이들 두地圖가 모두 4色으로 구별색칠된다면 Y內의 部分의 색을 適當히 調整하므로서 卽, 圖14의 (b)에서 γ와 β를 서로 바꾸어서 圖14의 (c)와 같게 하므로서, 圖13의 경우도 4色으로 구별색칠할 수 있게 된다. 그러므로 4色問題에서는

3) 한나라를 둘러싸는 境界線은 連續된 閉曲線이라고 생각하기로 한다.

따라서 完全히 다른 한나라에 둘러싸인 나라(境界線이 1개 밖에 없는 1邊國)도 考慮할 必要가 없다.

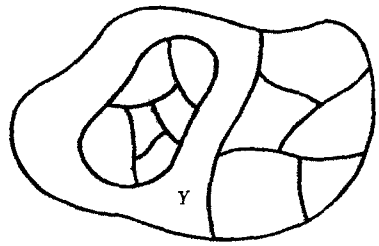

圖13

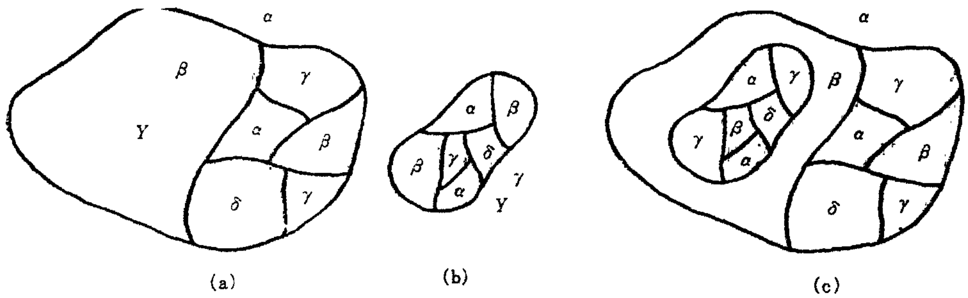

圖14

4. Kempe의 方法과 業績.

앞1에서 말한 바와 같이 Kempe의 方法은 그後의 4色問題硏究의 土臺가 되었고 이번의 Appel-Haken의 硏究도 Kempe의 方法의 發展이므로 이 節에서는 Kempe의 方法과 그 業績을 살펴보기로 한다.

(1) 問題의 再整理

Kempe는 問題를 생각하기 쉽게하기 爲하여 地圖를 雙對的인 그래프로 고쳐서 생각하기로 한다. 卽

4) 나라를 點(首都의 位置라고 생각해서 무방할 것이다)으로 表示하고 境界線으로 두 나라가 隣接했을 경우는 이들 두 點을 實線으로 잇기로 한다.

손쉽게 알 수 있는 바와같이 이들 實線끼리는 서로 만나지 않도록 그을 수 있다.

例컨대 圖15와 같은 地圖는 圖16의 그래프로 된다. 여기에서 注意할 것은 A와 B의 두나라는 2개의 境界線에 의하여 隣接하므로 實線도 이들에 對應해서 2개가 그어진다는 것이다.

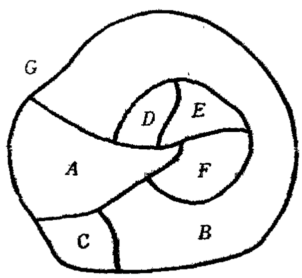

圖15

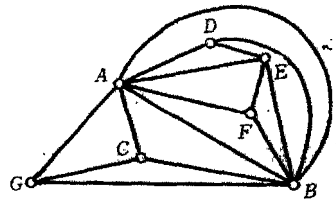

圖16

이때 앞節 3)에서 말한 條件이 붙었는 地圖만을 생각하기로 하면 地圖와 그래프와는 雙對의 關係에 의하여 1對 1로 對應한다. (兩쪽 모두 位相的인 것이라고 생각하여.) 이와같은 雙對的인 그래프를 생각하기로 하면 4色問題는 다음과 같이 된다.

「球面上에 有限個의 點과 이들을 適當한 實線으로 이어서 이룩된 그래프가 있다고 한다. 또 實線끼리는 만나지 않으며 또한 1개의 點에서 나와서 같은 點에 되돌아가는 實線은 없는 것이라고 한다. 이때 實線으로 이어지는 2點은 서로 다른 色으로 구별색칠하기로 하면 모든 點을 4色으로 구별색칠할 수 있다」

여기에서 다음 圖17과 같은 경우에 對해서 생각해 보자. 이들點의 구별색칠에 있어서 복판의 4邊形의 곳을 點線으로 이어서 實線이 1개 追加된 것을 생각하자. 이變更된 그래프에서 4色問題가 解決되면 처음의 圖17의 그래프에서도 勿論解決될 것이므로 4色問題에서는 다음과 같이 생각해서 無妨하다.

