J. Korean Math. Soc.
Vol.14, No.1, 1977.

QUELQU'OPÉRATEUR D'EVOLUTION DANS $L^\infty(\Omega)$

PAR KI SIK HA

1. On se donne Ω un espace mesuré de mesure bornée. Pour $1\leq p\leq\infty$, $L^p(\Omega)$ désigne l'espace de Lebesgue de Ω de la norme $\|\cdot\|_p$. On suppose qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie:

H_1) A est m-accrétif[1] dans $L^\infty(\Omega)$ et cycliquement monotone[2] dans $L^2(\Omega)$.

On se donne d'autre part β une application de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$[3] vérifiant:

(H_2) p. p. $x\in\Omega$, $r\in\boldsymbol{R}\to\beta(x,r)\in\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ est maximal monotone[4] et pour tout $s\in\boldsymbol{R}$, il existe $v\in L^\infty(\Omega)$ tel que p. p. $x\in\Omega$, $s\in\beta(x,v(x))$.

On définie l'opérateur βA par

$$\beta A=\{[u,w]\in L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega)\ ;\text{ il existe } v\in L^\infty(\Omega) \text{ tel que } [u,v]\in A \text{ et } w(x)\in\beta(x,v(x)),\ \text{p. p. } x\in\Omega\}.$$

On a alors le théoréme suivant:

THÉORÈME 1. *Suppose qu'un opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ vérifie (H_1) et qu'une application β de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ vérifie (H_2). Soit βA non vide. S'il existe un opérateur B m-accrétif de $L^\infty(\Omega)$ tel que $B\subset\beta A$, alors pour tout $u_0\in D(\beta A)$ il existe $u\in C([0,T]\,;L^\infty(\Omega))$ tel que*

$$\begin{cases} u(t)\in D(\beta A) \ \ \textit{pour tout}\ t\in[0,T] \\ \dfrac{du}{dt}(t)\in L^\infty(]0,T[\,;\sigma(L^\infty(\Omega),L^1(\Omega))) \\ \dfrac{du}{dt}(t)+\beta Au(t)\ni f(t)\ \ \textit{p.p. sur}\ ]0,T[\\ u(0)=u_0, \end{cases}$$

où $T>0$ et $f:[0,T]\to L^\infty(\Omega)$ est continue et de variation bornée.

REMARQUE 1. Sous les hypothèses du théorème,

Received by the editors Apr. 28, 1997.

1) Pour $\lambda>0$, $(I+\lambda A)^{-1}$ est une contraction partout définie de $L^\infty(\Omega)$ dans lui même.

2) Pour toute suite cyclique $u_0,u_1,u_2,\cdots,u_n=u_0$ de $D(A)$ et toute suite $v_i\in Au_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$, on a $\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega(u_i-u_{i-1})v_i\geqslant 0$.

3) l'ensemble de toutes les parties de $\boldsymbol{R}$.

4) Un opérateur A d'un espace de Hilbert H est maximal monotone si A est m-accrétif dans H.

1) si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée, βA est m-accrétif dans $L^\infty(\Omega)$:
   (a) β est univoque;
   (b) pour tout $g \in L^\infty(\Omega)$ et $\lambda > 0$, il existe au plus un $u \in L^\infty(\Omega)$ tel que $u + \lambda\beta Au \ni g$,
2) si pour tout $c \geqslant 0$, l'ensemble $\{u \in D(A) ; \|u\|_\infty + \|Au\| \leqslant c\}$ est relativement compact dans $L^\infty(\Omega)$, alors il existe un opérateur B m-accrétif de $L^\infty(\Omega)$ tel que $B \subset \beta A$, où $\|Au\| = \inf\{\|v\|_\infty ; v \in Au\}$. ([1] et [6]).

REMARQUE 2. En cas de $f(t) \equiv 0$, l'équation (1) a été étudié dans [1] et [6].

Pour un ensemble $\{T_i\}$ d'opérateurs de $L^\infty(\Omega)$, définissons

$$\prod_{i=j}^{j} T_i = T_j, \quad \prod_{i=j}^{n+1} T_i = T_{n+1}\Big(\prod_{i=j}^{n} T_i\Big) \text{ pour } n \geqslant j, \quad \prod_{i=j}^{n} T_i = I \text{ pour } n < j.$$

On pose $B(t) = B - f(t)$. $B(t)$ est m-accrétif dans $L^\infty(\Omega)$ et $D(B(t)) = D(B)$ pour tout $t \in [0, T]$. On pose $J_\varepsilon(t) = (I + \varepsilon B(t))^{-1}$ et $P_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}(I - J_\varepsilon(t))$ pour tout $\varepsilon > 0$. On définit $\hat{D}(B) = \{u \in L^\infty(\Omega) ; \lim_{\varepsilon \to 0+} \|B_\varepsilon u\|_\infty < +\infty\}$. On pose $|Bu| = \lim_{\varphi \to 0+} \|B_\varepsilon(t)u\|_\infty$ et ond éfinit $M(u) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |B(t)u|$ pour $u \in \overline{D(B)}$.

