〔韓國林學會誌 No. 34, P. 56～62(1977)(論文)〕

Untersuchung über die Fluktuation im Dickenwachstum des Baumes*[1]

O-Bok Kwon,*[2] Tasiti SUZUKI*[3]

林木 直徑生長의 變動에 關한 硏究*[1]

權 五 福*[2]・鈴木太七*[3]

單木의 直徑生長은 微分方程式

$$dx/dt=k(M-x)+f(t)$$

로 表示된다. 여기에서 $f(t)$는 環境의 偶然變化에 따르는 生長의 變動을 意味한다. 이式에 의하면 單木의 直徑生長은 生長傾向을 나타내는 主要部分 $k(M-x)$와 變動을 나타내는 部分 $f(t)$의 두部分으로 區分된다.

本 硏究에서는 $f(t)$를 決定하는 數學的方法을 取扱한다.

Zusammenfassung

Der Zuwachs des Durchmessers des Einzelbaumes kann durch die Differenzialgleichung $dx/dt=k(M-x)+f(t)$ beschrieben werden, wobei $f(t)$ die von den zufälligen Änderungen der Umwelt bedingte Fluktuation des Wachstums bedeutet. Nach dieser Gleichung kann das Wachstum des Durchmessers des Einzelbaumes in zwei Teile zerlegt werden: der erste systematische Teil $k(M-x)$ repräsentiert den Trend des Wachstums und der zweite Teil die Fluktuation $f(t)$, die für die Wald bewirtschaftung von Praktischer Bedeutung ist. Die Studie zeigt die mathematische Ableitung zur Bestimmung von $f(t)$.

1. Vorwort

Es ist bekannt, dass das Differenzdiagramm des Mitteldurchmessers des Bestandes fast gerade verläuft. Aus dieser Tatsache kann man schliessen, dass das Dickenwachstum des Bestandesmittelstammes der MITSCHERLICH-Gleichung folgen wird. Wenn man dies auf den Einzelbaum überträgt, wird das Differenzdiagramm ebenfalls eine Gerade, die Fluktuation(oberhalb und unterhalb) der Geraden ist gering. Diese Untersuchung behandelt theoretisch die Analyse der Fluktuation des Einzelbaumes.

2. Wachstum des Mitteldurchmessers des Bestandes

Zuerst soll das Differenzdiagramm besprochen werden. x_1, x_2, x_3,…seien die Bestandesmitteldurchmesser im Alter 1, 2, 3,…Im kartesischen Koordinatensystem mit x_n als Abszisse, x_{n+1} als Ordinate werden Differenzpunkte (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4),…geplottet. Die Art der graphischen Darstellung wurde von MASUYAMA, M. entwickelt und Differenzdiagramm benannt.

Wird ein Differenzdiagramm der Bestandesmitteldurchmesaer aufgetragen, dann liegen die Differenzpunkte fast immer auf einer Geraden. Es besteht zwischen dem Durchmesser x_n im Alter n und dem Durchmesser x_{n+1} im Alter $(n+1)$ eine lineare Beziehung:

$$x_{n+1}=ax_n+b \tag{1}$$

Diese Beziehung kann als Differenzgleichung in bezug auf x_n betrachtet werden. Um diese Gleichung zu lösen, kann die Methode der erzeugenden Funktion angewendet werden. Die erzeugenden Funktionen von x_1, x_2, x_3,…sind (eine) Folge der formalen Variablen s, deren S^n-Glied den Koeffizienten x_n hat, d.h. die erzeugenden Funktionen $X(s)$ der Zahlenfolge $\{x_n\}$ werden definiert in:

$$X(s)=x_1s+x_2s^2+\cdots+x_ns^n \tag{2}$$

Daher ist die Anwendung von $X(s)$ gleichwertig $\{x_n\}$. Aus der Differenz von Gleichung (2) und deren as-Fach und Gleichung

*[1] Received for publication on June 5, 1977
*[2] Fakultät der Agrikultur, Gangweon Universität, Korea
*[3] Fakultät der Agrikultur, Nagoya Universität, Japan