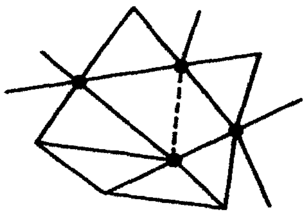

圖17

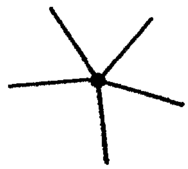

圖18

5) 球面全體는 그래프의 實線에 의하여 完全히 3角形으로 分割되어 있다. 卽, 그래프의 實線上에 없는 點은 3개의 實線으로 둘러싸여 있다고 생각하기로 한다.

6) 地圖上의 나라는 點으로 옮겨졌고, 그 나라의 境界線은 點에 모이는 實線으로 옮겨졌으므로 n개의 境界線을 가진 나라(n邊國)는 n개의 線이 모이는 點으로 옮겨지게 되었다. 이것을 n集點이라고 부르자.

위의 圖18의 點은 5集點이다.

(2) 2~5集點의 包含

그래프에 包含되는 n集點의 個數를 p_n이라 하고 이와같은 n의 最大値를 N이라 한다. 또 그래프에 包含되는 點全體의 個數를 p라 한다. 그러면 明白히

$$\sum_{i=2}^{N} p_i = p \tag{$*_1$}$$

이다. 이때 또하나의 重要한

$$\sum_{i=2}^{N} (6-i)p_i = 12 \tag{$*_2$}$$

가 成立한다. ($*_2$)를 證明하자. 球面上의 그래프에서의 實線全體의 個數, 分割된 3角形의 總數를 各各 q, r이라고 하면 Euler의 公式

$$p-q+r=2$$

는 勿論成立한다.

球面에서의 3角形分割된 그래프에서의 實線 (3角形의 邊)의 總數를 計算하므로서 $3r=2q$인 關係를 얻는다. 또 모든 點에 對해서 모여있는 實線의 總數를 計算하므로서 $\sum_{i=2}^{N} ip_i = 2q$를 얻는다. 그러므로

$$\sum_{i=2}^{N}(6-i)p_i=6\sum_{i=2}^{N}p_i-\sum_{i=2}^{N}ip_i=6p-2q$$

$$=6p-6q+4q=6p-6q+6r$$

$$=6(p-q+r)=6\cdot 2=12.$$

그러므로 $(*_2)$가 證明되었다.

式$(*_2)$를 고쳐 써 보면

$$4p_2+3p_3+2p_4+p_5=p_7+2p_8+3p_9+\cdots\cdots+(N-6)p_N+12$$

이다. 여기에서 $p_i\geqq 0$ $(i=2,3,\cdots\cdots)$이므로

$$4p_2+3p_3+2p_4+p_5\geqq 12$$

이고 이것에 의하여 p_2, p_3, p_4, p_5중 적어도 어느 하나는 양(>0)이라야 함을 알 수 있다. 卽 球面上을 3角形分割하는 그래프에서는 반드시 2~5 集點의 어느 하나가 반드시 包含되어 있다.

이 事實을 처음의 地圖에서 생각하면 2~5邊國이 반드시 存在하게 된다.

以下에서 그래프의 點들이 4色以下로 구별색칠할 수 있다는 事實을 數學的歸納法에 의하여 證明하자.

먼저 p가 4以下이면 各各의 點을 서로 다른 色으로 칠할 수 있으므로 구별색칠할 수 있음은 明白하다.

다음에 p未滿의 點으로 되는 그래프는 4色以下로 구별색칠할 수 있다고 가정하여 p個의 點으로 된 그래프도 4色以下로 구별색칠할 수 있음을 證明하자.

(3) 2~4 集點의 除去

1) 2集點을 가진 그래프를 생각하자. A를 2集點이라 하면 3角形分割이라는 條件에 의하여 A의 兩쪽의 點은 서로 다른 點이다. 그래서 이들의 點을 B, C라 하면 A의 附近에서의 그래프의 모양은 다음 圖19, (a)과 같이 될 것이다. 물론 B, C, D, E인 點에서는 그림에 그려져 있지 않는 點이 있을지 모르나 이들은 여기에서의 論述에 關係가 없으므로 省略하였다. (今後도 이와같이 無關係인 部分은 때때로 省略하기로 한다.)

