# 非對稱軸콘덴서電動機의 振動토오크 特性의 解析

論 文
26～4～1

# Analysis on the Alternating Torque Characteristics of Capacitor Motor with Windings not in Quadrature

吳 兢 烈*
(Keung Yul Oh)

**Abstract**

With the equivalent series circuit analyzed by revolving field theory and drawn by using the equivalent circuit constant ratios in capacitor motor with windings not in quadrature having space harmonics in its magnetic field (the above ratios are the equivalent circuit constants for the fundamental flux to the magnetizing reactance of the circuit), the equation for the alternating torque with twice line frequency in the motor is directly derived, and the alternating torque is measured with the self-made stator vibration angle amplitude measuring apparatus that is composed of a pickup, filter, photoelectric pickoff etc.

The measured values satisfactorily compared with computed values.

The properties of the alternating torque characteristics for respective harmonic fluxes and the resultant alternating torque characteristic, the effects of the alternating torque characteristics for respective harmonic fluxes on the resultant alternating torque characteristic, the effects of the variation in the motor constants and the equivalent circuit constant ratios for the fundamental flux on the alternating torque charcteristics for respective harmonic fluxes and the resultant alternating torque chaacteristic, are made clear, applying the equation.

There exist the optimum values of the motor constants and the equivalent circuit constant ratios for the fundamental flux for decreasing the alternating torque, and the value could be determined in design by the method presented in this paper.

## I. 序 論

家庭用電氣機器, 小形揚水펌프, 農漁村의 各種機械, 各種記錄裝置 등의 驅動用으로 많이 사용되고 있는 콘덴서電動機는 定常토오크 以外에 電源周波數의 2倍의 周波數로 振動하는 토오크를 발생하며 이것은 振動, 騷音, 不均一한 回轉등의 直接原因이 되고 있다. 따라서 그 振動토오크를 충분히 檢討하여야 한다.

Morrill氏[1]는 回轉磁界理論에 의하여 主卷線軸과 補助卷線軸間의 電氣角度가 $\pi/2$인 콘덴서電動機에서 電源의 2倍 周波數로 振動하는 振動토오크의 計算式을 유도하였고 Kibe氏와 Mitto氏[2]는 Morrill氏[1]의 方法에 의하여 두 卷線軸間의 電氣角度가 任意인 경우의 單相誘導電動機의 電源의 2倍 周波數의 振動토오크 計算式을 구하였지만 이들은 空間高調波磁束을 고려하고 있지 않을뿐 아니라 그 振動토오크特性에 관하여 충분한 解析이 되어 있지 않다.

單相誘導電動機의 主卷線 및 補助卷線은 각각 同心卷이므로 分布卷으로 된 單相誘導電動機보다 空間磁束分布가 더욱 심한 階段形波가 된다. 따라서 空間高調波磁束을 고려하여 電源의 2倍 周波數의 振動토오크를 解析하여야만 정확한 解析을 얻을 수 있다. 著者는 空

*正會員 : 成均館大理工大電氣工學科敎授 · 工博(當學會理事)
接受日字 : 1977年4月8日

間高調波磁束을 가진 非對稱軸콘덴서 電動機를 回轉磁界理論으로 解析하고 基本波磁束에 대한 等價回路의 勵磁리액턴스와 그 等價回路의 각 定數와의 比, 즉 基本波磁束에 대한 等價回路定數比를 사용하여 作成한 直列形等價回路를 發表[3]한 바 있는데 本論文에서는 그 直列形等價回路로부터 직접 空間高調波磁束을 가진 非對稱軸콘덴서 電動機의 電源周波數의 2倍의 周波數로 振動하는 振動토오크(以下 振動토오크라 한다) 計算式을 유도하였다. 그리고 振動토오크는 픽업裝置를 이용하여 考案한 固定子 振動角의 振幅測定裝置를 써서 측정한 그 振幅의 값을 사용하여 계산하였다.

이 實測値와 計算式을 供試機에 적용하여 계산한 計算値가 比較的 잘 一致하였으므로 그 計算式을 이용하여 각 高調波磁束에 의한 振動토오크 特性과 合成振動토오크特性의 性質, 각 高調波磁束에 의한 振動토오크特性이 合成振動토오크特性에 미치는 영향, 그리고 電動機의 각 定數 및 基本波磁束에 대한 각 等價回路定數比의 변화가 각 高調波磁束에 의한 振動토오크 特性과 合成振動토오크特性에 미치는 영향을 명백히 하였다. 콘덴서 電動機에 있어서 回轉子의 홈이 閉鎖홈인 경우는 電源의 4倍 周波數의 振動토오크가 발생 하므로 本論文에서는 回轉子의 슬롯이 閉鎖홈인 경우와 磁氣飽和, 각 슬립에 대한 回路定數의 변화등은 고려하지 않았다.

