Bull. Korean Math. Soc.
Vol. 14, No. 1, 1977.

$C([0,1])$ 위에서의 개양선형 범함수

林 禎 垈

제 1 장 서 론

위상공간 M위에서 연속함수들의 집합$C(M)$위에서 정의된 범함수 Φ에 대해 J. R. Baxter 와 R. V. Chacon 두 교수는 개양선형에 관한 개념을 도입하였다. 이 M이 특히 $M=[0.1]$와 같이 일차원의 폐구간 일때는 선형이 됨을 증명하였고 더 나아가 Compact support 를 갖는 $C(M)$내의 함수의 집합 $C_0(M)$ 위에서 Φ가 정의됐을 때도 역시 선형이 됨을 증명하였다. 이 논문에서는 $C_0(M)$ 위에서 도입된 개양선형범함수 Φ가 직접 양선형범함수인 Φ^+와 개양선형범함수 Φ^-가 존재하여 $\Phi=\Phi^+-\Phi^-$와 같이 분해됨을 증명 하였다. 그리고 또 $C_0(M)\subset L_B$인 하나의 벡터격자 L_B 위까지 Φ를 확장시키고, 끝으로 Φ^+와 $\Phi_{(a,b)}$가 상대 유계성이 있음을 증명하였다.

제 2 장 Φ^+ 와 그의 기본성질

제 1 절 예비정리들

M을 위상공간이라 할 때 M위에서 정의된 유계한 연속함수 전체를 $C(M)$라 표시 하기로 하자. $C(M)$ 위에서 정의된 개양선형범함수 Φ가 단조하고 연속이며

(i) $\|\Phi\|\leq 1$

(ii) $fg=0$ 일 때 $\Phi(f+g)=\Phi(f)+\Phi(g)$

(iii) a, b가 실수면 $\Phi(af+b)=a\Phi(f)+b$

와 같은 조건을 만족할 때 개선형이라 부른다. 일반적으로 개선형이라 하여 선형은 아니다.

compact support 를 갖는 $C(M)$ 내의 함수를 $C_0(M)$ 라 표시하고 이하 이 논문에서 Φ는 $C_0(M)$ 위에서 정의 됐다고 전제하기로 하고 R은 실수집합을 나타내기로 한다.

다음 정리는 이 논문에서 인용하고저 하는 중요한 정리들이다.

정리 2·1. 개선형범함수 $\Phi: C_0(M)\to R$가 (1) $\lim_{\|f-g\|\to 0}\Phi(f)=\Phi(g)$, (2)$f$의

support 위에서 g가 상수면 $\Phi(f+g)=\Phi(f)+\Phi(g)$
를 만족하면 선형이다.

증명. 참고문헌 (1)에 있다.

정리 2·2. L_B가 $C_0(M)$를 포함하는 한 벡타격자일 때 $f,g\in L_B$이고 $0\leq h\leq f+g$인 h가 L_B내에 존재하면 $0\leq\varphi\leq f$와 $0\leq\Psi\leq g$가 성립하고 $h=\varphi+\Psi$인 Ψ와 ψ가 L_B내에 존재한다.

증명. 참고문헌 (7) 8페이지 1·4를 참고하기 바란다.

정리 2·3. a가 실수이고 f는 $C_0(M)$내의 임의의 함수면 $\Phi(af)=a\Phi(f)$가 성립한다.

증명. 참고문헌 (1)의 정리 (3)을 참고하기 바란다.

정리 2·4. 임의의 compact 집합 E에 대해 유한개를 제외한 무한히 많은 함수 f_n-g_n가 E위에서 0이 되는 $C_0(R)$내의 일양유계인 함수수열을 f_n와 라 하면 $n\to\infty$일 때 $\Phi(f_n)-\Phi(g_n)\to 0$이다.

증명. 참고문헌 1의 보조정리 3을 참고하기 바란다.

제 2 절 양함수에 대한 $\Phi^+(f+g)=\Phi_+(f)+\Phi^+(g)$ 증명

정리. 2·5. $C_0(M)$을 포함하는 유계함수로 된 벡타격자 L_B가 있다 하자. 이때 Φ^+를 $\Phi^+(f)=\sup\limits_{0\leq\varphi\leq f}\Phi(\varphi)$라 정의하자. 여기서 f는 L_B의 양함수이고 φ는 $C_0(M)$내의 양함수이다.

