

論 文

直四角形板의 振動解析

金極天\* · 丁泰榮\*\*

Vibration of Rectangular Plates

by

Keuck Chun Kim\*, Tae Young Chung\*\*

Abstract

The major objects of this report are to supplement data of natural frequencies of thin elastic rectangular plates to the available data, and to give an experimental verification for natural frequencies obtained by Rayleigh-Ritz method, the generating set of which are eigenfunctions of Euler beams.

For the first object the following five models, for which data only for the fundamental mode or data only for square plates are available, are adopted; (1) two opposed edges are clamped and the other two opposed edges simply supported (C-C, S-S), (2) one edge is simply supported and the other three edges clamped (C-C, C-S), (3) one edge is free and the other three edges clamped (C-C, C-F), (4) two adjacent edges are clamped and the other two adjacent edges simply supported; (C-S, C-S), (5) two adjacent edges are clamped and the other two adjacent edges free (C-F, C-F). For the (C-C, S-S) model the frequency equation obtained with the mode shapes assumed as of a single trigonometric series is solved. And for the other four models Rayleigh-Ritz method taking eigenfunctions of Euler beams as the generating set is applied. The numerical examples are obtained up to the fourth, the fifth or the sixth order depending on the range of the aspect ratio (0.1—10.0). The number of terms in the generating set for Rayleigh-Ritz method is fifteen for all models.

For the experiment three models made of 3.2mm thickness mild steel plate for general structure use were prepared in following size; 300mm×600mm, 600mm×600mm and 900mm×600mm. Their boundary conditions are made to fit (C—C, C—F) condition. From the experiment mechanical impedance curves based on the frequency response method were obtained together with phase relation diagrams. The experimental data are resulted in good conformity to calculated values.

1. 序 言

均質, 等方性이고 얇은 均一두께 直四角形 彈性平均의 面에 垂直한 方向의 固有振動에 대하여 4緣이 모두 單純支持인 경우라면 理論의 嚴密解를 쉽게 얻을 수 있다[例로서 1]\*\*\*. 또 어느 한 邊이 單純支持인 경우에도 數學的 어려움이 그다지 크지 않으며 Voigt[2],

Iguchi[3] 등의 計算例가 있다.

그러나 其他 境界條件의 경우에는 固有振動數 및 振動波形을 구하는 일이 일반적으로 용이하지 않다. 그래서 같은 支持條件을 갖는 單純 板의 固有函數를 이용한 Rayleigh-Ritz 方法에 의한 近似計算들이 흔히 행해지고 있다. 예를 들면, Ritz[4]의 4緣自由인 경우에 대한 計算을 위해서 Young[5]의 4緣固定, 3緣固定 · 1

接受日字 : 1977年 3月 10日

\*正會員, 서울大學校 工科學

\*\*正會員, 서울大學校 大學院

\*\*\*[ ]內 數字는 本文末尾에 記載된 參考文獻의 番號임.

緣自由 및 2緣固定·2緣自由인 경우에 대한 計算, Barton[6]의 3緣固定·1緣自由인 경우에 대한 計算등이 그러한데, 이들의 計算結果를 Hearmon[7]이 정리한 것을 附錄의 Table 7, 8, 9에 또한 Leissa[8]가 다른 여러 가지 境界條件에 대하여 計算한 結果를 附錄의 Table 10에 소개하였다.

이 報文에서는 前記 Hearmon 및 Leissa의 資料를 보완할 目的으로 첫째, 어느 한 浬邊이 單純支持이고 다른 浬邊이 固定인 경우에 대하여 幅·長比 여러 값에 대한 高次振動數를 計算하였고, 둘째, (C-F, C-C)\*, (C-S, C-C)\*, (C-S, C-S)\*, (C-F, C-F)\*의 境遇에 대하여 같은 支持條件의 單純보의 固有函數를 이용하여 Rayleigh-Ritz方法에 의한 近似計算을 역시 幅·長比의 여러 값에 대하여 高次振動型까지의 計算을 수행하였으며, 셋째, Rayleigh-Ritz方法에 의한 計算結果의 精度를 알아보기 위하여 (C-C, C-F)의 경우에 대하여 固有振動數 및 振動波形에 대한 一連의 實驗을 行하였다.

2. 浬邊이 單純支持—單純支持 및 固定—固定인 境遇

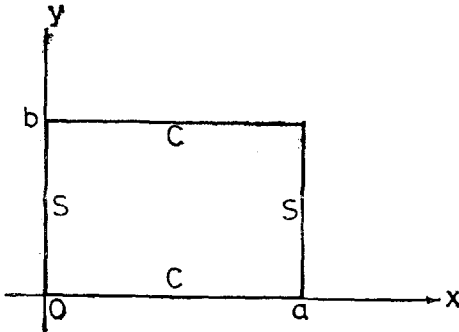


Fig. 1.

Fig.1과 같이 x軸에 垂直인 길이 b인 浬邊을 單純支持緣, y軸에 垂直인 길이 a인 浬邊을 固定緣으로 한다. 面에 垂直한 方向의 微小振動에 대한 運動方程式은

$$-D_E \nabla^4 w = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$D_E = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2, \nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

이다. 여기서 w는 變位, D<sub>E</sub>는 板의 굽힘剛性, ρh는 單位面積當 質量, E는 引張彈性係數, ν는 Poisson比이다. x軸에 垂直인 浬邊이 單純支持이므로 振動波形을

$$w(x, y, t) = Y(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \omega t \tag{2}$$

와 같이 취하고, 이를 (1)에 代入하면

$$Y'''' - \frac{2m^2\pi^2}{a^2} Y'' + \left( \frac{m^4\pi^4}{a^4} - \lambda^2 \right) Y = 0 \tag{3}$$

여기서

$$\lambda^2 = \frac{\rho h \omega^2}{D_E}$$

을 얻는다. 한편 Y가 만족하여야 할 境界條件은 다음과 같다.

$$(Y)_{y=0} = \left( \frac{dY}{dy} \right)_{y=0} = 0, (Y)_{y=b} = \left( \frac{dY}{dy} \right)_{y=b} = 0 \tag{4}$$

(3)은 λ와  $\frac{m^2\pi^2}{a^2}$ 의 大小關係에 따라 두가지 解系를 가짐이 自明하다. 즉,

(i)  $\lambda > \frac{m^2\pi^2}{a^2}$  인 경우

$$Y = A \cos qy + B \sin qy + C \cosh py + D \sinh py \tag{5}$$

여기서

$$p = \sqrt{\lambda + \frac{m^2\pi^2}{a^2}}$$

$$q = \sqrt{\lambda - \frac{m^2\pi^2}{a^2}}$$

境界條件 (4)를 이용하여 振動數方程式을 구하면 다음과 같다.