이 그래프에서 A點을 除去하고 B, C를 잇고 있는 2개의 實線을 하나로 合쳐 본다. (圖19, (b)), 이그래프는 처음의 그래프보다 點의 갯수가 하나 줄었는 것이므로 歸納法의 假定에 의하여 4色으로 구별색칠할 수가 있다. 그러므로 例컨대 다음 圖19, (b)에서와 같이 點 B, C에 各各色 β, γ가 칠해졌다고 해보자. 그러면 처음의 그래프는 A에 β, γ이외의 색(예컨대 α)으로

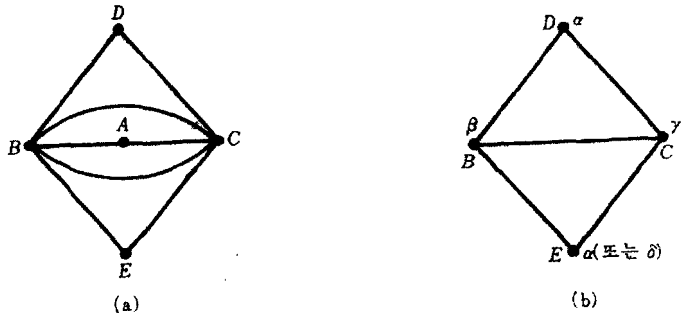

圖19

칠하고 다른點의 색은 그대로 둠으로써 구별색칠이 가능하다.

2) 다음에는 3集點 A를 가진 그래프를 생각하자. A에 이웃한(實線으로 맺어진)點은 3角形分割이라는 條件에 의하여 서로 다른點 들이다. 이들을 B, C, D라고 하자. (圖20, (a)).

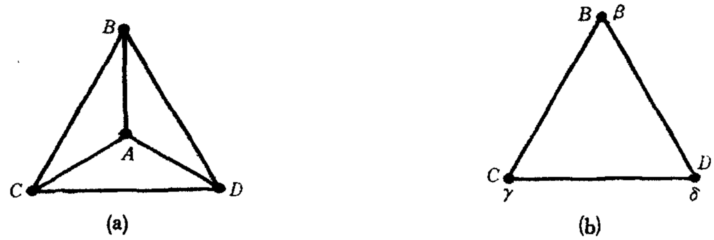

圖20

點 A와 實線 AB, AC, AD를 除去한 그래프는 歸納法의 假定에 의하여 구별색칠이 可能하다. (圖20, (b)). 그러므로 처음의 그래프도 點 A에 B, C, D에 칠해지지 않았는 색을 칠하므로써 (다른 부분은 변함이 없이) 구별색칠이 可能하다.

3) 이번에는 4集點 A를 가진 그래프를 생각하자. 먼저 4集點 A에 이웃하는 (實線으로 맺어진) 4點의 모두 서로 다른 경우를 생각하여 이들을 B, C, D, E라 하자. (다음 圖21, (a))

이 그래프에서 點 A와 이點에 모이는 4개의 實線을 除去하고 다시 實線 BD를 追加한 그래프(圖21, (b))를 생각한다.

歸納法의 假定에 의하여 이 그래프는 4色으로 구별색칠이 可能하므로 例컨대 點 B, C, D에 各各 β, γ, δ가 칠해졌다고 하자. 이때 點 E에는 β와 δ에 各各 다른 色 α 또는 γ가 칠해져 있을 터이다. 點 E에 γ가 칠해져 있을

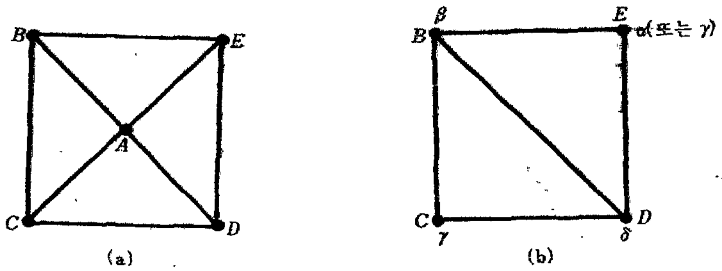

圖21

때는 처음의 그래프의 點 A에 色 α를 칠하면 구별색칠이 可能하다.

點 E에 α가 칠해져 있을 경우는 조금 複雜한 操作이 必要하다.