보조정리 2·6. (1) $f\geq 0$면 $\Phi(f)\geq 0$ (2) 임의의 상수 $c\geq 0$와 $f\in L_B$, $f\geq 0$면 $\Phi^+(cf)=c\Phi^+(f)$

증명. Φ^+의 정의 2·5와 Φ의 성질인 정리에 의해 명백하다.

정리 2·7. $f,g\in L_B$ $f\geq 0$, $g\geq 0$면 $\Phi^+(f+f)=\Phi^+(f)+\Phi^+(g)$

증명. f와 g를 L_B의 양함수라 하자. $0\leq\varphi\leq f$이고 $0\leq\Psi\leq g$라면 $0\leq\varphi+\Phi\leq f+g$이므로 $\Phi^+(f+g)=\sup\limits_{0\leq h\leq f+g}\Phi(h)\geq\Phi(\varphi+\Psi)$이다. 그런데 φ와 Ψ는 $C_0(M)$의 함수이므로 참고 문헌 (1)의 보조정리 (7)에 의해 $\Phi(\varphi)+\Phi(\Psi)=\Phi(\varphi+\Psi)$이다. 고로 양변에 supremum을 취하면 $\Phi^+(f+g)\geq\Phi^+(f)+\Phi^+(g)$을 얻는다.

역으로 $0\leq h\leq f+g$인 h를 $C_0(M)$ 내에서 (즉 L_B내에서) 잡자. 그러면 정리 2·2에 의해 $0\leq\varphi\leq f$이고 $0\leq\Psi\leq g$이며 $\varphi+\Psi\leq h$인 φ와 Ψ가 $C_0(M)$ 내에 존재한다. 고로 $\Phi(\varphi)\leq\Phi(f)$, $\Phi(\Psi)\leq\Phi(g)$를 얻는다. 그런데 또 $\Phi(h)$

$=\Phi(\varphi)+\Phi(\Psi)\leq\sup_{0\leq\varphi\leq f}\Phi(\varphi)+\sup_{0\leq\Psi\leq g}\Phi(\Psi)=\Phi^+(f)+\Phi^+(g)$ 이다.

고로 양변에 supremum 을 취하면 $\sup_{0\leq h\leq f+g}\Phi(h)\leq\Phi^+(f)+\Phi^+(g)$.

따라서 $\Phi^+(f+g)\leq\Phi^+(f)+\Phi^+(g)$를 얻어 증명됐다.

지금까지는 범함수 Φ^+ 를 L_B의 양함수에 대해서만 정의하였고 또 그 범위에서만 선형임을 증명하였다. 다음절에서 다시 Φ^+를 확장시켜 임의의 Φ^+의 함수에 대하여 Φ^+를 정의하고 거기에서 선형성이 있음을 증명해 보기로 하자.

제 3 절 확장과 분해

f를 L_B내의 임의의 함수라 하고 m과 n을 임의의 양의 상수로서 $f+m$과 $f+n$이 양수가 되도록 잡았다 하자. e를 $C_0(M)$의 항등원 즉 모든 M의 원소에 대해 함수값이 1인 연속함수라 하자. 그러면 $\Phi(M)$의 뜻을 $\Phi(Me)$라고 정의할 수 있다. 이때 $f+m$, $f+n$, m, n, 이 모두 양이므로

$\Phi^+(f+m+n)=\Phi^+(f+m)\Phi+^+(n)=\Phi^+(f+n)+\Phi^+(m)$

를 얻게 되여 $\Phi^+(f+m)-\Phi^+(m)=\Phi^+(f+n)-\Phi^+(n)$ 임을 알 수 있다.
이는 $\Phi^+(f+m)-\Phi^+(m)$의 값이 상수 m의 값을 잡는데 관계없이 일정함을 의미한다. 고로 임의의 L_B내의 f에 대한 Φ^+의 값 $\Phi^+(f)$를 $\Phi^+(f+m)-\Phi^+(m)$로서 정의 할 수 있다. 이와 같이 확장된 Φ^+가 L_B위에서 선형임을 보이자. 그리기 위해 다음 두 정리를 위선 얻을 수 있다.

정리 2·8. C가 임의의 실수이고 f는 $f\in L_B$인 임의의 함수면 $\Phi^+(cf)=c\Phi^+(f)$이다.

증명. 정리 2.7과 참고문헌 (1)의 정리 (2)으로부터 쉽게 얻어진다.