$$(p^2 - q^2) \sin qb \sinh pb + 2pq(1 - \cos qb \cosh pb) = 0 \tag{6}$$

이제

$$k_1 = qb = \sqrt{\lambda b^2 - m^2\pi^2 b^2 / a^2} \tag{7}$$

로 놓고 (6)을 고쳐 쓰면

$$m^2\pi^2 a^2 \sin k_1 \sinh \sqrt{2m^2\pi^2 a^2 + k_1^2} + k_1 \sqrt{2m^2\pi^2 a^2 + k_1^2} \cdot (1 - \cos k_1 \cosh \sqrt{2m^2\pi^2 a^2 + k_1^2}) = 0 \tag{8}$$

여기서

$$a = b/a$$

(ii)  $\lambda \leq \frac{m^2\pi^2}{a^2}$  인 경우

$$Y = A \cosh q'y + B \sinh q'y + C \cosh py + D \sinh py \tag{9}$$

여기서

$$p = \sqrt{\lambda + m^2\pi^2/a^2}$$

$$q' = \sqrt{m^2\pi^2/a^2 - \lambda}$$

다시 境界條件 (4)를 이용하여 振動數方程式을 구하면 다음과 같다.

$$(p^2 + q'^2) \sinh pb \sinh q'b + 2pq'(1 - \cosh pb \cosh q'b) = 0 \tag{10}$$

이제

$$k_1' = q'b = \sqrt{m^2\pi^2 b^2 / a^2 - \lambda b^2} \tag{11}$$

\*C-C : 浬邊이 固定—固定, C-F : 浬邊이 固定—自由, C-S : 浬邊이 固定—單純支持를 뜻함.

Table 1. Values of  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D_E}$  of (S-S, C-C) Plates (for definition of  $a$  and  $b$  refer to Fig. 1)

mode number a/b	1	2	3	4	5
1/10	9.98(0,0)*	10.30(0,1)	10.84(0,2)	11.59(0,3)	
1/5	10.34(0,0)	11.75(0,1)	14.04(0,2)	17.19(0,3)	
1/4	10.65(0,0)	12.92(0,1)	16.57(0,2)	21.53(0,3)	
1/3	11.36(0,0)	15.58(0,1)	22.20(0,2)	31.07(0,3)	
2/5	12.13(0,0)	18.36(0,1)	27.97(0,2)	40.75(0,3)	
1/2	13.69(0,0)	23.65(0,1)	38.69(0,2)	42.59(1,0)	51.67(1,1)
2/3	17.37(0,0)	35.34(0,1)	45.43(1,0)	62.05(0,2)	62.31(1,1)
1	28.95(0,0)	54.75(1,0)	69.33(0,1)	94.59(1,1)	102.22(2,0)
3/2	56.34(0,0)	78.98(1,0)	123.17(2,0)	146.27(0,1)	170.11(1,1)
2	95.26(0,0)	115.80(1,0)	156.36(2,0)	218.97(3,0)	
5/2	145.48(0,0)	164.74(1,0)	202.23(2,0)	261.11(3,0)	
3	206.94(0,0)	225.39(1,0)	260.56(2,0)	315.93(3,0)	
4	363.49(0,0)	381.05(1,0)	413.25(2,0)	463.21(3,0)	
5	564.82(0,0)	581.94(1,0)	612.50(2,0)	658.95(3,0)	
10	2242.77(0,0)	2259.27(1,0)	2287.32(2,0)	2327.74(3,0)	

\* Numbers in ( ) designate the number of predominant nodal lines parallel to y-axis and x-axis, respectively.

로 놓고 (10)을 고쳐쓰면

$$m^2 \pi^2 \alpha^2 \sinh k_1' \sinh \sqrt{2m^2 \pi^2 \alpha^2 - k_1'^2} + k_1' \sqrt{2m^2 \pi^2 \alpha^2 - k_1'^2} \cdot (1 - \cosh k_1' \cosh \sqrt{2m^2 \pi^2 \alpha^2 - k_1'^2}) \quad (12)$$

여기서

$$\alpha = b/a$$

上記 振動數方程式 (8) 및 (12)에서 (12)는 有用한 解를 갖지 않으므로, (8)의 根을 電算組織 FACOM 230-28S를 이용하여 half-interval search 方法 [9]으로 구한 결과는 Table 1과 같다.

### 3. Rayleigh-Ritz 方法에 의한 計算

振幅  $W(x,y)$ 와 圓振動數  $\omega$ 로 振動하는 均一平板에 대한 最大彈性 에너지  $V$  및 最大運動에너지  $T$ 의 算式은 다음과 같다.

$$V = \frac{D_E}{2} \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (13)$$

$$T = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \iint W^2 dx dy \quad (14)$$

여기서 적분범위는 平板全域이다.

위의 두 식으로부터  $\omega^2$ 을 구하면

$$\omega^2 = \frac{2}{\rho h} \frac{V}{\iint W^2 dx dy} \quad (15)$$

이다.

여기에서  $W(x,y)$ 를 comparison function 또는 admissible function들에 未定常數係數를 곱한 有限項數의

線形級數로써 가정하고, 係數들이 停留值를 갖도록 조정하므로서  $\omega^2$ 을 구한다.

Fig.1과 같은 直四角形板에 대하여  $W(x,y)$ 를

$$W(x,y) = \sum_{m=1}^{\beta} \sum_{n=1}^{\alpha} A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (16)$$

로 가정하고,  $X_m, Y_n$ 로서는 單純보의 固有函數를 사용한다.

여러가지 境界條件에 대한 單純보의 固有函數는 다음과 같다.

(i) 固定-固定 端

固定-自由 端

固定-單純支持 端

$$\phi_n = \cosh \frac{\beta_n x}{l} - \cos \frac{\beta_n x}{l} - \alpha_n \left( \sinh \frac{\beta_n x}{l} - \sin \frac{\beta_n x}{l} \right) \quad (17)$$

(ii) 自由-單純支持 端

$$\phi_n = \cosh \frac{\beta_n x}{l} + \cos \frac{\beta_n x}{l} - \alpha_n \left( \sinh \frac{\beta_n x}{l} + \sin \frac{\beta_n x}{l} \right) \quad (18)$$

(iii) 自由-自由 端

$$\phi_1 = 1$$

$$\phi_2 = \sqrt{3} \left( 1 - \frac{2x}{l} \right) \quad (19)$$

$$\phi_n = \cosh \frac{\beta_n x}{l} + \cos \frac{\beta_n x}{l} - \alpha_n \left( \sinh \frac{\beta_n x}{l} + \sin \frac{\beta_n x}{l} \right), \quad (n \geq 3)$$

위 各式에서의  $\beta_n$ 과  $\alpha_n$ 의 값은 [10]에 示상히 주어져 있다.

