論 文

論文 77-14-4-5

能動과 / 또는 結合性 回路網에 대한 積線圖
(Product Graph for the Active and/or Coupled Network)

金 秀 重*
(Kim, Soo Joong)

要 約

能動과／또는 結合性 素子를 포함하고 있는 回路網에 대한 一般化된 積線圖를 정의하였다. 이 積線圖는 信號流線圖가 필요없이 電壓線圖와 電流線圖로 부터 직접 구해지며 Mason의 行列式을 계산하는데 利用되는 線圖이다. 그리고 일반성을 갖는 回路網을 예제로 들어 吟味하였다.

Abstracts

A generalized product graph of the network containing active and/or coupled elements has been presented. This graph is obtained directly from the current graph and voltage graph and can be used to determine the Mason's determinant. An example is presented and discussed.

1. 서 론

J. E. Barbay 등은 非結合 RLC 受動回路網 解析에 이용되는 信號流線圖(signal flow graph)대신 사용될 수 있는 積線圖(product graph)를 새로히 제안 하였다[1]. 이 積線圖란 信號流線圖에서 Mason의 利得公式[2,3]

$$M=\sum_{k=1}^{N}\frac{M_k\Delta_k}{\Delta}$$

단 $\Delta=1-\sum_m P_{m1}+\sum_m P_{m2}-\sum_m P_{m3}+\cdots\cdots$

M_k: k번째 前向路 利得

P_{mr}: r次 利得積, 즉 r개의 서로 닿지 않는 環路의 m번째 가능한 利得의 積

Δ_k: k번째 前向路와 닿지 않는 부분만의 Δ값.

에서 分母인 行列式 Δ를 계산할 때 1차, 2차, ……의 모든 利得積을 구한다는 것이 매우 귀찮은 과정을 가지므로 이를 쉽게 구하도록 하기 위하여 만들어진 線圖로서 나무가지 임피이던스(tree branch impedance)와 고리 어드미턴스(link admittance)가 節點으로 圖示되고 나무가지를 나타내는 節點과 이 나무가지와 絕組(cutset)가 되는 고리를 나타내는 節點사이를 선으로 연결한 것이다.

그러나 이 積線圖는 非結合 受動 回路網에 대해서만 적용이 가능하며 行列式 Δ의 各 項이 非結合 受動 回路網에서는 모두 (+)부호가 되기 때문에 부호에 관해 특별히 고려할 필요가 없었다. 본 論文에서는 이를 확장하여 能動과／또는 結合性 素子를 포함하고 있는 回路網에 대해서 적용할 수 있는 一般化된 積線圖를 제안하였고 行列式 Δ의 부호 결정 방법을 찾았다.

2. 본 론

能動과／또는 結合性 素子를 포함하는 모든 回路網은 線圖로 나타낼 수 있다[4]. 그리고 이러한 回路網을 해석하기 위하여 電流線圖(current graph) G_i와 電壓線圖(voltage graph) G_v를 얻어서 位相數學的으로 解析할 수 있다[5].

能動과／또는 結合性 回路網의 信號流線圖에 대한 Mason의 行列式을 쉽게 구하기 위하여는 電流積線圖 P_i와 電壓積線圖 P_v를 각각 정의하고 이 두 線圖의 共通되는 積線圖를 얻으면 된다. 이 電流 및 電壓 積線圖는 다음과 같은 과정으로 그린다.

주어진 回路網에 대해서 모든 能動과／또는 結合性 가지들을 어드미턴스의 項으로 나타내고 方向性 電流線圖 G_i와 方向性 電壓線圖 G_v를 각각 그린다.

* 慶北大學校 工科大學 電子工學科
Dept. of Electronics
Kyungpook National University.
接受日字 1977年 10月 10日

G_v와 G_i에서 동일한 1개의 나무를 선정한다. 이때 택한 나무가지들은 自己임피이던스 만으로 된 가지들이 되게 한다. 結合性을 갖고 있는 가지들은 가지 어드미턴스의 逆數가 가지 임피이던스와 같지 않으므로 信號流線圖를 그릴때 또 다른 계산과정이 필요하기 때문에 나무가지가 되지 않도록 한다.