정리 2·9. 임의의 f, g가 L_B내의 함수일 때 $\Phi^+(f+g)=\Phi^+(f)+\Phi^+(g)$이다.

증명. L_B내의 임의의 함수 f와 g에 대해 $f+m\geq 0$이고 $g+n\geq 0$인 두 상수 m과 n을 잡자. 그러면 $\Phi^+(f+g)=\Phi^+(f+g+m+n)-\Phi^+(m+n)$라 정의할 수 있었다. 한편 $\Phi^+(f+g+m+n)=\Phi^+(f+m)+\Phi^+(g+n)$ 이고 $\Phi^+(m+n)=\Phi^+(m)+\Phi^+(n)$ 가 됨은 $f+m$와 $g+n$가 양함수라는 사실로부터 명백하다. 고로 $\Phi^+(f+g)=[\Phi^+(f+m)-\Phi^+(m)]+[\Phi^+(g+n)-\Phi^+(n)]$를 얻어 정리가 증명됐다.

위 정리들을 종합하면 Φ_+는 L_B위에서 선형양범함수가 됨을 보였다. 그리고 또 $\Phi^+(-f)+\Phi_+(f)=\Phi^+(0)=0$ 이므로 $\Phi^+(-f)=-\Phi^+(f)$를 얻었다.

다음은 $C_0([0.1])$ 위에서 정의된 임의의 개양선형범함수 Φ가 양선형범함수 Φ^+와 개양선형범함수 Φ^-와의 차로 분해됨을 보이고저 한다.

정리 2·10. $C_0([0.1])$ 을 포함하는 벡타격자 L_B 위에서 정의된 임의의 개양선형범함수 Φ에 대해, 양선형범함수 Φ^+와 개양선형범함수 Φ^-가 존재해서 $\Phi=\Phi^+-\Phi^-$로 표시된다.

증명. 앞 3절에 의해 Φ^+는 L_B 내의 임의의 함수에 대해 정의된 양선형범함수임을 보였다. 그런데 지금 선형범함수 Φ^+와 개선형범함수 Φ와의 차 $\Phi^+-\Phi$를 Φ^-라고 정의하면 Φ^-는 명백히 개선형범함수가 되고 $\Phi=\Phi^+-\Phi^-$를 얻어 정리가 증명됐다. 만일 Φ가 $C_0([0.1])$ 위에서 정의된 개양선형범함수이고 $|f|\leq 1$이라면 $|\Phi(f)|\leq\Phi(|f|)\leq\Phi(e)$ 고로 이로부터 $\|\Phi\|=\Phi(e)$를 얻는다. 이로부터 다음 정리를 얻는다.

정리 2·11. $\|\Phi\|=\Phi^+(e)+\Phi^-(e)$

증명. 앞정리 2·10에 의해 $\Phi=\Phi^+-\Phi^-$였기 때문에 $\|\Phi\|\leq\Phi^+\|+\|\Phi^-\|=\Phi^+(e)+\Phi^-(e)$를 얻는다. 반대 부등식을 얻기 위해 φ를 L_B 내의 함수로서 $0\leq\varphi\leq 1$ 되게 잡자. 그러면 $|2\varphi-1|\leq 1$이고 제 2 장 제 1 절의 (iii)에 의해 $\|\Phi\|\geq\Phi(2\varphi-1)=2\Phi(\varphi)-\Phi(e)$를 얻는다. 여기서 φ에 대한 supremum을 취하면 $\|\Phi\|\geqq 2\Phi^+(e)-\Phi(e)=\Phi^+(e)+\Phi(e)$. 고로 $\|\Phi\|=\Phi^+(e)+\Phi^-(e)$를 얻어증명됐다.

제 3 장 개선형범함수 $\Phi_{(a,b)}$와 상대 유계성

제 1 절 $\Phi_{(a,b)}$의 정의와 상대 유계성

a와 b를 확장된 실수라 하자. $C_0((a,b))$ 내의 임의의 함수 f에 대하여 일양으로 유계한 함수의 수열 f_n을 $C_0((R))$에서 잡되

(1) 구간 (a,b) 안에서 compact support를 갖도록 하고

(2) 구간 (a,b) 내의 임의의 compact인 집합을 E라 할 때 유한개의 f_n-f의 값은 제외하고 나머지 모든 f_n-f의 값이 E 위에서 영이 되도록 잡았다고 하자.