또한 上記 固有函數들은 直交函數이므로 다음과 같은 性質을 갖는다.

$$\int_0^l \phi_r \cdot \phi_s dx = \begin{cases} l, & r=s \\ 0, & r \neq s \end{cases} \quad (20)$$

또 이들의 2次導函數도 直交性이므로

$$\int_0^l \frac{d^2 \phi_r}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \phi_s}{dx^2} dx = \begin{cases} \beta_r^4/l^3, & r=s \\ 0, & r \neq s \end{cases} \quad (21)$$

이다. 한편

$$\int_0^l \phi_r \cdot \frac{d^2 \phi_s}{dx^2} dx \quad (22)$$

$$\int_0^l \frac{d \phi_r}{dx} \cdot \frac{d \phi_s}{dx} dx \quad (23)$$

은 [10]을 이용하면 쉽게 계산된다.

(20), (21), (22) 및 (23)은 (16)의  $A_{mn}$ 에 관한 線形同次方程式을 세우는데 이용된다.

境界條件에 따라 (17), (18), (19)를 (16)의  $X$  또는  $Y$ 에 代入하고 (17)을 (15)에 代入한 후 係數  $A_{mn}$ 에 關하여 編微分하여 0으로 놓으면

$$\frac{\partial}{\partial A_{ik}} \left\{ \frac{2}{\rho h} \int_0^b \int_0^a W^2 dx dy \right\} = 0, \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, p \\ k=1, 2, \dots, q \end{matrix} \quad (24)$$

(24)의 演算過程에서 (15)를 이용하면

$$\frac{\partial V}{\partial A_{ik}} - \frac{\omega^2 \rho h}{2} \frac{\partial}{\partial A_{ik}} \int_0^b \int_0^a W^2 dx dy = 0 \quad (25)$$

를 얻는다. 이제 (13), (16)으로부터

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial A_{ik}} = & \frac{DE}{2} \int_0^b \int_0^a \left[ \left( 2 \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_n \right) \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} Y_k \right) \right. \\ & + \left( 2 \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} X_m \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right) \left( X_i \frac{d^2 Y_k}{dy^2} \right) \\ & + 2\nu \left( \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} X_m \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right) \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} Y_k \right) \\ & + 2\nu \left( \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_n \right) \left( X_i \frac{d^2 Y_k}{dy^2} \right) \\ & \left. + 4(1-\nu) \left( \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} \frac{dX_m}{dx} \frac{dY_n}{dy} \right) \left( \frac{dX_i}{dx} \frac{dY_k}{dy} \right) \right] \\ & \cdot dx dy \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A_{ik}} \int_0^b \int_0^a W^2 dx dy = & 2 \int_0^b \int_0^a \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q (A_{mn} X_m Y_n) \\ & \cdot (X_i Y_k) dx dy \quad (27) \end{aligned}$$

이므로, (25)는

$$\begin{aligned} DE \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} \int_0^b \int_0^a \left[ \left( \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right) (Y_n Y_k) + (X_m X_i) \right. \\ \cdot \left( \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \frac{d^2 Y_k}{dy^2} \right) + \nu \left( X_m \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 Y_n}{dy^2} Y_k \right) + \nu \left( X_i \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) \\ \cdot \left( Y_n \frac{d^2 Y_k}{dy^2} \right) + 2(1-\nu) \left( \frac{dX_m}{dx} \frac{dX_i}{dx} \right) \left( \frac{dY_n}{dy} \frac{dY_k}{dy} \right) \left. \right] dx dy \\ - \omega^2 \rho h \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} \int_0^b \int_0^a (X_m X_i) (Y_n Y_k) dx dy = 0 \quad (28) \end{aligned}$$

과 같이 표시된다. 그런데  $X, Y$ 의 直交性으로부터

$$\int_0^a X_m X_i dx = \begin{cases} a, & \int_0^a \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx = \left\{ \begin{matrix} \beta_i^4/a^3, & m=i \\ 0, & m \neq i \end{matrix} \right. \end{cases} \quad (29)$$

$$\int_0^b Y_n Y_k dy = \begin{cases} b, & \int_0^b \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \frac{d^2 Y_k}{dy^2} dy = \left\{ \begin{matrix} \beta_k^4/b^3, & n=k \\ 0, & n \neq k \end{matrix} \right. \end{cases} \quad (30)$$

이다. 그러므로 (28)은

$m=i$  및  $n=k$  때

$$\begin{aligned} A_{ik} \left[ \frac{\beta_i^4}{a^3} \cdot b + \frac{\beta_k^4}{b^3} \cdot a + \frac{2\nu}{ab} E_{ii} F_{kk} + \frac{2(1-\nu)}{ab} H_{ii} K_{kk} \right. \\ \left. - \frac{\omega^2 \rho h}{DE} \cdot ab \right] = 0 \quad (31) \end{aligned}$$

$m \neq i$  또는  $n \neq k$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} \left[ \nu \frac{1}{ab} (E_{mi} F_{kn} + E_{im} F_{nk}) \right. \\ \left. + 2(1-\nu) \frac{1}{ab} H_{im} K_{kn} \right] = 0 \quad (32) \end{aligned}$$

여기서

$$E_{mi} = a \int_0^a X_m \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx, \quad E_{im} = a \int_0^a X_i \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx$$

$$F_{nk} = b \int_0^b Y_n \frac{d^2 Y_k}{dy^2} dy, \quad F_{kn} = b \int_0^b Y_k \frac{d^2 Y_n}{dy^2} dy$$

$$H_{im} = a \int_0^a \frac{dX_i}{dx} \frac{dX_m}{dx} dx, \quad K_{kn} = b \int_0^b \frac{dY_k}{dy} \frac{dY_n}{dy} dy$$

(31), (32)로부터 여기에서의 固有値問題는 다음과 같이 定式化된다.

$$\sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q \left[ C_{mn}^{(ik)} - \lambda \delta_{mn} \right] A_{mn} = 0, \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, p \\ k=1, 2, \dots, q \end{matrix} \quad (33)$$

여기에서

$$\lambda = \omega^2 \rho h a^3 b / DE$$

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m=i \text{ 및 } n=k \\ 0, & m \neq i \text{ 또는 } n \neq k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_{ik}^{(ik)} = & \frac{b}{a} \beta_i^4 + \frac{a^3}{b^3} \beta_k^4 + 2\nu \frac{a}{b} E_{ii} F_{kk} + 2(1-\nu) \frac{a}{b} H_{ii} K_{kk} \\ & , m=i \text{ 및 } n=k \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{mn}^{(ik)} = & \nu \frac{a}{b} (E_{mi} F_{kn} + E_{im} F_{nk}) + 2(1-\nu) \frac{a}{b} H_{im} K_{kn} \\ & , m \neq i \text{ 또는 } n \neq k \quad (35) \end{aligned}$$

윗식에서의  $\beta_i$ 의 값은  $X_m$ 을 나타내는 固有函數에서의,  $\beta_k$ 의 값은  $Y_n$ 을 나타내는 固有函數에서의  $\beta_k$ 값이다.