먼저 「點 E에서 始作하여 α,γ의 色만으로 칠해져 있는 서로 이웃하는 點들을 차례로 이어서 이루어지는 最大의 部分의 그래프」를 생각하여 이것을 「E에서 始作하는 色 α,γ에 關한 **Kempe chain**(鎖)」이라고 定義한다. (圖22)

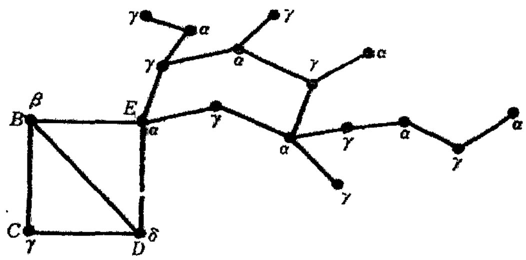

圖22

이 Kempe chain에 點 C가 包含되지 않을 때는 이 Kempe chain 中의 點의 色 α와 γ를 모두 反轉시켜주면(서로 바꾸면) E點은 γ로 되고 따라서 點 A에 α를 칠할 수 있게 된다. (圖23)

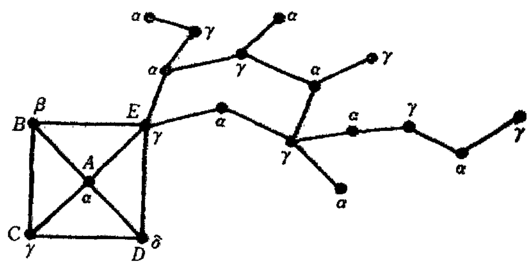

圖23

「E에서 始作하는 色 α, γ에 關한 Kempe chain」이 C點에 到達했을 경우는 圖22에서의 實線 BD 代身에 實線 CE를 더한 그래프를 圖22 代身에 생각하기로 한다. 이때는 Kempe chain의 一部가 C, E를 지나는 고리(環)가 되어서 點 B, D는 이 고리의 內外로 分離되어 버린다. (圖24)

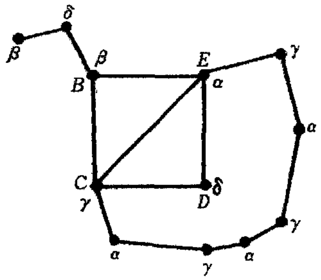

圖24

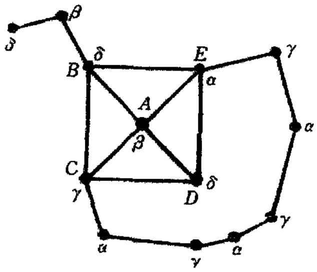

圖25

이경우는 點 B에서 始作하는 色 β, δ에 關한 Kempe chain을 생각하면 이 Kempe chain은 點 D에 到達하지 못한다. (點 B와 D가 $\alpha\gamma$-chain에 의하여 分離되어 있으므로) 그래서 點 B에서 始作하는 $\beta\delta$-chain 中의 色 β와 δ를 서로 反轉시켜서 A點에는 色 β를 칠할 수 있게 된다. (圖25)

萬一 4集點 A에 이웃하는 4點中 같은 點이 있는 경우, 例컨대 다음 圖26과 같은 경우는 어떻게 될 것인가 생각하자. 이때는 다음 圖27과 같은 그래프를 생각하기로 한다. 이것은 歸納法의 假定에 의하여 4色으로 구별색칠이 可能하다. 그러므로 처음의 그래프의 點 A에는 第4의 色 α를 칠하면 된다. (圖28).

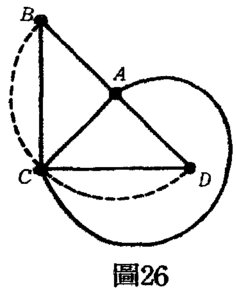

圖26

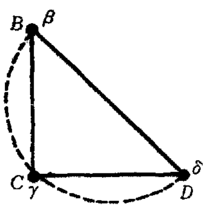

圖27

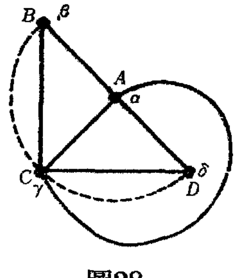

圖28

(4) 5集點의 處理

2～4集點의 그래프에서는 歸納法이 無事히 進行 되었었다. 이제 5集點에 關해서는 어떻게 될 것인가를 생각하자.