(1) ist:

$$X(s)-asx(s)=x_1s+(x_2-ax_1)s^2+(x_3-ax_2)s^3+\cdots$$
$$=x_1s+bs^2+bs^3+\cdots$$
$$=x_1s+\frac{ba^2}{1-s}$$

und daraus:

$$X(s)=\frac{x_1s}{1-as}+\frac{bs^2}{(1-s)(1-as)}=s\frac{x_1-(x_1-b)s}{(1-s)(1-as)}$$

Wenn man (es) in Teilquotienten trennt:

$$X(s)=s\left(\frac{M}{1-s}+\frac{N}{1-as}\right) \tag{3}$$

wobei:

$$M=\frac{b}{1-a},\quad N=x_1-M=x_1-\frac{b}{1-a} \tag{4}$$

Wird Gleichung (3) nach der Potenz ($-$reihe) von s weiter entwickelt, dann ist

$$X(s)=M(s+s^2+s^3+\cdots)+N(s+as^2+a^2s^3+\cdots)$$
$$=(M+N)s+(M+Na)s^2+\cdots$$
$$+(M+Na^{n-1})s^n+\cdots$$

Daraus resultiert der Koeffizient des s^n-Gliedes:

$$x_n=M+Na^{n-1} \tag{5}$$

Die Tendenz, dass beim tatsächlichen Bestand die Steigung a im jüngeren Alter grösser (als 1), über den Bestandesschluss im älteren Bereich kleiner als 1 wird, ist beim Differenzdiagramm allgemein. Wenn $a>1$, ist nach Gleichung(4) $M<0$.

Da gewöhnlich x_1 ein kleiner Wert, ist ebenfalls nach Gleichung (4) $N>0$

wenn $a=e^K, \frac{N}{Ma}=-L,\ K,L>0$, kann Gleichung (5) umgeschrieben werden in:

$$x_n=|M|(Le^{Kn}-1) \tag{6}$$

In diesem Fall folgt das Wachstum der Zinseszinsformel.

Abgesehen von der Anfengsperiode ist a gewöhnlich kleiner als 1 und $M>0,\ N<0$.

Ist:

$$a=e^{-k},\quad \frac{N}{Ma}=-L,\ k,L>0,$$

dann kann:

$$x_n=M(1-Le^{-kn}) \tag{7}$$

geschrieben werden.

In folgendem wollen nur die Fälle betrachtet werden, in denen a kleiner als 1 ist.

Wird anstatt des diskreten Bestandesalters n der Gleichung (7) das kontinuierliche Bestandesalter t gesetzt, dann ist die wachstumskurve des Mitteldurchmessers $\bar{x}(t)$ des Bestandes im Alter t:

$$\bar{x}(t)=M(1-Le^{-kt}) \tag{7'}$$

Das ist die sogenannte MITSCHERLICH-Kurve.

Wird Gleichung (7′) nach Zeit t differenziert, dann ist:

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt}=kLMe^{-kt}=k(M-\bar{x}(t)) \tag{8}$$

Dies zeigt, dass das Wachstumsgesetz des Bestandesmitteldurchessers der Geschwindigkeitskurve der Reaktin der BRAUNschen Molekular-Bewegung ähnlich ist.

Wird in Gleichung (7′) $t+1$ für das Differenzalter 1 gesetzt, dann ist:

$$\bar{x}(t+1)=M(1-Le^{-k(t+1)})$$
$$=e^{-k}\bar{x}(t)+M(1-e^{-k}) \tag{9}$$

Zwischen $\bar{x}(t)$ und $\bar{x}(t+1)$ besteht eine lineare Beziehung.

MASUYAMA, M. hat bewiesen, dass das Differenzdiagramm der Erscheinungen, die der Geschwindigkeitsgleichung der Molekularbewegung folgen, linear ist. Wir haben bewiesen, dass die Erscheinungen, deren Differenzdiagramm linear ist, der Zinseszinsformel oder der Reaktionsgleichung der Molekular-Bewegung folgen.

3. Dickenwachstum des Einzelbaumes

Auch für das Dickenwachstum des Einzelbaumes ist das oben erwähnte Differenzdiagramm fast eine Gerade. In diesem Fall sind die Differenzpunkte mit einer gewissen Abweichung um die Differenzgerade verteilt.