여기서 固有値問題 (33)의 解를 구하는 일은 Jacobi 方法[9]에 의거하였으며, 計算에는 FACOM 230-28S가 이용되었다.

計算模型은 序論에서 밝힌바와 같이 周緣支持條件이 (C-F, C-C), (C-S, C-C), (C-S, C-S), (C-F,

C-F)인 4경우를 擇하였고, (C-F, C-C) 및 (C-S, C-C)에 대하여서는  $a/b=0.1\sim 10$ 範圍에서 5 내지 6次 振動型까지를, (C-S, C-S) 및 (C-F, C-F)에 대하여서는  $a/b=1\sim 10$  範圍에서 5 내지 6次 振動型까지를 計算했다.

(16)에서의  $m$  및  $n$ 는 計算量 및 單純보의 固有函數表[10]의 範圍를 고려하여 (C-F, C-C) 및 (C-S, C-C)의 경우,  $m=5, n=6$ 까지를 취하였으며, (C-S, C-S) 및 (C-F, C-F)의 경우에는  $m=3, n=5$ 까지를 취하였다.

計算結果中 固有値는 Table 2, 3, 4 및 5와 같은데 邊의 길이  $a, b$ 의 定義는 Fig. 2와 같다.

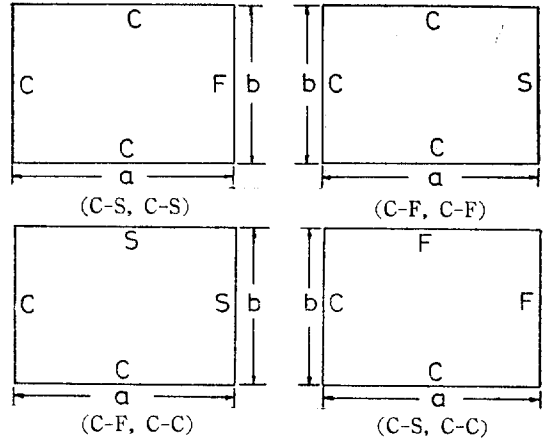


Fig. 2. Models Calculated by Rayleigh-Ritz Method

Table 2. Values of  $\omega/\sqrt{DE/\rho ha^3b}$  of (C-F, C-C) Plates (for definition of  $a$  and  $b$  refer to Fig. 2)

mode no. $\downarrow a/b$	1	2	3	4	5	6
1/10	11.44(0,0)*	12.39(0,1)	13.99(0,2)	16.21(0,3)	19.11(0,4)	22.61(0,5)
1/5	8.93(0,0)	12.02(0,1)	17.02(0,2)	23.85(0,3)	32.50(0,4)	42.92(0,5)
1/3	8.88(0,0)	16.19(0,1)	27.40(0,2)	40.94(1,0)	42.44(0,3)	48.69(1,1)
2/5	9.53(0,0)	19.33(0,1)	34.20(0,2)	38.57(1,0)	48.83(1,1)	54.09(0,3)
1/2	11.03(0,0)	24.92(0,1)	36.59(1,0)	45.80(0,2)	51.01(1,1)	72.57(1,2)
2/3	14.56(0,0)	35.88(1,0)	36.08(0,1)	58.15(1,1)	68.32(0,2)	82.99(2,0)
1	24.02(0,0)	40.04(1,0)	63.50(0,1)	76.78(2,0)	80.71(1,1)	116.94(2,1)
3/2	42.29(0,0)	54.06(1,0)	81.56(2,0)	114.68(0,1)	126.56(3,0)	128.06(1,1)
2	64.23(0,0)	73.73(1,0)	95.68(2,0)	132.32(3,0)	175.58(0,1)	184.68(4,0)
5/2	89.25(0,0)	97.34(1,0)	115.74(2,0)	146.51(3,0)	191.55(4,0)	244.78(0,1)
3	116.97(0,0)	124.12(1,0)	140.09(2,0)	166.63(3,0)	206.19(4,0)	
4	179.58(0,0)	185.53(1,0)	198.48(2,0)	219.52(3,0)	251.66(4,0)	
5	250.66(0,0)	255.86(1,0)	267.00(2,8)	284.74(3,0)	312.28(4,0)	
10	707.86(0,0)	711.41(1,0)	718.81(2,0)	730.02(3,0)	748.07(4,0)	

\* Numbers in ( ) designate the number of predominant nodal lines parallel to  $y$ -axis and  $x$ -axis, respectively.

Table 3. Values of  $\omega/\sqrt{DE/\rho ha^3b}$  of (C-S, C-C) Plates (for definition of  $a$  and  $b$  refer to Fig. 2)

mode no. $\downarrow a/b$	1	2	3	4	5	6
1/10	49.02(0,0)*	49.80(0,1)	51.14(0,2)	53.00(0,3)	55.49(0,4)	58.49(0,5)
1/5	35.27(0,0)	37.70(0,1)	41.87(0,2)	47.83(0,3)	55.76(0,4)	65.49(0,5)
1/3	28.65(0,0)	34.57(0,1)	44.69(0,2)	58.93(0,3)	77.30(0,4)	88.51(1,0)
2/5	27.09(0,0)	35.33(0,1)	49.19(0,2)	68.43(0,3)	81.60(1,0)	89.41(1,1)
1/2	25.95(0,0)	38.27(0,1)	58.37(0,2)	74.46(1,0)	85.67(0,3) (1,1)	86.01(0,3) (1,1)
2/3	26.22(0,0)	46.57(0,1)	67.48(1,0)	78.43(0,2)	86.21(1,1)	116.97(1,2)
1	31.83(0,0)	63.35(1,0)	71.09(0,1)	100.85(1,1)	116.40(2,1)	130.38(0,2)
3/2	47.51(0,0)	70.00(1,0)	110.83(2,0)	120.37(0,1)	142.52(1,1)	169.31(3,0)
2	68.29(0,0)	85.59(1,0)	118.15(2,0)	166.56(3,0)	180.32(0,1)	198.52(1,1)
5/2	92.66(0,0)	106.83(1,0)	133.63(2,0)	174.48(3,0)	229.46(4,0)	
3	119.97(0,0)	132.12(1,0)	154.88(2,0)	189.96(3,0)	237.97(4,0)	
4	182.06(0,0)	191.82(1,0)	209.57(2,0)	236.80(3,0)	274.63(4,0)	
5	252.83(0,0)	261.19(1,0)	276.07(2,0)	298.53(3,0)	329.67(4,0)	
10	709.44(0,0)	714.88(1,0)	724.29(2,0)	737.81(3,0)	755.84(4,0)	

\* Numbers in ( ) designate the number of predominant nodal lines parallel to  $y$ -axis and  $x$ -axis, respectively.