點 A의 둘레의 5點 B, C, D, E, F가 모두 서로 다를때, 點 A와 이곳에 모이는 5개의 實線을 除去한 5邊形 $BCDEF$의 內部(처음에 點 A가 있던

部分)에 適當히 實線만을 加하여 3角形分割이 되도록 하면 이 그래프는 歸納法의 假定에 의하여 4色으로 구별색칠이 可能하다. 5邊形의 꼭지 點이 3色으로 칠해져 있을 경우는 간단하므로 4色으로 칠해져 있을 경우를 생각 하자. 이때는 2개의 點이 같은 色으로 칠해져 있게 되며 이들은 서로 이웃하지 않으므로 例컨대 이들을 B, E라고 하자. (圖29)

點 F에서 始作되는 色 α, γ에 關한 Kempe chain을 생각한다. 萬一 이것이 點 C에 到達하지 않는다면, chain 中의 色 α와 γ를 서로 바꾸므로써,

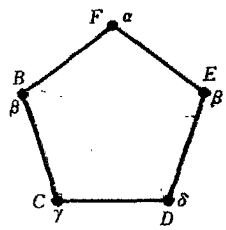

圖29

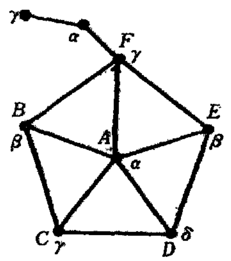

圖30

點 F는 γ가 되고 點 A에 α를 칠할 수 있다. (圖30)

마찬가지로 點 F에서 始作하는 $\alpha\delta$-chain이 點 D에 到達하지 않을때는 chain 中의 色 α와 δ를 서로 바꾸므로써 點 A에 α를 칠할 수 있다.

그러므로 <u>點 F에서 始作되는 $\alpha\gamma$-chain은 點 C에 到達하고, 點 F에서 始作되는 $\alpha\delta$-chain도 點 D에 到達하는 경우</u>를 생각하자. (圖31)

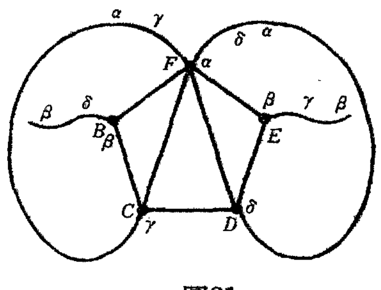

圖31

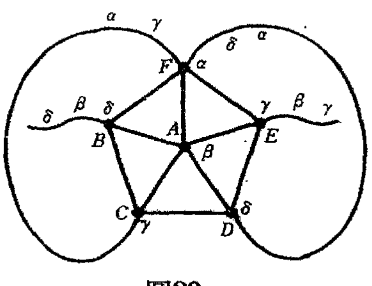

圖32

點 F, C를 지나는 $\alpha\gamma$-chain에서 點 B와 D는 서로 分離되어 있으므로 點 B에서 始作하는 $\beta\delta$-chain은 點 D에 到達하지 않는다. 또 點 F, D를 지나는 $\alpha\delta$-chain에서 點 E와 C는 서로 分離되어 있으므로 點 E에서 始作하는 $\beta\gamma$-chain은 點 C에 到達하지 않는다. 그래서 點 B에서 始作하는 $\beta\delta$-chain과, 點 E에서 始作하는 $\beta\gamma$-chain에서 色의 交換을 施行하면, 點 B는 δ로

點 E는 γ로 되고 點 A에는 β를 칠할 수 있게된다. (圖32)

點 A의 둘레의 5點中 같은 點이 있을 경우는 주어진 그래프가 다음 圖33과 같이 된다. 이때는 다음 圖34와 같은 그래프를 생각한다.

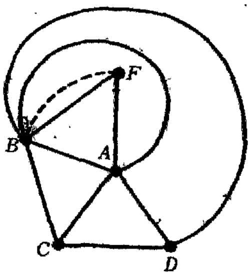

圖33

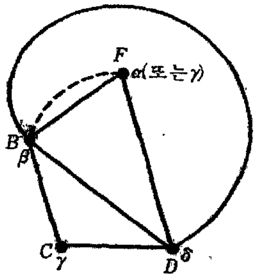

圖34

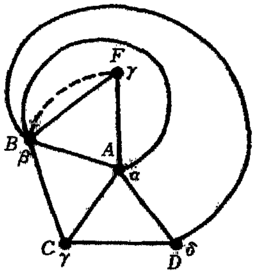

圖35

點 F의 色이 點 C의 色과 같은 γ이면 點 A에 第4의 色 α를 칠할 수 있고, 點 C의 色과 다른 α이면 點 F에서 始作되는 $\alpha\gamma$-chain를 생각하면 이것은 點 B, D인 두나라로 된 고리에 妨害되어서 點 C에 到達할 수 없다. 그러므로 chain 中에서 色 α와 γ를 서로 바꾸면 亦是 點 A에 α를 칠할수 있게된다. (圖35)

이렇게해서 Kempe는 5集點도 除去된다고 判斷하여 數學的歸納法이 完成되고 따라서 4色問題는 解決되었는것 같이 結論하였으나 다음 節에서 指摘하듯이 5集點의 處理中에 破綻을 招來하여 4色問題의 完全解決에는 失敗하고 말았다.