Wie beim Dickenwachstum des Bestandes ist von der Annahme auszugehen, dass das Wachstum des Einzelbaumes sich aus dem Teil, der dem Molekular-Bewegungs-Gesetz folgt, und dem Teil, der die jeweilige zufällige Schwankung $f(t)$ darstellt, zusammensetzt.

$$\frac{dx}{dt}=k(M-x)+f(t) \tag{10}$$

Gleichung (10) ist eine Art LANGEVIN-Gleichung.

Die Lösung der Gleichung ergibt:

$$x(t)=M(1-Le^{-kt})+e^{-kt}\int_0^t e^{k\tau}f(\tau)d\tau \tag{11}$$

Das zweite Glied der rechten Seite

$$g(t)=e^{-kt}\int_0^t e^{k\tau}f(\tau)d\tau \tag{12}$$

bedeutet die Einwirkung des Zufalls.

Wenn der Mittelwert $\bar{f}(t)$ der zufälligen Schwankungen gleich O, dann ist:

$$\bar{g}(t)=e^{-kt}\overline{\int_0^t e^{k\tau}f(\tau)d\tau}=e^{-kt}\int_0^t e^{k\tau}\overline{f(\tau)}d\tau=0$$

und Gleichung (11) geht über in:

$$\bar{x}(t)=M(1-Le^{-kt}) \tag{7'}$$

(MITSCHELICH-Gleichung)

für den Mitteldurchmesser desBestandes $\bar{x}(t)$

Im folgenden soll die Methode besprochen werden, aus dem Differenzdiagramm die zufällige Schwankung $f(t)$ zu berechnen.

Gleichungen (11) und (12) zusammengefasst:

$$x(t)=M(1-Le^{-kt})+g(t) \tag{13}$$

und

$t+1$ für t gesetzt, ergeben

$$\begin{aligned}x(t+1)&=M(1-Le^{-k(t+1)})+g(t+1)\\&=M-MLe^{-kt}e^{-k}+g(t+1)\\&=M+(x(t)-M-g(t))e^{-k}+g(t+1)\end{aligned}$$

d.h.

$$x(t+1)=e^{-k}x(t)+M(1-e^{-k})+g(t+1)-g(t)e^{-k} \tag{14}$$

Ein Vergleich der Gleichung (14) mit Gleichung (9) der Differenzgeraden ohne zufällige Schwankung, ergibt die dritten und vierten Glieder der Gleichung (14)

$$h(t)=g(t+1)-g(t)e^{-k}, \tag{15}$$

die Abweichung der Differenzpunkte von der Differenzgeraden. Aus $h(t)$ kann $f(t)$ bestimmt werden.

Wird die Definitionsgleichung (12) für $g(t)$ in Gleichung (15)

$$\begin{aligned}h(t)&=e^{-k(t+1)}\int_0^{t+1}e^{k\tau}f(\tau)d\tau-e^{-kt}\int_0^t e^{k\tau}f(\tau)d\tau\cdot e^{-k}\\&=e^{-k(t+1)}\int_0^{t+1}e^{k\tau}f(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{16}$$

gesetzt und werden beide Seiten nach t differenziert,

$$\begin{aligned}h'(t)=&-ke^{-k(t+1)}\int_t^{t+1}e^{k\tau}f(\tau)d\tau\\&+e^{-k(t+1)}\{e^{k(t+1)}f(t+1)-e^{kt}f(t)\},\end{aligned}$$

dann resultiert:

$$f(t+1)-e^{-k}f(t)=h'(t)+Kh(t) \tag{17}$$

Die rechte Seite kann hierbei aus $h(t)$ bestimmt werden, was am Differenzdiagramm abgelesen werden kann.

Ist:

$$j(t)=h'(t)+Kh(t) \tag{18}$$

dann kann Gleichung (17) umgeschrieben werden in:

$$f(t+1)-e^{-k}f(t)=j(t) \tag{19}$$

Da der Zeitpunkt der Messung ganzzahlig ist, kann Gleichung(19) geschrieben werden in:

$$f(n+1)-e^{-k}f(n)=j(n) \tag{19'}$$

Sie ist die Differengleichung zur Bestimmung der unbekannten Funktion von $f(n)$

Lösung von Gleibhung (19).