Table 4. Values of  $\omega/\sqrt{D_E/\rho ha^3b}$  of (C-S, C-S) Plates (for definition of  $a$  and  $b$  refer to Fig. 2)

mode no. ↓ $a/b$	1	2	3	4	5	6
1	27.06(0,0)*	60.58 <sup>(0,1)</sup> <sub>(1,0)</sub>	60.82 <sup>(1,0)</sup> <sub>(0,1)</sub>	92.98(1,1)	114.63 <sup>(0,2)</sup> <sub>(2,0)</sub>	114.77 <sup>(2,0)</sup> <sub>(0,2)</sub>
1.5	36.66(0,0)	62.54(1,0)	99.90(0,1)	105.74(2,0)	124.67(1,1)	165.61(3,0)
2	50.27(0,0)	71.31(1,0)	107.50(2,0)	148.08(0,1)	158.53(3,0)	168.69(1,1)
2.5	66.61(0,0)	84.47(1,0)	115.63(2,0)	160.25(3,0)	203.43(0,1)	218.07(4,0)
3	85.11(0,0)	100.78(1,0)	128.21(2,0)	167.88(3,0)	219.79(4,0)	
4	127.51(0,0)	140.37(1,0)	162.77(2,0)	195.39(3,0)	238.60(4,0)	
5	176.02(0,0)	187.18(1,0)	206.42(2,0)	234.37(3,0)	271.54(4,0)	
10	490.05(0,0)	497.55(1,0)	510.17(2,0)	528.10(3,0)	551.64(4,0)	

\* Numbers in ( ) designate the number of predominant nodal lines parallel to  $y$ -axis and  $x$ -axis, respectively.

Table 5. Values of  $\omega/\sqrt{D_E/\rho ha^3b}$  of (C-F, C-F) Plates (for definition of  $a$  and  $b$  refer to Fig. 2)

mode no. ↓ $a/b$	1	2	3	4	5	6
1	6.95(0,0)*	24.06 <sup>(0,1)</sup> <sub>(1,0)</sub>	26.75 <sup>(1,0)</sup> <sub>(0,1)</sub>	47.92(1,1)	63.10 <sup>(0,2)</sup> <sub>(2,0)</sub>	65.99 <sup>(2,0)</sup> <sub>(0,2)</sub>
1.5	9.16(0,0)	24.47(1,0)	42.99(0,1)	55.72(2,0)	63.02(1,1)	96.70(2,1)
2	12.15(0,0)	25.86(1,0)	52.29(2,0)	64.61(0,1)	81.80(1,1)	93.78(3,0)
2.5	15.76(0,0)	28.32(1,0)	51.93(2,0)	86.45 <sup>(3,0)</sup> <sub>(0,1)</sub>	90.63 <sup>(0,1)</sup> <sub>(3,0)</sub>	104.85(1,1)
3	19.89(0,0)	31.49(1,0)	53.12(2,0)	85.69(3,0)	116.07(0,1)	128.32 <sup>(1,1)</sup> <sub>(4,0)</sub>
4	29.44(0,0)	39.49(1,0)	58.54(2,0)	86.53(3,0)	124.60(4,0)	
5	40.44(0,0)	49.31(1,0)	66.58(2,0)	91.66(3,0)	125.90(4,0)	
10	111.92(0,0)	117.85(1,0)	130.10(2,0)	148.03(3,0)	176.37(4,0)	

\* Numbers in ( ) designate the number of predominant nodal lines parallel to  $y$ -axis and  $x$ -axis, respectively.

### 4. 實 驗

Rayleigh-Ritz 方法에 의하여 구한 直四角形板의 固有振動數의 精度를 檢討할 目的으로 境界條件(C-F, C-C)에 對하여  $a/b=0.5, 1.0, 1.5$ 에서의 固有振動數를 周波數應答法에 의한 mechanical impedance 曲線으로 부터 구하였다. 境界條件으로 (C-F, C-C)를 택한 것은 이것이 實驗에 있어서 境界條件을 具現하기가 比較的 容易하기 때문이다.

實驗測定裝置로서는 自動振動分析裝置 Akashi AVA-4A가 使用되었는데 測定 및 記錄要領은 다음과 같다. 먼저 掃引發振器로부터의 正弦波信號를 定振動裝置를 거쳐면서 增幅하여 起振器로 被試驗體를 起振한다. 이때 起振點 impedance의 경우에는 被試驗體에 傳達된 起振力을 impedance head의 起振力 pick-up으로 檢出하고, 同時에 被試驗體起振點의 加速度를 impedance head의 加速度 pick-up으로 檢出하며, 傳達 impedance의 경우에는 加速度 pick-up을 被試驗體의 起振點 以外의 任意의 位置에 附着하여 附着點에서의 加速度를 檢出한다. 이때의 起振力信號 F와 加速度信號 A가 차례로

$$\left. \begin{aligned} F_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \\ A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

이면, 位相計의 出力  $E_p$  즉, 位相差信號는

$$E \propto \theta_1 - \phi_1 \quad (37)$$

이다. (36)의 信號를 對數變換器로 對數變換하면  $\log F_1$  및  $\log A_1$ 이며, 한편 周波數에 比例하는 直流電壓을 對數變換器로 對數變換하면  $\log \omega_1$ 이다. 振動速度를  $V$ 로 표기하면 mechanical impedance  $Z$ 는

$$Z = F/V \quad (38)$$

로 定義되므로

$$\log Z_1 = \log F_1 - \log V_1 \quad (39)$$

그런데  $V = A/\omega$  이므로

$$\log V_1 = \log A_1 - \log \omega_1 \quad (40)$$

그러므로

$$\log Z_1 = \log F_1 - (\log A_1 - \log \omega_1) \quad (41)$$

(41)의 演算을 演算操作器에서 行하여 mechanical impedance의 對數變換  $\log Z_1$ 을 얻게 된다.