5. Heawood의 修正과 結論.

4色問題에 關한 Kempe의 方法을 整理하면 다음과 같이 된다.

1) 나라를 點으로 表示하기로 하고 두나라가 境界線에 의하여 接해 있을 때는 이들 2點을 實線으로 잇기로 한다. 球面全體를 完全히 3角形으로 分割하는 그래프를 생각하고 서로 이웃하는 點이 서로 다른 色으로 색칠 되겠끔 그래프의 點들을 4色으로 구별색칠하는 것을 생각하면 된다.

2) 그래프에 包含되는 n集點(n개의 實線이 모이는 點)의 갯수를 p_n이라 하고 이와같은 n의 最大値를 N이라 하면

$$\sum_{i=2}^{N} p_i(6-i)=12 \qquad (*_2)$$

가 成立한다.

3) 그래프에 包含되는 點의 數에 關한 數學的歸納法에 의하여 問題를 解決하기로 한다. 이때 2~4 集點은 存在하지 않는것 이라고 해도 無妨하다. 卽 $p_2=p_3=p_4=0$ 이라해도 相關없다.

이와같이 생각한 앞 節에서의 5 集點의 處理에서 破綻이 생기는 것을 Heawood 가 指摘하였으니 그 內容은 다음과 같다. 卽 78 페이지에서 下線을 친 部分인 「點 F 에서 始作되는 $\alpha\gamma$-chain 은 點 C 에 到達하고, 點 F 에, 始作되는 $\alpha\delta$-chain 도 點 D 에 到達하는 경우」인데, 78페이지의 圖31과 같이 $\alpha\gamma$-chain 과 $\alpha\delta$-chain 이 (F 를 除外하고) 서로 分離하고 있을 때는 相關없으나 다음 圖36과 같이 두 chain 이 서로 물고 있을 경우도 생긴다. 이때는 點 B 에서 始作되는 $\beta\delta$-chain 과 點 E 에서 始作되는 $\beta\gamma$-chain 의 兩 chain 에서 色의 交換이 同時에는 이루어지지 않는 경우가 생기게 되는 것이다. 따라서 Kempe 의 證明은 成立하지 않는다.

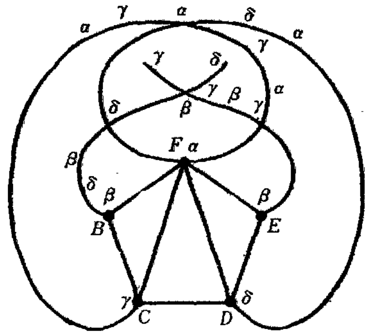

圖36

그러나 아무튼 Kempe 의 方法은 問題를 解決하는 하나의 關鍵을 이루었음은 事實이고 1976年의 Appel-Haken 의 方法도 Kempe 가 提示한 方法의 延長上에 있다고 할 수 있을 것이다.

Kempe 가 證明한 바를 要約하면 다음과 같이 간추려 진다.

1. 나라의 周圍의 國境線이 이웃나라가 달라지기 때문에 n 개로 分斷되어 있는 나라를 n 邊國이라고 부르기로하면 3개國 以上을 包含하는 어떤 地圖에도 반드시 2 邊國, 3 邊國, 4 邊國, 5 邊國中의 어느하나는 반드시 包含되어 있다.

2. 2 邊國, 3 邊國, 4 邊國을 包含하는 地圖는 이와같은 나라中의 하나를 이웃나라에 合倂하여 나라의 갯수가 하나줄은 地圖가 4 色으로 구별색칠되면 처음의 地圖도 4 色으로 구별색칠 된다.

3. 2 邊國, 3 邊國, 4 邊國을 包含하지 않고 5 邊國만을 包含하는 地圖는 그 5 邊國中의 하나를 이웃나라에 合倂하여 나라의 갯수가 하나 줄은 地圖가 5 色으로 구별색칠되면 처음의 地圖도 5 色으로 구별색칠된다.