선정된 나무를 기초로 電流積線圖 P_i와 電壓積線圖 P_v를 각각 그린다. 積線圖는 나무가지 임피이던스들을 一列의 節點들로 圖示하고 고리 어드미턴스(能動과／또는 結合性가지 포함)들을 다른 一列의 節點들로 圖示하여 각 나무가지 임피이던스 節點에서 그 나무가지와 絶組를 이루고 있는 고리 어드미턴스 節點까지〔또는 각 고리 어드턴스 節點에서 그 고리와 連組(tieset)를 이루고 있는 나무가지 임피이던스 節點까지〕直線으로 연결한다.

이렇게 하여 얻어진 直線위에 電流積線圖P_v의 경우, 고리 어는미턴스 Y_{mn}에 흐르는 電流을 獨立電流變數로 볼때 이에 의하여 나무가지 임피이던스 Z_k에 흐르는 電流가 Z_k의 가지 電流 방향과 일치하면 (+)부호를 기입하고 그렇지 않으면 (−)부호를 기입하며 電壓積線圖 P_v의 경우에는 나무가지 임피이던스 Z_k 양 端의 電壓을 獨立電壓變數로 볼때 이에 의하여 고리 어드미턴스 Y_{mn}양 端에 나타나는 電壓이 Y_{mn}의 가지 電壓의 방향과 일치하면 (+)부호를 기입하고 그렇지 않으면 (−)부호를 기입한다.

이상의 과정을 거쳐서 얻어진 P_i와 P_v를 겹쳐서 그린 것을 能動과／또는 結合性 回路網의 一般化된 積線圖로 정의한다.

一般化된 積線圖에서 Mason의 行列式을 구하는 방법은 다음과 같다.

(1) 0차의 環路利得은 1이다.

(2) 電流積線圖 P_i와 電壓積線圖 P_v에 共通으로 존재하는 線들의 끝 點에 있는 Z_k와 Y_{mn}의 積의 合은 1차 環路利得이 된다.

(3) P_i와 P_v 各各에 대해서 선정하는 방법이 1가지뿐인 節點을 共有하지 않는 2개의 線들을 택하여 끝點들의 Z_k와 Y_{mn}의 積이 同一한 값이 되는 모든 項들을 추출한다. 이때 P_i에서 택하여진 線과 P_v에서 택하여진 線이 겹쳐진 경우에 얻어진 積은 2차環路利得의 項이 되고 겹치지 않은 線들로부터 얻어진 積은 1차 環路利得의 項이 된다.

(4) P_i와 P_v 각각에 대하여 선정할 수 있는 방법의 數가 홀수인 節點을 共有하지 않는 3개의 線들을 택하여 끝 點들의 Z_k와 Y_{mn}의 積이 同一한 값이 되는 모든 項을 추출한다. 이때 P_i에서 택하여진 3개의 線과 P_v에서 택하여진 3개의 線이 각각 겹쳐 있으면 얻어진 積이 3차 環路利得의 項이 되고 1개의 線이 겹치고 2개의 線이 겹치지 않는 경우의 積은 2차 環路利得이 되고 모두 겹치지 않는 경우의 積은 1차 環路利得이 된다. 2개가 겹치고 1개가 겹치지 않는 경우는 존재하지 않는다.

(5) P_i와 P_v 각각에 대해서 4개의 線 이상을 선정하는 경우는 과정 (4)를 확장하면 된다.

(6) 行列式에서의 各 環路利得項의 符號는 P_i와 P_v의 各 線위에 기입되어 있는 부호의 積의 부호에는 1차, 3차……의 利得項에는 (−)를 부여하고 2차, 4차……의 利得項에는 (+)를 부여한다.