周波數比例電壓을 X-Y記錄器의 X軸으로, (41)의 impedance 比例電壓을 Y軸으로, 位相差信號 (37)을 Y<sub>2</sub>軸으로 하여 記錄하므로써 mechanical impedance의 周波數應答特性 및 起振力과 加速度의 位相差를 同時

에 얻었다.

試驗片의 材料는 浦項製鐵生産 3.2mm두께의 一般構造用鋼板 SS41이며 試片의 치수는  $a$  및  $b$ 를 Fig. 2에서와 같이 취하여  $a/b=0.5$ 의 경우 300mm×600mm,  $a/b=1.0$ 인 경우 600mm×600mm,  $a/b=1.5$ 의 경우 900mm×600mm인데 周緣固定部는 20mm여유를 두어 뒤에 說明하는 바와같이 固定하였다.

試驗片支持裝置는 300mm×90mm×10mm×15.5mm의 ㄷ型鋼을 使用하여 밑틀을 짜고, 플랜지뿌리부에 試片이 20mm 걸치도록하고 그위에 90mm×35mm의 平鋼을 얹고 平鋼과 ㄷ型鋼 플랜지를 14mmφ보울트로 100mm간격으로 固定하되, 平鋼과 ㄷ型鋼플랜지사이의 餘白部 즉, 틈새는 80mm×3.2mm 平鋼을 充填하였다. 또 起振器는 I型鋼으로 門型틀을 짜고 마닐라로우프를 使用하여 거꾸로 베달았다.

위 세개의 試驗에 대하여 20~1000Hz의 範圍에서 구한 起振點 impedance의 한보기로서 Fig. 3에  $a/b=0.5$  때의 記錄結果를 提示하였다. 또한 起振點 impedance 또는 傳達 impedance曲線으로부터 구한 固有振動數는 Table 6에서의 實驗値와 같다.

各 固有振動數에서의 節線模樣을 얻기 위하여서는 좁쌀을 使用하였는데, 보기로서  $a/b=1.5$ 때의 節線模樣 몇가지를 Fig.4에 提示하였다.

5. 考察 및 結論

實驗으로부터 얻은 固有振動數와 Rayleigh-Ritz方法으로 구한 計算値를 比較하기 위해서는 後者 즉,  $\omega/\sqrt{DE/\rho ha^3b}$ 를 Hz로 換算할 必要가 있다. 이 換算을 위하여 材料의 必要한 物性特性値 즉, 質量密度  $\rho$ 와 引張彈性係數  $E$ 는 機械工學科 材料試驗室에서 計測하였는데 그 값은 다음과 같다.

$$\rho = 7.85 \times 10^{-3} / 980 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2 / \text{cm}^4$$

$$E = 2.0 \times 10^6 \text{ kg} / \text{cm}^2$$

또한 Poisson比  $\nu$ 로서는

$$\nu = 0.3$$

을 使用하였다.

이와 같이해서 算定된 Rayleigh-Ritz方法에 의한 計算値를 Table 6에 實驗値와 對比하였다.

또한 計算値와 實驗値를  $a/b$  對  $\omega/\sqrt{DE/\rho ha^3b}$  曲線으로 圖示한 것이 Fig.5이다.

위와같이 Rayleigh-Ritz方法에 의하여 計算된 固有振動數를 實驗値와 比較한 結果는 몇 경우를 제외하면 대체로 그들의 差가 10%未滿이고, 또 實驗値 쪽이 計算値보다 낮은 을 알 수 있다.

本는 平板은 連續系인데, 이들을 有限自由度로 하여

近似計算을 하게 되는點 및 Rayleigh-Ritz方法에서 振動波形式으로 假定한 函數의 性質에 따른 收斂性등으로써 Rayleigh-Ritz方法에 의한 計算値가 實驗値보다 높은 것은 一般論的 性向이다. 다만, 實驗値와의 差의 크기에 대해서는 實驗에 使用된 材料의 두께의 不均一性, 彈性係數測定의 信賴度, 周緣固定條件具現을 위한 支持狀態의 適否등에 있어서의 不正確性을 排除할 수 없다는 어려운 點도 있었다. 특히 低次振動型에서는 周緣支持狀態 및 支持틀 自體의 영향이 크게 作用한 것으로 생각된다.

以上の 考察로부터 任意的 境界條件의 直四角形 平板의 固有振動數推定을 위해서 Rayleigh-Ritz方法이 有用함을 確認할 수 있었으며, 또 實驗的 方法으로서는 첫째, 共振點을 明確히 잡을 수 있고, 둘째, 本 實驗에서는 거기까지 확장하지는 않았으나 固有振動數外에 剛

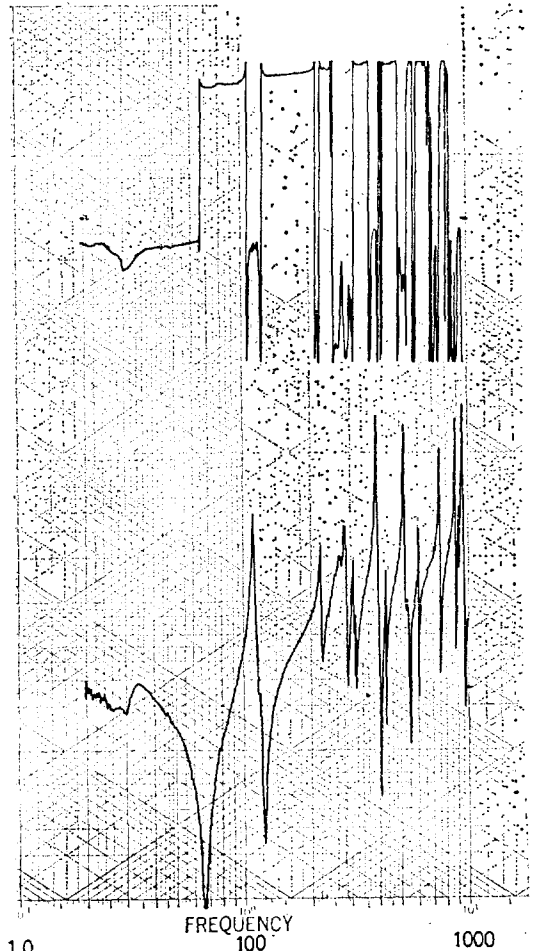
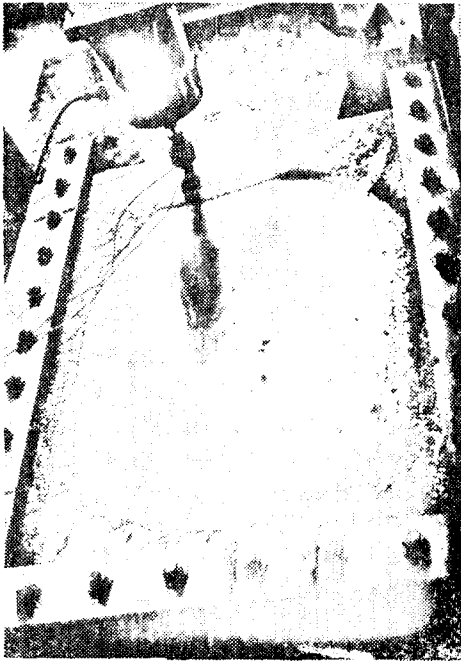
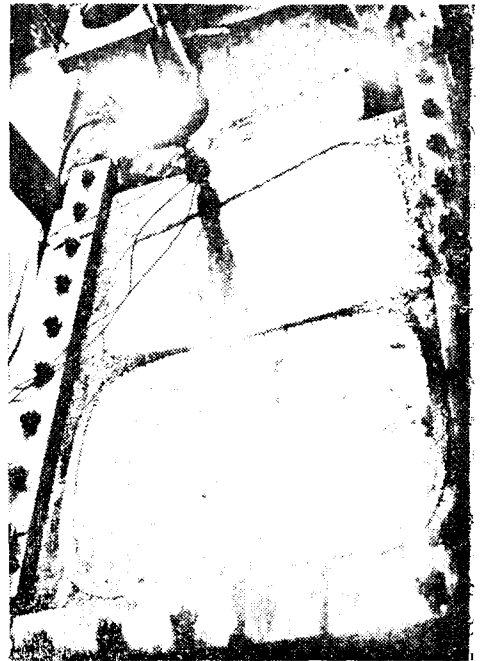