그러면 앞 정리 2·4에 의해 $n\to\infty$일 때 $\Phi(f_n)$는 한 극한값을 갖는다. 여기서 Φ는 $C_0(R)$ 위에 서정의된 개선형범함수이다. 이 극한값을 $\Phi_{(a,b)}(f)$라고 표시하기로 하자. 그러면 이 $\Phi_{(a,b)}$는 개구간 (a,b) 위에서 정의됐기 때문에 일반적으로는 선형범함수가 될 수 없다.

보조정리 3·1. $\Phi_{(a,b)}$는 $C_0((a,b))$ 위에서 개선형 범함수이다. $\Phi_{(a,b)}$는 일의적으로 정의된다.

증명. 위 정의에서 $\Phi_{(a,b)}$가 수열 f_n와 관계없이 일의적으로 정해진다는 사실은 정리 2·4로부터 자명하다. 또 참고문헌 (1)의 보조정리 (4)에 의해 $\Phi_{(a,b)}$는 개양선형범수임을 알 수 있다. 고로 증명됐다.

여기서 정의된 $\Phi_{(a,b)}$에 대해 앞정리 2·10을 적용시키면 다음과 같은 분해를 얻는다.

따름정리 3·2. 위에서 정의된 $\Phi_{(a,b)}$에 대해 양선형범함수 $\Phi^+_{(a,b)}$와 개양선형함수 $\Phi^-_{(a,b)}$가 존재하여 $\Phi_{)a,b}=\Phi^+_{(a,b)}-\Phi^-_{(a,b)}$로 표시된다.

다음은 선형범함수에 대해서도 상대유계성을 갖는가를 검토해 보자. 이에 대해 다음 정의부터 살펴하자.

정의 3·3. norm이 주어진 선형공간 L위에서 정의된 개선형범함수 Φ가 있을 때 실수집합 $\{\Phi(g)\,|\,|g|\leq f\}$이 $f\in L$인 임의의 함수 f에 대해 항상 유계하면 Φ는 상대유계하다고 한다.

정리 3·4. Φ^+와 $\Phi_{(a,b)}$는 상대유계하다.

증명. 선형범함수 Φ^+의 상대유계성은 직접 참고문헌 (9)의 8·33에서 명백하다.

개선형범함수 $\Phi_{(a,b)}$의 상대유계성을 보이자. f를 $C_0((a,b))$ 내의 임의의 함수라 하자. $|g|\leq f$인 $C_0((a,b))$ 내의 임의의 함수 g를 잡으면 $f\geq g$이고 $-f\leq g$이다. Φ가 단조범함수이기 때문에 $\Phi_{(a,b)}$도 단조범함수이다. 따라서 $\Phi_{(a,b)}(f)\geq\Phi'_{(a,b)}(g)$이고 $\Phi_{(a,b)}(-f)\leq\Phi_{(a,b}(g)$이다. 또 $\Phi_{(a,b)}(-f)=-\Phi_{(a,b)}$이기 때문에 이 두 식으로부터 $|\Phi_{(a,b)}|\leq\Phi_{(a,b)}(f)$ 이므로 $\Phi_{(a,b)}$가 상대유계이다. 고로 증명됐다.

참 고 문 헌

[1] J.R. Baxter and R.V. Chacon, *Almost linear operators and functionals on* $C([0.1])$, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. **47** (1975)

[2] J.R. Baxter and R.V. Chacon *Nonliinear functionals on* $C([0.1]\times[0.1])$, Pacific J. Math. **48** (1973).

[3] J.R. Baxter and R.V. Chacon, *Functionals on contintinuous functions*, Pacific J. Math., **51** (1974)

[4] N.A. Friedman and M. Katz, *Additive functionals on Lp spaces*, Canad. J. Math. **18** (1966).

[5] N.A. Friedman and M. Katz, *On additive functionals*, Proc. Amer. Math Soc. **21** (1969).

[6] N.A. Friedman and A.E. Tong, *On additive operators*, Canad. J. Math. **23** (1971).

[7] A. L. Peressini, *Ordered topological vector spaces*, Harper's Series in Modern Math., Harper and Row (1967).
[8] H. L. Royden, *Real analysis*, The Macmillan Cor, New York (1968).
[9] E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis* I, Springer-Verlag (1963).

延世大學校