3. 例題와 吟味

一般性을 갖는 回路網으로 그림 1과 같은 回路網에서 가지 2, 4 및 6번 사이에 結合性이

$$\begin{pmatrix} Y_2 & Y_{24} & Y_{26} \\ 0 & Y_4 & 0 \\ Y_{62} & 0 & Y_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 \\ j_4 \\ j_6 \end{pmatrix}$$

와 같이 있고 가지 1, 3 및 5번은 自己임피이던스만을 갖고 있는 경우를 생각해 보자. 그림 1 回路網의 電流線圖와 電壓線圖를 그리면 그림 2(a) 및 (b)가 된다. 나무를 가지 1,3 및 5로 택한다. 積線圖의 나무가지 임피이던스 節點 Z_1, Z_3 및 Z_5를 一列로 도시

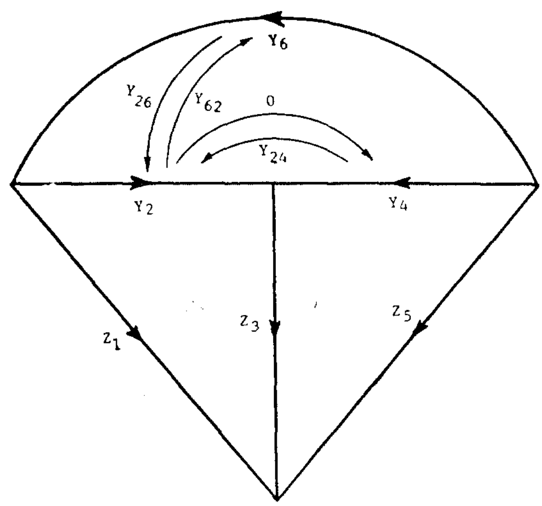
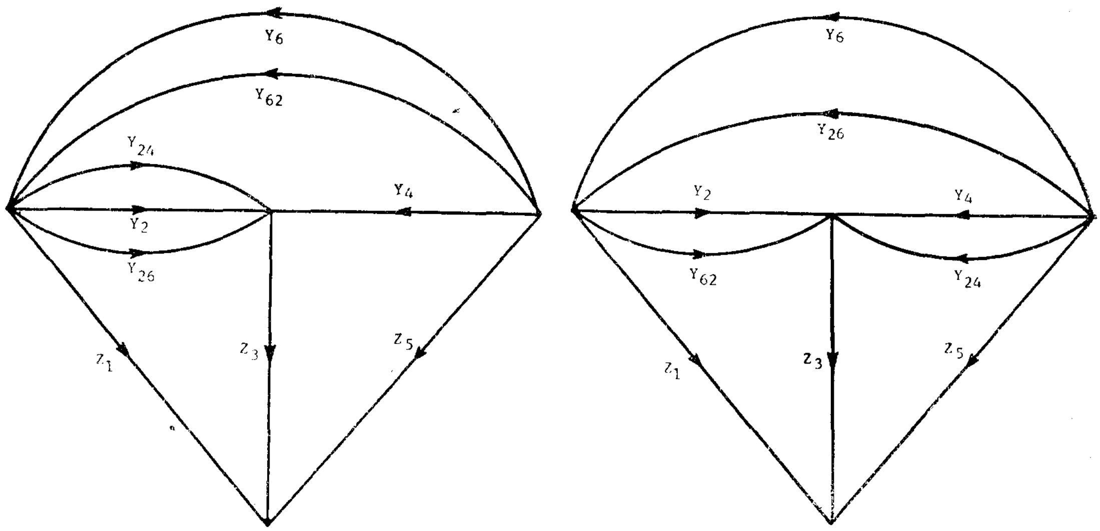