2. Dans cette section, on va démontrer le théorème 1. On considère l'équation approchée

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t-\varepsilon)}{\varepsilon} + B\left(\left[\dfrac{t}{\varepsilon}\right]\varepsilon\right) u_\varepsilon(t) \ni 0 & \text{pour } t > 0 \\ u_\varepsilon(t) = u_0 & \text{pour } t \leq 0 \end{cases}$$

dans $L^\infty(\Omega)$. $B\left(\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]\varepsilon\right)$ étant m-accrétif dans $L^\infty(\Omega)$, l'équation (2) s'écrit

$$\begin{cases} u_\varepsilon(t) = \left(I + \varepsilon B\left(\left[\dfrac{t}{\varepsilon}\right]\varepsilon\right)\right)^{-1} u_\varepsilon(t-\varepsilon) & \text{pour } t > 0 \\ u_\varepsilon(t) = u_0 & \text{pour } t \leq 0 \end{cases}$$

et elle admet au plus une solution. Donc

$$u_\varepsilon(t) = \prod_{i=1}^{[\frac{t}{\varepsilon}]} J_\varepsilon(i\varepsilon) u_0 \text{ pour } t > 0.$$

On note $J_\varepsilon(t)u_0 = (I + \varepsilon B)^{-1}(u_0 - \varepsilon f(t))$ et

$$(3) \qquad \|J_\varepsilon(t)u_0 - J_\varepsilon(\tau)u_0\|_\infty \leqslant \varepsilon \|f(t) - f(\tau)\|_\infty \text{ pour } 0 \leqslant t, \ \tau \leqslant T.$$

D'après le théorème 5.1 de [5] avec les hypothèses sur la fonction f, $u(t) = \lim_{\varepsilon \to 0+} u_\varepsilon(t)$ existe pour $t \in [0, T]$, $u(t) \in \hat{D}(B)$ pour $u_0 \in \hat{D}(B)$ et $u(t)$ est lipschizien en t. Donc p. p. $t\in[0, T]$, $u(t)$ est dérivable dans la topologie $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$. D'après la proposition II.5 de [6], $\hat{D}(B)=D(\beta A)$ et on a donc $u(t)\in D(\beta A)$ pour tout $u_0\in D(\beta A)$. Si l'on pose $U(0,t)u_0=u(t)$, $U(0,t)$ is un opérateur d'évolution au sens de Crandall-Pazy [5].

Posons $w_\varepsilon(t)=\dfrac{u_\varepsilon(t)-u_\varepsilon(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$. On a pour tout $t\in[0, T]$

$$\begin{aligned}
\|w_\varepsilon(t)\|_\infty &= \frac{1}{\varepsilon}\|u_\varepsilon(t)-u_\varepsilon(t-\varepsilon)\|_\infty\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\Big\|\prod_{i=1}^{[\frac{t}{\varepsilon}]} J_\varepsilon(i\varepsilon)u_0-\prod_{i=1}^{[\frac{t-\varepsilon}{\varepsilon}]} J_\varepsilon(i\varepsilon)u_0\Big\|_\infty\\
&= \Big\|A_\varepsilon\Big(\Big[\frac{t}{\varepsilon}\Big]\varepsilon\Big)\prod_{i=1}^{[\frac{t}{\varepsilon}]-1} J_\varepsilon(i\varepsilon)u_0\Big\|_\infty\\
&\leqslant \Big|A\Big(\Big[\frac{t}{\varepsilon}\Big]\varepsilon\Big)\prod_{i=1}^{[\frac{t}{\varepsilon}]-1} J_\varepsilon(i\varepsilon)u_0\Big|\\
&\leqslant M\Big(\prod_{i=1}^{[\frac{t}{\varepsilon}]-1} J_\varepsilon(i\varepsilon)u_0\Big).
\end{aligned}$$

D'après (3), B(t) satisfait deux conditions (C, 1) et (C, 2) de [5]. Donc d'après le lemme 2.3 de [5], il existe $c>0$ dépendant sur $\|u_0\|_\infty$, $M(u_0)$, ε_0 et T tel que

$$M\Big(\prod_{i=1}^{[\frac{t}{\varepsilon}]-1} J_\varepsilon(i\varepsilon)u_0\Big)\leqslant c$$

pour $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ et $0\leqslant t\leqslant T$.