$F(s)$, $J(s)$ seien jeweils erzeugende Funktion von $f(n)$, $j(n)$.

$$F(s)=f(1)s+f(2)s^2+f(3)s^3+ \tag{20}$$

Werden beide Seiten mit se^{-k} multipliziert und von Gleichung (20) abgezogen, dann ist:

$$\begin{aligned}(1-se^{-k})F(s)=&f(1)s+\{f(2)-e^{-k}f(1)\}s^2\\&+\{f(3)-e^{-k}f(2)\}s^3+\cdots\end{aligned}$$

Wird Gleichung (19′) für jeden Koeffizienten der Glieder der rechten Seite gesetzt, dann ist:

$$(1-Se^{-k})F(s)=f(1)s+j(1)s^2+j(2)s^3+\cdots=sJ(s)$$

wobei $f(0)=0$. Wird Gleichung (19) eingesetzt, dann entspricht $f(1)=j(0)$.

Darau:

$$F(s)=\frac{sJ(s)}{1-se^{-k}}=sJ(s)(1+se^{-k}+s^2e^{-2k}+\cdots)$$

Ein Vergleich der Koeffizienten von s^n-Gliedern der beiden Seiten ergibt:

$$f(n)=j(0)e^{-(n-1)k}+j(1)e^{-(n-2)k}+\cdots+j(n-1) \tag{21}$$

4. Anpassung der Differenzgeraden

Wird für die Anpassung der Differenzgeraden die Methode der kleinsten Quadrate benutzt, dann muss berücksichtigt werden, dass die Koor dinaten der benachbarten Differenzpunkte die glichen Messwerte sind. Deshalb ist es keine einfache Anpassung der Geraden. Ausserdem kann eine gleiche Streuung um die Ordinate und um die Abszisse angenommen werden.

Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate nach DEMING. Zur einfacheren Beschreibung wird x_j für $x(j)$ gewählt. Die angepassten Werte für die Differenzpunkte:

$$(x_1, x_2),\ (x_2, x_3)\cdots(x_{n-1}, x_n)$$

seien:

$$(X_1, X_2),\ (X_2, X_3),\cdots(X_{n-1}, X_n).$$

$$V_1=x_1-X_1,\ V_2=x_2-X_2,\cdots V_n=x_n-X_n$$

sind die rechtwinkeligen Komponenten der Abweichung der Differenzpunkte von der Differenzgeraden.

Die Parameter für die Summe der Abweichungsquadrate:

$$\sum_{j=1}^{n-1}\{(x_j-X_j)^2+(x_{j+1}-X_{j+1})^2\}$$

$$=V_1^2+2V_2^2+\cdots+2V_n^{2-1}+V_n^2 \qquad (22)$$

müssen ein Minimum sein. Die angepassten Differenzpunkte (X_1, X_2), (X_2, X_3), $\cdots(X_{n-1}, X_n)$ müssen auf der Differenzgeraden liegen.

Wenn:

$X_{j+1}=aX_j+b$ Differenzgerade, müssen $(n-1)$ Bedingungen:

$$X_2-aX_1-b=0,\ X_3-aX_2-b=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\ X_n-aX_{n-1}-b=0 \qquad (23)$$

erfüllt sein.

Mit der LAGRANGE schen Methode der indeterminanten Koeffizienten lässt sich das Glied:

$$2s=V_1^2+2V_2^2+\cdots+2V_{n-1}^2+V_n^2$$
$$+2\lambda_1(X_2-aX_1-b)+\cdots+2\lambda_{n-1}(X_n-aX_{n-1}-b)$$

zum Minimum machen.

Nach der Methode von DEMING ist

$$a=a_0-A,\ b=b_0-B \qquad (24)$$

wovei a_0, b_0 die Nährungswerte für die Parameter der Geraden a, b sind. Die Restidifferenz A, B ist minimal.