그림 1. 예제의 回路網
Fig.1. Newtwork example

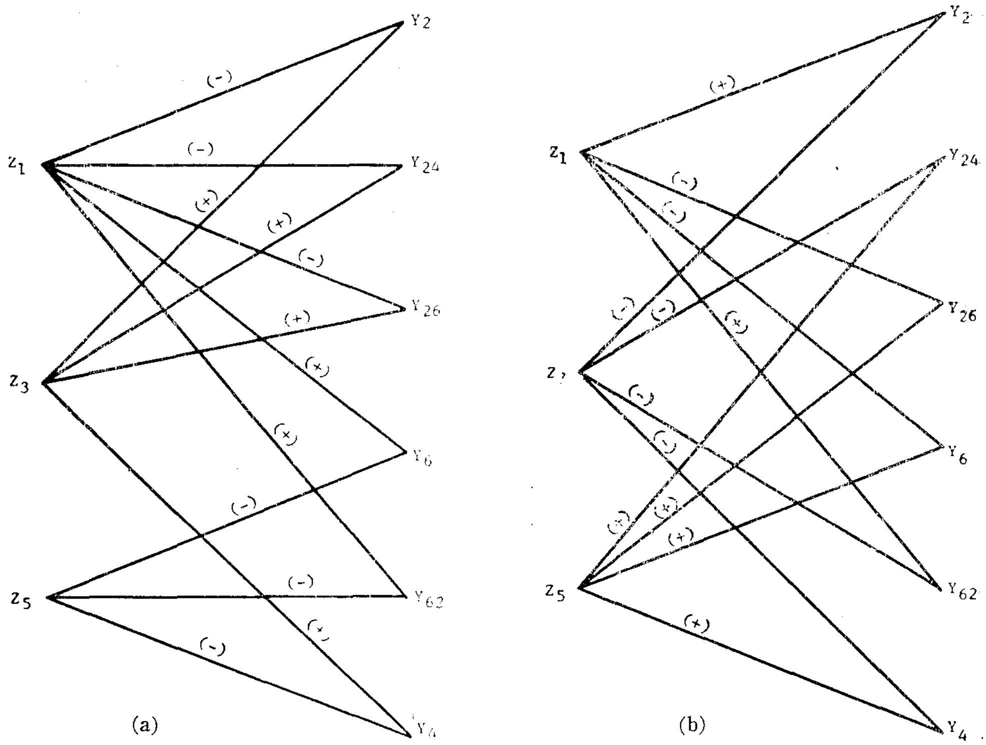
하고 고리어드미턴스 節點 Y_2, Y_4, Y_6, Y_{24}, Y_{26} 및 Y_{62}를 또 다른 一列로 도시한다. 電流線圖와 電壓線圖 각



(a) (b)

그림 2 (a) 電流線圖 G_i와 (b) 電壓線圖 G_v.

Fig.2. Current graph G_i and voltage graph G_v of the network



(a) (b)

그림 3. (a) 電流積線圖P_i와 (b) 電壓積線圖 P_v

Fig.3. Current product graph P_i and voltage product graph P_v of the network.

각에 대해서 각 나무가지 임피이던스 節點에서 그 나무가지의 絕組에 속한 고리 어드미턴스 節點(또는 고리 어드미던스 節點에서 그 고리의 連組에 속하는 나무가지 임피이던스 節點)사이를 線으로 그어서 그림 3(a) 및 (b)와 같은 電流積線圖 P_i와 電壓積線圖 P_v를 만든다. 電流積線圖인 그림 3(a)의 각 線위의 符號는 고리 어드미턴스에 흐르는 獨立電流가 그 고리와 連組를 이루고 있는 나무가지 임피이던스의 가지 電流의 방향과 일치하면 (+)로, 그렇지 않으면 (−)로 놓아서 얻은 것이고, 電壓積線圖인 그림 3(b)의 각 線의 符號는 나무가지 임피이던스 양단에 걸려 있는 獨立電壓이 고리 어드미턴스 양단의 가지 電壓과 일치하면 (+)로 그렇지 않으면 (−)로 놓아서 얻은 것이다.