Kempe 는 이 **3.** 의 2개所에 있는 5 色을 4 色으로 고쳐쓴것—이것을 **3′** 이라고 부르자—이 成立한다고 생각하고 있었으나 Heawood 에 의하여 그렇지 못함이 指摘되었는 바이다. **2.** 의 2개所에 있는 4 色은 5 色으로 바꾸어 쓸 수 있음은 勿論이다.

1890 年에서 1976 年까지의 約90年間, 4 色問題를 肯定的으로 풀고자 試圖

한 사람들의 大部分은 이 3′을 證明하고자 했으며 1976年의 Appel-Haken의 證明도 實은 Kempe가 2. 및 3.에서 提示한 方法의 延長上에 있다고 할 수 있는 것이다.

6. Heesch의 放電考案.

Kempe의 證明은 5集點인 곳에서 破綻을 招來한 것이므로 많은 사람들이 그 修正을 試圖했었다. 손쉽게 생각할수 있었는 것은 5集點만을 생각하지 말고 그 周圍의 點도 생각하여 더욱 細分하는 것이었다. 이렇게하여 여러가지로 點의 combination을 생각하게 되였으니 여기에서 例컨대 다음 圖37과 같이 4개의 5集點이 서로 이웃하고 있는 경우를 생각하자.

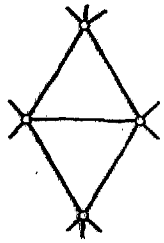

圖37

p點으로 이루어진 그래프中에 이와같은 部分이 있다고 하면 이 그래프는 $p-1$點以下의 경우로 還元시킬 수 있다. 卽 $p-1$ 以下의 點으로 된 그래프가 모두 4色으로 구별색칠된다면 이 p點으로된 그래프도 4色으로 구별색칠이 可能하게 되는 셈이다.

한 개의 그래프의 1部分이 되어 있는 點, 線의 combination을 形(configuration)이라고 부르기로 하자. 그 形을 包含하는 p點으로 된 그래프는 $p-1$ 以下의 點으로 되는 경우로 還元시킬 수 있을 때 그 形을 「可約인 形」(reducible configuration)이라고 부르기로 한다. 圖37은 可約인 形의 例이다. (여기에서 이것이 可約이라는 證明을 添記하지 않으며, 다만 그 證明은 매우 어렵다는 事實만을 附言해 둔다.)

4色問題의 解決에 要한 100年 가까운 歲月의 大部分은 이와같은 可約인 形의 目錄을 增大시키는 데에 消費되었다고 해도 過言은 아닐 것이다. 왜냐하면 1개의 5集點과 그 둘레의 點으로 이루어지는 可能한 形이 모두 可約이면 4色問題는 解決되기 때문이다.

1972年 H. Heesch는 放電(discharge)이라는 方法을 考案했다. 이것은 한 개의 그래프에 屬하는 모든點에 電荷(charge)를 賦與해 놓고 그 放電의 結果의 電荷의 配置를 생각해 보자는 것이다.

처음에, i集點에는 $60(6-i)$라는 電荷가 주어진다. 卽 모든 5集點에는 +60이라는 電荷가, 6集點에는 0이, 7集點에는 −60이, 8集點에는 −120이, 따위로 賦與된다. 이렇게하면 79페이지의 $(*_2)$인 式에 의하여 ($p_2=p_3=p_4=0$인 경우이므로)

$$\sum_{i=5}^{N} p_i \cdot 60(6-i) = 720$$

이므로 그래프全體의 電荷의 總合은 +720이 된다.

Heesch의 放電手續은 2段으로 나뉘어 진다. 第1放電手續에서는 5集點에 있는 양의 電荷를 等分하여 그것에 接하고 있는 음의 電荷를 가진點 (7集點以上—이것을 大集點(major vertex)이라고 부른다)에 (各等分을)나누어 준다.

Heesch는 20개의 可約인 形을 選擇했다. 이 集合을 **不可避集合** (unavoidable set)라고 부른다. 不可避集合의 어느 形도 包含하지 않는 그래프에서는 그 第1放電手續에 의하여 5集點의 양의 電荷는 모두 放電되어 버린다. 그러나 둘레의 5集點으로 부터 電荷가 주어지기 때문에 지금까지 음의 電荷를 가졌던 點이 양의 電荷를 가진 點으로 바뀌어 버리는 大集點이 생긴다.