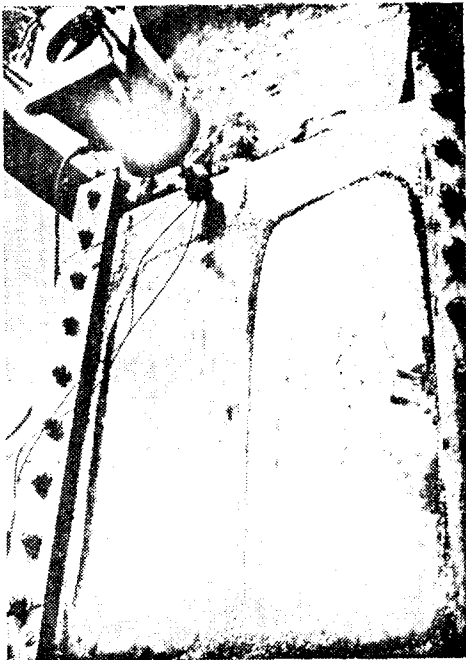
Fig. 3. An Example of Driving Point Impedance Curve and Phase Relation : (C-F, C-C),  $a/b=0.5$



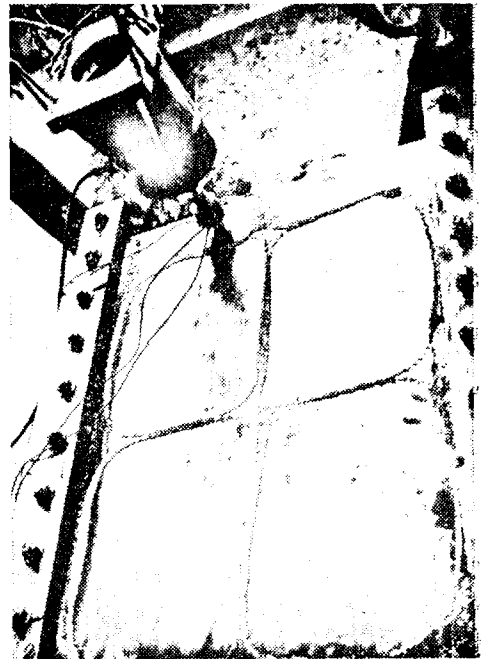
58 Hz



92 Hz



133 Hz



172 Hz

Fig. 4. Examples of Nodal Line Configuration: (C-F, C-C),  $a/b=1.5$



Table 6. Comparison of Natural Frequencies in Hz Calculated with Those Obtained from Experiments

mode number	a/b=0.5		a/b=1.0		a/b=1.5	
	calculation	experiment	calculation	experiment	calculation	experiment
1	67	57	51	47	49	46
2	151	126	86	79	63	58
3	221	222	136	125	95	92
4	277	287	164	161	134	111
5	309	317	173	170	147	133
6	439	412	250	240	149	149
7	446	434	263	258	182	172
8	556	551	288	284	220	224
9	610	601	301	295	233	240

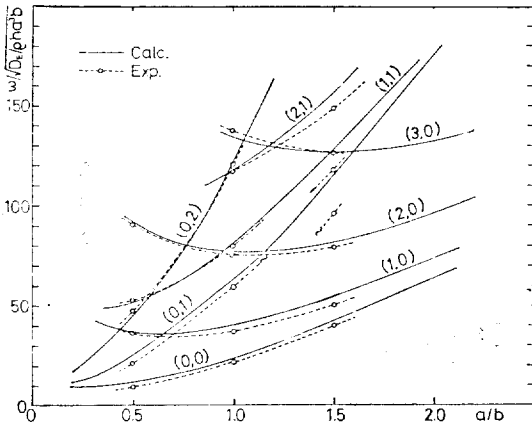


Fig. 5. Comparison of Calculated Values of  $\omega \sqrt{DE/\rho ha^3b}$  with Those Obtained from Experiments; (C-F, C-C) (for numbers in ( ) refer to Table 1)

性, 振動質量 및 減衰特性등도 손쉽게 파악할 수 있다는 점에서 mechanical impedance method가 매우 有力하다.

이 報文에 提示된 資料들은 앞에서 言及한 Hearmon 및 Leissa의 資料와 함께 平板自體는 물론 船體構造部材의 局部 振動問題처리에 매우 有用할 것으로 믿어진다.

後 記

實驗을 위하여 試片과 試驗틀을 製作하여 주신 서울大學校 機械工學科 柳志憲氏, 試片의 引張試驗을 해주신 金東鎮氏, 實驗을 도와준 서울大學校 造船工學科 大學院生 金在承君에게 謝意를 表한다.

參 考 文 獻

[1] Meirovitch, L., *Analytical Methods in Vibrations*,

Collier-Macmillan Ltd., London, 1967.

[2] Voigt, W., "Bemerkung zu dem Problem der transversalen Schwingungen rechteckiger Platten", *Göttingen Nachrichten*, 1893.

[3] Iguchi, S., "Die Eigenwertsprobleme für die elastische rechteckige Platte", *Memoirs of the Faculty of Engineering., Hokkaido Imperial University*, Vol. 4, 1938.