그림 3(a)를 實線으로, 그림 3(b)를 點線으로 하여 두 그림을 겹처서 그린 것이 그림 4의 一般化된 積線圖이다. 그림 4로부터 앞 節에서의 과정에 따라 모든 環路利得을 구하면 표 1과 같다. 즉 P_i와 P_v에 공통으로 존재하는 線들의 끝點에 있는 임피이던스와 어드미턴스의 積들은 1차 球路利得의 項인 Z_1Y_2, Z_1Y_6, Z_3Y_{24}, …… 등과 같다. P_i와 P_v 각각에 대해서 선정하는 방법이 1가지 뿐인 節點을 공유하지 않는 2개의

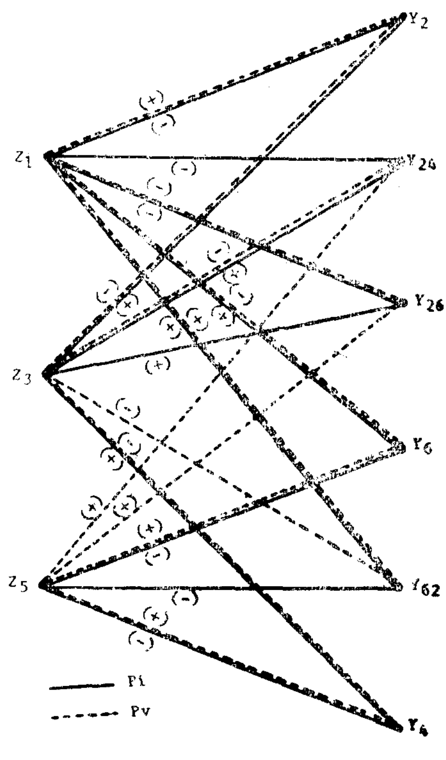


그림 4. 일반화된 積線圖
Fig.4. Generalized product graph.

Zero order	1
1st order	Z_1Y_2 Z_1Y_6 $+Z_1Y_{24}Z_5Y_{62}$ $-Z_1Y_{26}$ $-Z_1Y_{26}Z_3Y_{62}$ $-Z_1Y_{62}$ $-Z_1Y_{62}Z_5Y_{26}$ Z_3Y_2 Z_3Y_4 $-Z_3Y_4Z_5Y_{26}$ $-Z_3Y_4Z_5Y_{62}$ Z_3Y_{24} $-Z_3Y_{26}Z_5Y_{62}$ $-Z_3Y_{62}Z_5Y_{24}$ $Y_4Z_5Z_5Y_6$
2nd order	$-Z_1Y_{26}Z_3Y_4$ $-Z_1Y_{26}Z_5Y_4$ $-Z_1Y_{62}Z_3Y_4$ $-Z_1Y_{62}Z_3Y_{24}$ $-Z_1Y_{62}Z_5Y_4$ $Z_3Y_2Z_5Y_4$ $Z_3Y_4Z_5Y_6$ $Z_3Y_{24}Z_5Y_6$ $Z_1Y_2Z_3Y_4$ $Z_1Y_2Z_5X_4$ $Z_1Y_2Z_5Y_6$ $Z_1Y_6Z_3Y_4$ $Z_1Y_6Z_3Y_2$ $Z_1Y_6Z_3Y_{24}$ $Z_1Y_6Z_5Y_4$

표 1. 環路利得의 積

線들을 택하되 끝 點들의 임피이던스와 어드미턴스의 積이 同一한 값이 되는 項들은 P_v와 P_i에서 택하여진 線이 겹친 경우는 $Z_1Y_2Z_3Y_4$, $Z_1Y_6Z_3Y_{24}$, $Z_1Y_{26}Z_3Y_4$…… 등으로 2차 環路利得의 項들이 되고 P_i와 P_v에서 택하여진 線들이 겹치지 않는 경우로는 $Z_1Y_{24}Z_5Y_{62}$, $Z^1Y_{24}Z_5Y_6$, $Z_3Y_{62}Z_5Y_{24}$…… 등으로 1차 環路利得의 項들이 된다. 그러나 $Z_1Y_2Z_3Y_{24}$…… 등은 P_v에서 택하는 방법이 $Z_1Y_2 \cdot Z_3Y_{24}$ 및 $Z_1Y_{24} \cdot Z_3Y_2$와 같이 2가지 방법이 있으므로 상쇄되는 項이 되어 소거된다.