Die Vernachlässigung des Produktes führt zu der Näherungsformel:

$$X_2-aX_1-b=(x_2-V_2)-(a_0-A)(x_1-V_1)-(b_0-B)$$
$$\fallingdotseq x_2-a_0x_1-b_0+a_0V_1-V_2+Ax_1+B$$

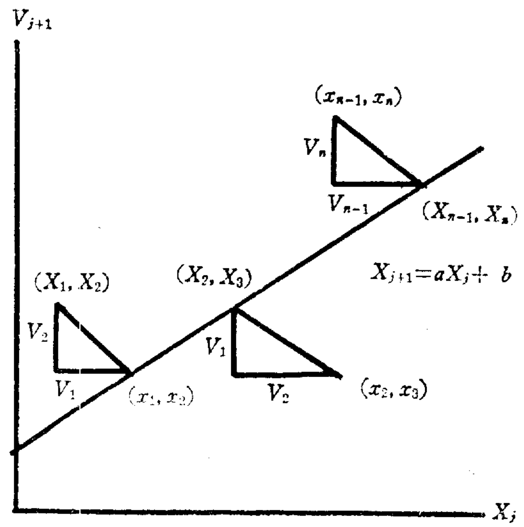

Abb. 1. Beziehung zwischen $, X_j$ und X_j

Die Methode der kleinsten Quadrate von DEMING bewirkt die Näherung der Parameter mit den zusätzlichen Bedingungen durch dielineare Gleichung. Danach wird die Summe der Quadrate der Restdifferenzen:

$$S=\frac{1}{2}V_1^2+V_2^2+\cdots+V_{n-1}^2+\frac{1}{2}V_n^2$$
$$+\lambda_1(x_2-a_0x_1-b_0+a_0V_1-V_2+Ax_1+B)$$
$$+\lambda_2(x_3-a_0x_2-b_0+a_0V_2-V_3+Ax_2+B)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+\lambda_{n-1}(x_n-a^0x_{n-1}-b_0+a_0V_{n-1}-V_n+Ax_{n-1}+B)$$

Werden mit V_1, V_2 V_n differenziert und 0 gesetzt:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial s}{\partial V_1}+V_1+a_0\lambda_1 &&=0\\
&\frac{\partial s}{\partial V_2}=2V_2+a_0\lambda_2-\lambda_1 &&=0\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial s}{\partial V_{n-1}}=2V_{n-1}+a_0\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2}&&=0\\
&\frac{\partial s}{\partial V_n}=V_n-\lambda_{n-1} &&=0
\end{aligned}\right\} \quad (25a)$$

und nach A, B und 0 gesetzt:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial s}{\partial A}=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_{n-1}x_{n-1}=0\\
&\frac{\partial s}{\partial B}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}=0
\end{aligned}\right\} \quad (25b)$$

Werden die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
&a_0V_1-V_2+Ax_1+B=-(x_2-a_0x_1-b_0)\\
&a_0V_2-V_3-Ax_2+B=-(x_3-a_0x_2-b_0)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&a_0V_{n-1}-V_n+Ax_n+B=-(x_n-a_0x_{n-1}-b_0)
\end{aligned}\right\} \quad (25c)$$

berücksichtigt, resultieren die Normalgleichungen. Wird aus Gleichung(25a)

$$\left.\begin{aligned}
&V_1=-a_0\lambda_1\\
&2V_2=\lambda_1-a_0\lambda_2\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&2V_{n-1}=\lambda_{n-2}-a_0\lambda_{n-1}\\
&V_n=\lambda_{n-1}
\end{aligned}\right\} \quad (25d)$$

in Gleichung (25c) eingesetzt und geordnet:

$$\left.\begin{aligned}
&(1+2a_0^2)\lambda_1-a_0\lambda_2-2x_1A-2B\\
&\qquad=2(x_2-a_0x_1-b_0)\\
&-a_0\lambda_1+(1+a_0^2)\lambda_2-a_0\lambda_3-2x_2A-2B\\
&\qquad=2(x_3-a_0x_2-b_0)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&-a_0\lambda_{n-3}+(1+a_0^2)\lambda_{n-2}-a_0\lambda_{n-1}-2x_{n-2}A-2B\\
&\qquad=2(x_{n-1}-a_0x_{n-2}-b_0)\\
&-a_0\lambda_{n-2}+(2+a_0^2)\lambda_{n-1}-2x_{n-1}A-2B\\
&\qquad=2(x_n-a_0x_{n-1}-b_0)
\end{aligned}\right\} \quad (25e)$$

Zusammen mit den beiden Gleichungen von (25b) bilden sie ein System von$(n+1)$ linearen Gleichungen mit $(n+1)$ Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\lambda_{n-1}$, A, B. Durch Einsetzen diesser Werte in Gleichung (25d) könne

$V_1, V_2 \cdots, V_n$ berechnet werden. Auch die Parameter der Differenzgeraden a, b können aus der Gleichung

$$a = a_0 - A, \quad b = b_0 - B \tag{24}$$

bestimmt werden.