[4] Ritz, W., "Über eine neue Method zur Lösung gewisser variationsprobleme der Mathematische phisik", *Journal für reine und angewandte Mathematik*, Vol. 135, 1909.

[5] Young, D., "Vibration of Rectangular plates by the Ritz Method", *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, Vol. 72, December, 1950.

[6] Barton, M.V., "Vibration of Rectangular and Skew Cantilever Plates", *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, Vol. 73, June, 1951.

[7] Hearmon, R.F.S., "The Frequency of Vibration of Rectangular Isotropic Plates", *Journal of Applied Mechanics*, September, 1952.

[8] Leissa, W.A., "Vibration of Plates", *NASA SP-160*, 1969. Also, Szilard, R., *Theory and Analysis of Plates*, Appendix A, Prenticehall Inc., 1974.

[9] Kuo, S.S., *Computer Applications of Numerical Methods*, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.

[10] Young, D. and Felgar, R.P., "Table of Characteristic Functions Representing the Normal Modes of Vibration of a Beam", *Engineering Research Series, University of Texas*, No. 44, Austin, Texas, 1949.

附錄

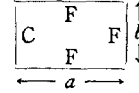
Table 7.  $k=\omega a^2 \sqrt{\rho h/D_E}$  for modes of a square plate[7]

Edge Condition	Autho- rity	Mode Number					
		1	2	3	4	5	6
F $\begin{matrix} F \\ C \end{matrix}$ F	Young	3.494	8.547	21.44	27.46	31.17	
C $\begin{matrix} F \\ C \end{matrix}$ F	Young	6.958	24.08	26.80	48.05	63.14	
F $\begin{matrix} F \\ F \end{matrix}$ F	Ritz	14.10	20.55	23.91	35.96	61.60	65.24
S $\begin{matrix} S \\ S \end{matrix}$ S	Equa- tion	19.74	49.34	78.96	98.69	128.3	167.8
S $\begin{matrix} S \\ C \end{matrix}$ S	Iguchi	23.65	51.68	58.65	86.13	100.3	113.2
C $\begin{matrix} S \\ S \end{matrix}$ C	Iguchi	28.95	54.75	69.32	94.59	102.2	129.1
C $\begin{matrix} C \\ C \end{matrix}$ C	Iguchi Young	35.98 35.99	73.40 73.41	108.2 108.3	131.6	132.3	165.0 165.1

Table 8.  $k=\omega a^2 \sqrt{\rho h/D_E}$  and  $k=\omega b^2 \sqrt{\rho h/D_E}$  for Fundamental Mode of Rectangular Plates [2,7]

$\begin{matrix} S \\ S \\ S \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} b/a \\ k \end{matrix}$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	$\infty$
$\begin{matrix} S \\ S \\ S \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} a/b \\ k' \end{matrix}$	19.74	14.26	12.34	11.45	10.97	9.87
$\begin{matrix} C \\ S \\ S \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} b/a \\ k \end{matrix}$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	$\infty$
$\begin{matrix} C \\ S \\ S \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} a/b \\ k' \end{matrix}$	23.65	18.90	17.33	16.63	16.26	15.43
$\begin{matrix} S \\ F \\ S \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} b/a \\ k \end{matrix}$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	$\infty$
$\begin{matrix} S \\ F \\ S \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} a/b \\ k' \end{matrix}$	23.65	15.57	12.92	11.75	11.14	9.87
$\begin{matrix} C \\ S \\ C \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} b/a \\ k \end{matrix}$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	$\infty$
$\begin{matrix} C \\ S \\ C \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} a/b \\ k' \end{matrix}$	28.95	25.05	23.82	23.27	22.99	22.37
$\begin{matrix} C \\ C \\ C \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} b/a \\ k \end{matrix}$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	$\infty$
$\begin{matrix} C \\ C \\ C \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} a/b \\ k' \end{matrix}$	35.98	27.00	24.57	23.77	23.19	22.37

Table 9.  $k=\omega a^2 \sqrt{\rho h/D_E}$  for Modes of Rectangular Cantilever Plates [6,7]



a/b	Mode Number				
	1	2	3	4	5
1/2	3.508	5.372	21.96	10.26	24.85
1	3.494	8.547	21.44	27.46	31.17
2	3.472	14.93	21.61	94.49	48.71
5	3.450	34.73	21.52	56.39	105.9

Table 10.  $k=\omega a^2 \sqrt{\rho h/D_E}$  for Rectangular Plates[8]

a/b	Mode Number	1	2	3	4
$\begin{matrix} S \\ F \\ S \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} b/a \\ k \end{matrix}$	0.5	9.87	11.6	39.48	41.18
$\begin{matrix} S \\ F \\ S \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} b/a \\ k \end{matrix}$	0.75	9.87	13.71	39.48	43.56
$\begin{matrix} S \\ F \\ S \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} b/a \\ k \end{matrix}$	1.0	9.87	16.13	39.48	46.73
$\begin{matrix} S \\ F \\ S \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} b/a \\ k \end{matrix}$	1.5	9.87	21.26	39.48	54.84
$\begin{matrix} S \\ F \\ S \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} b/a \\ k \end{matrix}$	2.0	9.87	27.52	39.48	64.54
$\begin{matrix} C \\ S \\ S \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} a/b \\ \text{fundamen-} \\ \text{tal mode} \end{matrix}$	0.33	0.4	0.5	0.67	1.0
$\begin{matrix} C \\ S \\ S \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} a/b \\ \text{fundamen-} \\ \text{tal mode} \end{matrix}$	16.7	17.2	18.2	20.4	27.1
$\begin{matrix} S \\ F \\ S \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} a/b \\ \text{fundamen-} \\ \text{tal mode} \end{matrix}$	1.0	1.5	2.0	2.2	
$\begin{matrix} S \\ F \\ S \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} a/b \\ \text{fundamen-} \\ \text{tal mode} \end{matrix}$	12.9	17.2	23.2	26.2	
$\begin{matrix} C \\ C \\ C \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} a/b \\ \text{fundamen-} \\ \text{tal mode} \end{matrix}$	0.5	1.0	2.0		
$\begin{matrix} C \\ C \\ C \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} a/b \\ \text{fundamen-} \\ \text{tal mode} \end{matrix}$	24.5	31.8	73.1		
$\begin{matrix} C \\ C \\ F \end{matrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} k=\pi^2 \sqrt{K/N} \text{ for fundamental mode} \\ K=0.0468+0.340\left(\frac{a}{b}\right)^2+1.814\left(\frac{a}{b}\right)^4 \\ N=0.340 \end{matrix}$					