3개의 線을 택하는 경우에는 선정하는 방법의 數가 짝수인 경우 뿐으로 모두 소거된다. 즉 예로서 $Z_1Y_2 \cdot Z_3Y_4 \cdot Z_5Z_6$로 택할 때 같은 결과의 項이 되는 $Z_1Y_6 \cdot ZY_2 \cdot Z_5Y_4$로 택하는 방법이 있는 것을 볼 수 있다.

1차 環路利得의 項인 Z_1Y_2, Z_1Y_3, Z_3Y_{24}…… 등의 符號는 P_i와 P_v에서 택하는 線들의 符號의 積이 (−)이고 1차 利得이므로 다시 (−)를 부여하여 (+)符號를 갖게 되고 Z_1Y_{26}, $Z_3Y_4Z_5Y_{62}$, $Z_3Y_4Z_5Y_6$…… 등의 符號는 택하는 線들의 符號의 積이 (+)이고 다시 (−)를 부여하여 (−)符號를 갖게 된다. 2차 環路利得의 項인 $Z_1Y_3Z_3Y_4$, $Z_1Y_6Z_3Y_{24}$, $Z_3Z_{24}Z_5Y_6$…… 등은 택하는 線들의 符號의 積이 (+)이고 다시 (+)를 부여하여 (+)符號를 갖게 되며 $Z_1Y_{26}Z_3Y_4$, $Z_1Y_{62}Z_3Y_4$, $Z_1Y_{62}Z_5Y^4$…… 등의 項은 택하는 線들의 符號의 積이 (−)이고 2차 利得이므로 다시 (+)를 부여하여 결국 (−)符號를 갖게 된다.

주어진 回路網에 대해서 나무를 135로 택할때의 信號流線圖를 그리면 그림 5와 같이 된다. 이 信號流線圖와 그림 4의 一般化된 積線圖 및 표 1의 각 項을 비교하여 吟味하기로 한다. 그림 5에서 1차 및 2차의 環路利得을 구하면 표 1과 일치 한다. 積線圖에서 2개의 線을 택하는 방법이 1가지가 아닌 경우 즉 $Z_1Y_2Z_3Y_{24}$와 같은 경우에 信號流線圖에서는 $(-Z_1Y_2)$