Heesch는 6集點, 7集點을 하나도 包含하지 않는 그래프에서는 이와같은 양의 電荷가 생기는 것은 16種類의 特別한 경우만이고, 이들의 경우도 그 양의 電荷를 第2의 放電手續에 의하여 그 둘레의 음의 電荷의 꼭지點에 나누어 주면 양의 電荷를 가진點이 完全히 없어진다는 것을 밝혔다. 그런데 放電에 의하여 그래프 全體의 電荷의 總合은 변하지 않는다. 처음에 電荷의 總合이 +720이었으므로 이와같이 양의 電荷의 點이 없어질 수는 없는 것이다. 따라서 6集點, 7集點을 하나도 包含하지 않는 그래프에 있어서는 不可避集合中의 可約인 形을 적어도 하나는 包含해야 한다. 卽 이경우에는 問題가 解決된 셈이다.

처음에 5集點에 +60이라는 電荷를 賦與한것은 그것이 그 둘레의 大集點의 數에 따라서 5等分도 되고 4等分도 되고, 3等分도 되게 함이 었을 것이다. 또한 charge는 電荷가 아니라도 相關없을 것이나 多分히 電氣라는 것을 想像했음은 豫想된다.

7. Appel-Haken의 電子計算機에 의한 解決.

Appel-Haken은 本質的으로는 이 Heesch의 方法을 採用했다. 다른點은 不可避集合에 包含되는 可約인 形을 約 2000個(正確히는 1879개)로 大幅 增大시킨 點과, 放電手續은 2段으로 나누지는 않으나 훨씬 複雜하게 한 點이다. 勿論 6集點, 7集點을 除外하지도 않는다. Appel-Haken의 電子計算機에 의한 解決方法은 다음 차례에 의한 것이다.

1) 約 2000개의 可約인 形으로 된集合 $\mathscr{U}$를 固定한다.

2) 또 放電手續 $\mathscr{D}$를 固定한다.

3) 初期電荷로서 그래프中의 i集點에 $60(6-i)$를 賦與한다.

4) 그래프가 $\mathscr{U}$에 包含되는 어느 形도 包含하지 않는다면 $\mathscr{D}$에 의하여 完

全히 放電된다. 卽 양의 電荷를 가진點은 하나도 없게 된다.

5) 放電에 의하여 電荷의 總合은 변하지 않는다. 그런데 初期電荷의 總合이 +720이었으므로, 完全히 放電될 수가 없다.

6) 따라서 어떤 그래프라도 $\mathscr{U}$에 包含되는 可約인 形을 적어도 하나는 包含하게 된다.

7) 卽 $p-1$ 以下의 頂點으로 된 그래프가 4色으로 구별색칠되면 p개의 頂點으로 된 그래프도 4色으로 구별색칠 된다.

이러게 해서 4色問題는 肯定的으로 解決되었다.

Appel-Haken은 이 放電手續 $\mathscr{D}$를 만들어내는 데와, 不可避集合 $\mathscr{U}$의 모든 元素가 可約이라는 것을 確認하는 데에 電子計算機를 使用한 것이다.

8. 結言.

위에서 말한 Appel-Haken의 方法中, 不可避集合 $\mathscr{U}$의 元素의 構成法이라든가, 圖37과 같은 보기가 可約이라는 證明이라든가 또는 放電手續 $\mathscr{D}$를 만들어내는 過程等을 일일이 本稿에 記하지 못함을 매우 遺憾으로 생각하는 바이다. 그러나, 前記한 바와 같이 諸文獻의 入手가 如意치 못한 形便에 있을 뿐아니라, Appel-Haken의 論文이 타이프친 것으로 150페이지에 達하는 尨大한 것이므로 本稿에서의 4色問題의 數學的解說은 以上으로 그치고 위에서 말한 爾餘部分은 다음 機會로 미루기로 한다.

앞에서 말한 바와 같이 Appel-Haken은 長長 4年餘에 걸쳐서 1500時間이라는 電子計算機의 使用으로 4色問題를 解決했는데, 數學의 問題中에 이와 같이 電子計算機의 힘을 빌려야만 解決될 수 있는 問題가 따로이 또 있을 것인가는 매우 疑心스러운 일이다. 勿論將來의 問題이기는 하나 現在는 이와같은 問題는 4色問題以外에는 있을것 같지가 않다.

4色問題解決에 際하여 Appel-Haken도 이 問題는 아무래도 이렇게 많은 경우를 따져가는 方法밖에 없고 따로이 數學的인 깨끗하고 고운 證明은 없을 것이라고 말하고 있다. 아마 그런 것일지 모르기는 하지만 아무튼 數學的인 美麗한 證明이 아직까지 주어지지 않는 點이 不滿이라고 아니할 수 없다.

成均館大學校