Donc w_ε est borné dans $L^\infty(]0, T[\times\Omega)$ pour $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, Puisque $B\subset\beta A$, soit $v_\varepsilon(t)\in Au_\varepsilon(t)$ tel que

$$w_\varepsilon(t)+\beta v_\varepsilon(t)\ni f\Big(\Big[\frac{t}{\varepsilon}\Big]\varepsilon\Big). \tag{4}$$

D, après la remarque I.6 de [6], v_ε est aussi borně dans $L^\infty(]0, T[\times\Omega)$.

Soit $\varepsilon_n>0$ tel que $v_{\varepsilon_n}\to v$ et $w_{\varepsilon_n}\to w$ dans $\sigma(L^\infty(]0, T[\times\Omega), L^1(]0, T[\times\Omega))$ lorsque $\varepsilon_n\to0^+$. En particulier, pour tout $\zeta\in\mathfrak{D}(]0, T[; L^2(\Omega))$, on peut démontrer que $<\dfrac{du}{dt}, \zeta>=<w, \zeta>$. On a donc $\dfrac{dt}{dt}=w$ dans $\mathfrak{D}'(]0, T[; L^2(\Omega))$.

D'autre part, puisque $u_{\varepsilon_n}\to u$ dans $L^\infty(]0, T[\times\Omega)$, d'après la proposition I.5 de [6], $u(t)\in D(A)$ et $v(t)\in Au(t)$ p. p. $t\in]0, T[$.

Pour démontrer $w(t)+\beta v(t)\ni f(t)$ p. p. $t\in]0, T[$, on considère $j: \Omega\times\boldsymbol{R}\to]-\infty, \infty]$ convexe s. c. i. en r dans $\boldsymbol{R}$ telle que p. p. $x\in\Omega$, $\partial j(x, r)=\beta^{-1}(x, r)$. Il suffit de démontrer que pour tout $z\in L^2(]0, T[\times\Omega)$,

$$\int_0^T\int_\Omega j(z)-\int_0^T\int_\Omega j(f-w)\geqslant\int_0^T\int_\Omega v(z-f+w). \tag{5}$$

D'après (4), pour tout $z\in L^2(]0, T[\times\Omega)$,

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega j\left(f\left(\left[\frac{t}{\varepsilon_n}\right]\varepsilon_n\right)-w_{\varepsilon_n}\right)\\ &\leqslant\int_0^T\int_\Omega j(z)-\int_0^T\int_\Omega v_{\varepsilon_n}\left(z-f\left(\left[\frac{t}{\varepsilon_n}\right]\varepsilon_n\right)+w_{\varepsilon_n}\right)\\ &=\int_0^T\int_\Omega j(z)-\int_0^T\int_\Omega v_{\varepsilon_n}\left(z-f\left(\left[\frac{t}{\varepsilon_n}\right]\varepsilon_n\right)\right)-\int_0^T\int_\Omega v_{\varepsilon_n}\frac{u_{\varepsilon_n}(t)-u_{\varepsilon_n}(t-\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}.\end{aligned} \tag{6}$$

Comme A est cycliquement monotone dans $L^2(\Omega)$, d'après le théorème 2.5 de [2] et la remarque II. 6 de [6], $\overline{A}^{L^2(\Omega)}=\partial\varphi$, où $\overline{A}^{L^2(\Omega)}$ est la fermeture de A dans $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$. Puisque $v_{\varepsilon_n}\in\partial\varphi(u_{\varepsilon_n})$,

$$\int_\Omega v_{\varepsilon_n}\ (u_{\varepsilon_n}(t-\varepsilon_n)-u_{\varepsilon_n}(t))\ \leq\ \varphi(u_{\varepsilon_n}(t-\varepsilon_n))-\varphi(u_{\varepsilon_n}(t)).$$

D'après le lemme 3.3 de [2], la fonction $t\to\varphi(u(t))$ est absolument continue et p. p. $t\in[0, T]$, $\frac{d}{dt}\varphi(u(t))=\int_\Omega v\frac{du}{dt}$. On a donc

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega v_{\varepsilon_n}\frac{u_{\varepsilon_n}(t)-u_{\varepsilon_n}(t-\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}\\ &\leq\varphi(u_{\varepsilon_n}(T))-\varphi(u(T))+\int_0^T\int_\Omega v\frac{du}{dt}.\end{aligned}$$

Donc d'après (6),

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega j\left(f\left(\left[\frac{t}{\varepsilon_n}\right]\varepsilon_n\right)-w_{\varepsilon_n}\right)\\ &\leqslant\varphi(u(T))-\varphi(u_{\varepsilon_n}(T))+\int_0^T\int_\Omega j(z)-\int_0^T\int_\Omega v_{\varepsilon_n}\left(z-f\left(\left[\frac{t}{\varepsilon_n}\right]\varepsilon_n\right)\right)+\int_0^T\int_\Omega v\frac{du}{dt}.\end{aligned}$$

Notons que φ est s. c. i. dans $L^2(\Omega)$ et $u_{\varepsilon_n}(T)\to u(T)$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque $\varepsilon_n\to 0^+$ et donc $\varphi(u(T))\leqslant\varliminf_{\varepsilon_n\to 0^+}\varphi(u_{\varepsilon_n}(T))$. Comme f est continue et $\left[\frac{t}{\varepsilon_n}\right]\varepsilon_n\to t$ lorsque $\varepsilon_n\to 0^+$, $f\left(\left[\frac{t}{\varepsilon_n}\right]\varepsilon_n\right)\to f(t)$ lorsque $\varepsilon_n\to 0^+$.