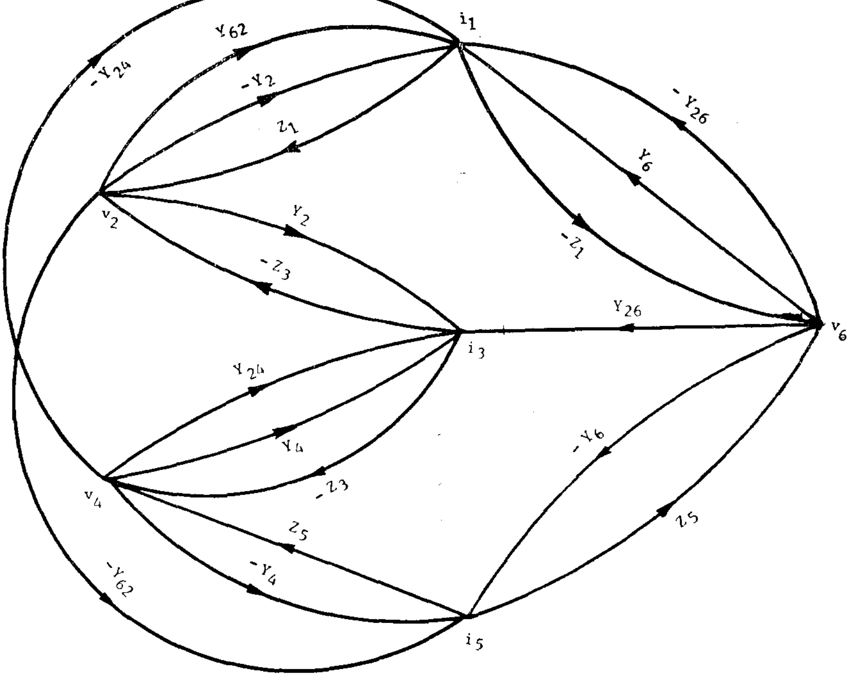


그림 5. 예제의 信條流線圖
Fig.5. Reduced signal flow graph example.

$(-Z_3Y_{24})$의 2차 環路利得의 項과 $Z_1Y_2(-Z_3)(-Y_{24})$의 1차 環路利得의 項이 서로 상쇄되어 소거되는 것을 알 수 있다. 또한 2개의 線을 택하는 방법이 1가지 뿐이며 P_i와 P_v에서 택한 線들이 겹치지 않은 경우 즉 $-Z_1Y_{24}Z_5Y_{62}$ 또는 $-Z_1Y_{24}Z_5Y_6$ 등은 信號流線圖에서 1차의 環路利得이 되는 것을 확인할 수 있다.

4. 결 론

能動과/또는 結合性 素子를 포함하고 있는 回路網에 대한 一般化된 積線圖가 정의 되었다. 이 一般化된 積線圖는 受動回路網에 대해서 Barbay 등이 제안한 積線圖에 적용할 수도 있다.

能動과/또는 結合性 素子를 포함하고 있는 가지들이 나무가지가 되어서는 않되므로 一般化된 積線圖를 그릴 수 있는 必要條件은 주어진 回路網에서 하나의 나무를 선정할 때 나무가지들이 自己 임피이던스만을 갖는 가지들로 이루어져야 하고 結合性素子를 포함한 가지들은 고리에 속해야 된다.

一般化된 積線圖는 電流積線圖와 電壓積線圖로 이루어져 있으며 이로부터 Mason의 行列式을 얻을 수 있다.

Mason의 行列式의 各 項의 符號를 결정하는 方法이 제안되었으며 이 符號 결정 방법은 能動과/또는 結合性 回路網의 임피이던스 行列式이나 어드미턴스 行列式의 各 項의 符號 결정방법으로 확장할 수 있다. 2차, 3차…… 등의 環路利得을 구하기 위해서 積線圖에서 線들을 택하는 方法의 數가 홀수인 項들은 存在하고 짝수인 경우의 項들은 반드시 소거된다.

電流積線圖와 電壓積線圖에서 線들을 택할 때 線들이 겹치는 경우와 그렇지 않은 경우에 따라 環路의 次數가 달라진다. 예를 들면 3개의 線을 택할 때 3개의 線이 모두 겹치면 3차의 環路利得이 되고 1개만 겹치면 2차의 環路利得이 되고 모두 겹치지 않으면 1차의 環路利得이 된다.

Mason의 公式의 分子에 대해서 적용할 수 있는 積線圖도 回路網의 임피이던스 또는 어드미턴스 行列式의 餘因數를 位相數學的으로 구하는 方法을 응용하면 가능할 것으로 생각되며 다음 과제로 미룬다.

參 考 文 獻

1. J. E. Barbay, G. W. Lago and R. W. Becker, "Product Graph", Proceedings of 15th Symposium on Circuit Theory, Univ. of Missori, 1972.
2. S. J. Mason and H. J. Zimmerman, "Electronic

Circuit, Signals and Systems", John Wiley and Sons, 1960.
3. S. J. Mason, "Feedback Theory-Further Properties of Signal Flow Graph", Proc. IRE Vol.44, No.7, 1956.
4. J. B. Murdoch, "Network Theory", Chap. 5, McGraw Hill, 1970.
5. Mayeda, "Graph Theory", Chap. 8, John Wiley and Sons, 1972.