5. Berechnung von Wachstumsfluktuation f(n)

In Gleichung (14) wird die Variable t durch die ganze Zahl n

$$x_{n+1} = e^{-k}x_n + M(1-e^{-k}) + g(n+1) - g(n)e^{-k} \tag{14'}$$

ersetzt.

Die angepassten Werde X_n, X_{n+1} und Gleichung (9) ergeben:

$$X_{n+1} = e^{-k}X_n + M(1-e^{-k}) \tag{9'}$$

Aus der Differenz von (14′) und (9′):

$$X_{n+1} - X_{n+1} = V_{n+1},$$
$$X_n - X_n = V_n$$

resultiert:

$$V_{n+1} = e^{-k}V_n + g(n+1) - g(n)e^{-k},$$
$$V_{n+1} - g(n+1) = e^{-k}(V_n - g(n)) \text{ und daraus}$$
$$V_n - g(n) = e^{-(n-1)k}\ (V_1 - g(1)).$$
$$V_1 = g(1) \text{ ergibt im allgemeinen:}$$
$$V_n = g(n)$$

d.h. die Komponente der Abweichung der Differenzpunkte V_n ist nichts anderes als $g(n)$.

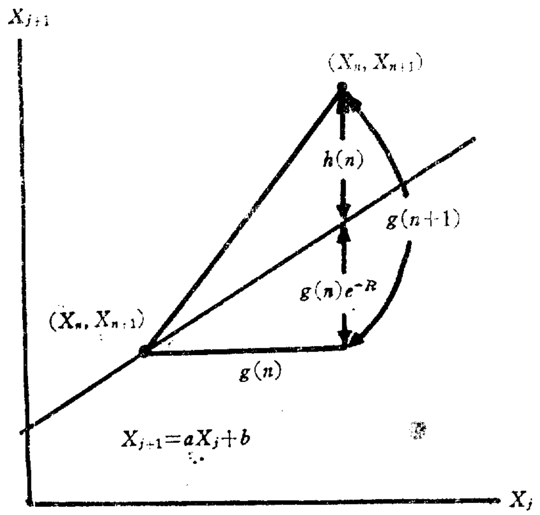

Abb. 2. Beziehung zwischen g(n) und h(n)

Wird in Gleichung (15) die ganzzahlige Variable n eingesetzt:

$$h(n) = g(n+1) - g(n)e^{-k} \tag{15'}$$

ist $h(n)$ die vertikable Entfernung des Differenzpunktes von der Differenzgeraden (Abb.1.)

$g(1)$, $g(2)$, $\cdots g(n)$ können alle auf dem Differenzdiagramm bestimmt werden, $g(0)$ wird nach der Definitionsgleichung (12) von $g(n)$ 0 gesetzt. Alle $h(n)$ können aus $g(n)$ berechnet werden. Die Ableitung sei:

$$h'(n) = h(n+1) - h(n) \tag{26}$$

$f(n)$ kann mit $h(n)$, $h'(n)$ nach Gleichung (21) berechnet werden. Bei Benutzung elektronischer Rechenmaschinen kann $f(n)$ bequem direkt aus der Gleichung (19) sukkzessiv berechnet werden.

6. Einfache Methode

Zur Anwendung der erwähnten Methode in der Praxis sind grosse elektronische Rechenmaschinen erforderlich, die das lineare Gleichungs-system hohen Grades (mit hohen Potenzen) gelöst werden kann. Dieses Problem stellt zwar die Methode der kleinsten Quadrate für den Fall dar, in dem auf der Abszisse wie auf der Ordinate die Fehlerverteilung gleichen Umfanges (gleicher Grössenordnung) ist, es wird aber durchdie Bedingung komplizierter, dass bei zwei benachbarten Differenzpunkten die Ordinate des vorhergenden Punktes gleichzeitiing die Abszisse desnachfolgenden Punktes ist. Wird aber jeder zweite Punkt gewählt, dann ist diese Bedingung nicht mehr notwending. Es genügt, zur Anpassungder Geraden die Methode der kleinsten Quadrateanzuwenden. Da die Anzahl der jahrringe im allgemeinen genügend gross ist, ist die Anpassung der Geraden auch genügend genau.