Dans (7) lorsque $\varepsilon_n\to 0^+$,

$$\int_0^T\int_\Omega j\Big(f-\frac{du}{dt}\Big) \leqslant \varliminf_{\varepsilon_n\to 0+}\int_0^T\int_\Omega j\Big(f\Big(\Big[\frac{t}{\varepsilon_n}\Big]\varepsilon_n\Big)-w_{\varepsilon_n}\Big)$$
$$\leqslant \int_0^T\int_\Omega j(z)-\int_0^T\int_\Omega v\Big(z-f+\frac{du}{dt}\Big)$$

qui est (5).

3. On va exposer un exemple dans cette section. Soit Ω un ouvert borné de R^N à bord Γ règulier. Soient j une fonction de $\boldsymbol{R}$ dans $[0,\infty]$ convexe s.c.i. avec $j(0)=0$ et $\gamma=\partial j$. On définit φ une fonction de $L^2(\Omega)$ par

$$\varphi(u)=\begin{cases}\displaystyle\int_\Omega\frac{1}{2}|\mathrm{grad}\ u|^2+\int_\Gamma j(u) & \text{si } u\in H^1(\Omega)\\ \infty & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors φ est une fonction de $L^2(\Omega)$ dans $[0,\infty]$ convexe s.c.i. avec $\varphi(0)=0$ et le sous différentiel de φ :

$$\partial\varphi=\{[u,v]\in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\ ;\ u\in H^2(\Omega), v=-\Delta u \text{ p.p. sur } \Omega,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}+\gamma(u)\ni 0 \text{ p.p. sur } \Gamma\},$$

où $\dfrac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée normale extérieur [3]. D'après le lemme III.2 de [6], $A=\partial\varphi\cap L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega)$ vérifie (H_1) et 2) de la remarque 1.

D'après le théorème 1, on a donc:

THÉORÈME 2. *Supposons qu'une application β de $\Omega\times\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ vérifie (H_2) avec $0\in\beta(\cdot,0)$ p.p. sur Ω et γ soit un graphe maximal monotone avec $0\in\gamma(0)$. Alors pour tout $u_0\in D(\beta,\gamma)$, il existe $u\in W^{1,\infty}(]0,T[\times\Omega)\cap L^\infty(]0,T[;H^2(\Omega))$ tel que*

$$\begin{cases}\Delta u\in L^\infty(]0,T[\times\Omega)\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\in\beta(\cdot,u)+f \ \ p.p.\ \ sur\ ]0,T[\times\Omega\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+\gamma(u)\ni 0\ \ p.p.\ \ sur\ ]0,T[\times\Gamma\\ u(0)=u_0\ \ sur\ \ \Omega,\end{cases}$$

où $T>0$, $f:[0,T]\to L^\infty(\Omega)$ est continue et de variation bornée et $D(\beta,\gamma)=\{u\in L^\infty(\Omega)\cap H^2(\Omega)\ ;\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+\gamma(u)\ni 0$ p.p. sur Γ et il existe $w\in L^\infty(\Omega)$ tel que $w\in\beta(\cdot,\Delta u)$ p.p. sur $\Omega\}$.

Bibliographie

[1] Ph. Bénilan et K. S. Ha, *Equation d'évolution du type* $du/dt+\beta\partial\varphi(u)\ni 0$ *dans* $L^\infty(\Omega)$, C. R. Acad. Sci. Paris **281**, Série A (1975) 947-950.
[2] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espace de Hilbert*, Math. Studies **5**, North Holland, 1973.
[3] H. Brézis, *Problèmes unilatéraux*, Jour Math. Pures Appl. **51** (1972) 1-168.
[4] M. G. Crandall, *Generalized domain for semi-group generator*, Proc. Amer. Math. Soc. **37** (1973) 434-440.
[5] M. G. Crandall and A. Pazy, *Nonlinear evolution equations in Banach spaces*, Israel Jour. Math. **11** (1972) 57-94.
[6] K. S. Ha, *Sur des semi-groupes nonlinéaires dans les espaces* $L^\infty(\Omega)$, Thèse de Doctorat de $3^{ème}$ cycle, Université de Paris 6, 1976.

Université Nationale de Busan