Hier soll die vertikable Entfernung der Differenzpunkte von der Differenzgeraden als Abweichung betrachtet und die Methode angewendet werden, die die Summe der Abweichungsquadrate zu einem Minimum macht.

$$y = \alpha_x - \beta = 0 \tag{27}$$

sei die Gleichung der Differenzgeraden. Da die Strecke der vertikalen Entfernung der Punkte (x_i, y_i) bis zur Differnzgeraden:

$$\frac{|y_i - \alpha x_i - \beta|}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

ist die Summe der Abweichungsquadrate:

$$s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha x_i - \beta)^2}{1+\alpha^2} \tag{28}$$

wobei n die Anzahl der gemessenen Punkte ist.

Wird s nach α und β differenziert:

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha} = \frac{-2}{(1+\alpha^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha x_i - \beta)(x_i + \alpha y_i + \beta) = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial \beta}=\frac{-1}{1+\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}2(y_i-\alpha x_i-\beta)$$

und diese 0 gesetzt:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha x_i-\beta)\ (x_i+\alpha y_i)=0 \qquad (29)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha x_i-\beta)=0 \qquad (30)$$

aus Gleichung (30) ist:

$$\sum_{i=1}^{n}y_i-\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i=n\beta$$

und

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i-\alpha\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\beta=0 \qquad (31)$$

Die Differenzgerade geht durch den Schwerpunkt ($\bar{x}$, $\bar{y}$) der Punkte (x_i, y_i).

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$$

Durch Einsetzen der Gleichung (31) in Gleichun (29):

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i\bar{x}-x_iy_i)\alpha^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i^2-x_i^2-y_i\bar{y}+x_i\bar{x})\cdot\alpha$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i-x_i\bar{y})=0$$

resultiert:

$$\left(n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\alpha^2+\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2-n\sum y_i^2\right.$$

$$\left.-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+n\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right\}\alpha+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y-n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)=0$$

Lost man sie:

$$\alpha=\frac{n\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)2-n\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\sqrt{R}}{2\left(n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}$$

wobei:

$$\sqrt{R}=\sqrt{\left\{n\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2-n\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right\}^2+4\left(n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}$$

(32)

Durch Einsetzen von α der Gleichung (32) in Gleichung (31) resultiert β. Das Resultat, das durch die Lösung der Normalgleichung 2-Grades direkt gewonnen wurde, entspricht dem von DEMING.

7. Diskussion

Die Aufzeichnung der Differenzgeraden des Einzelbaumes und die Verteilung der Differenzpunkte zeigen, dass dem Differenzpunkt, oberhalb der Differenzgeraden, einige Punkte oberhalb, dem Differenzpunkt unterhalb der Differenzgeraden, einige Punkte unterhalb der Geraden folgen.

Diese Erscheinung deutet darauf hin, dass das Wachstum des Waldbaumes die Akkumulation aller bisherigen Wachstumsmengen darstellt. Diese Studie hat bewiesen, dass solche Abweichungen durch Gleichung (12) wiedergegeben werden können, während die jeweilige Wachstumsschwakung durch Gleicgung (19) oder (21) gegeben werden kann.

Literatur

HUSHIMI, Y.: Wahrscheinlichkeit und Statistik, 1942.

TAKAHASHI, K.:: Meteorogische Statistik, 1945.

MASUYAMA, M. Grundriss der Versuchsplanung, 1948.

SUZUKI, T.: Berichte überdie Bewertung der Düngungseffekte. Ministerialforstabteilung, 1961.

NAGUMO, S.: Wachstumsvorhersage mit Hilfe der MITSCHERLICH-Kurve.

SATO, K.: Bericht des Versuchswaldes der Universität Tokyo 61, 1965.

SUZUKI, T.: Transition des Bestandes als stochastische Prozesse (11), 1967.

MORIGUCHI, S.: Methode der Datenordnung in der Statistik, 1963.