## 2. 等價回路

等價回路의 解析의 方法은 文獻[3]에 詳述되어 있으므로 重複을 피하여 本論文의 論述에 필요한 것만을 記載한다. 階段形波로 分布된 空間高調波磁束의 高調波次數를 $p$라하면 콘덴서電動機는 極數가 $p$, $3p$, $5p$, ……, $np$인 正弦波 分布卷線을 가진 電動機가 縱續接續된 것과 等價이다. 이들 電動機를 각 極數에 해당하는 高調波電動機라고 부르기로 하고, 각 高調波電動機를 回轉磁界理論에 의하여 解析한다.

지금 基本波電動機의 主卷線側으로 換算한 回轉子 1相의 抵抗을 回轉子導體에 관한 抵抗 $r_{21c}$와 端絡環에 관한 抵抗 $r_{21e}$로 분리하고 또 그 電動機의 主卷線側으로 換算한 回轉子 1相의 漏洩리액턴스의 半을 回轉子斜溝리액턴스와 이외의 漏洩리액턴스 $x_{221}$으로 분리한다. 그리고 $n$次調波電動機의 각 等價回路定數에 基本波電動機의 主卷線의 勵磁리액턴스의 半인 $x_{m1}$의 逆數를 곱한 것을 사용하여 $n$次調波電動機의 主卷線의 임의의 슬립 $s$에 대한 等價回路를 표시하면 그림 1과 같이 된다. 그림 1에서 $K_{wm1}$ 및 $K_{wmn}$는 각각 基本波電動機 및 $n$次調波電動機의 主卷線의 卷線係數, $\theta_{sk}$는 斜溝角이고 $C_{sk1}$ 및 $C_{skn}$는 각각 基本波電動機 및 $n$次調波電動機의 斜溝係數이며 $k$는 0.03958인 數値(附錄(4) 參照)를 표시한다.

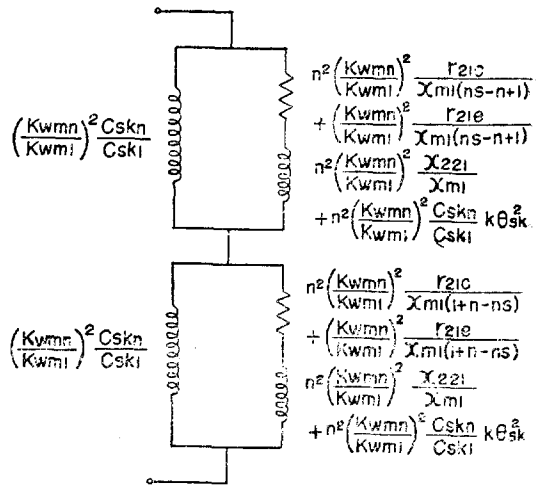



**그림 1.** $n$次調波電動機의 主卷線의 等價回路
**Fig. 1.** Equivalent circuit for the main winding of the $n$th harmonic motor.

그림 1로서 표시되는 $n$次調波電動機의 主卷線의 等價回路를 直列形回路로 고치고 主卷線軸이 補助卷線軸보다 電氣角으로 任意角 $\alpha$만큼 뒤진 위치에 있다고 하여 作成한 각 高調波電動機의 等價回路를 縱續接續하면 그림 2와 같이 空間高調波磁束을 가진 非對稱軸콘덴서電動機의 等價回路가 構成된다.

그림에 있어서

$r_m$ : 主卷線의 抵抗
$x_{lm}$ : 主卷線의 漏洩리액턴스
$p_a$ : 補助卷線의 抵抗
$x_{la}$ : 補助卷線의 漏洩리액턴스
$r_c$ : 補助卷線에 연결된 콘덴서의 抵抗
$x_c$ : 補助卷線에 연결된 콘덴서의 리액턴스
$a_n$ : $n$次調次電動機의 主卷線의 實效導體數와 補助卷線의 實效導體數와의 比
$R_{fn}$ : $n$次調波磁束에 대한 等價回路의 主卷線의 正方向成分等價抵抗
$R_{bn}$ : $n$次調波磁束에 대한 等價回路의 主卷線의 逆方向成分 等價抵抗
$X_{fn}$ : $n$次調波磁束에 대한 等價回路의 主卷線의 正方向成分 等價리액턴스

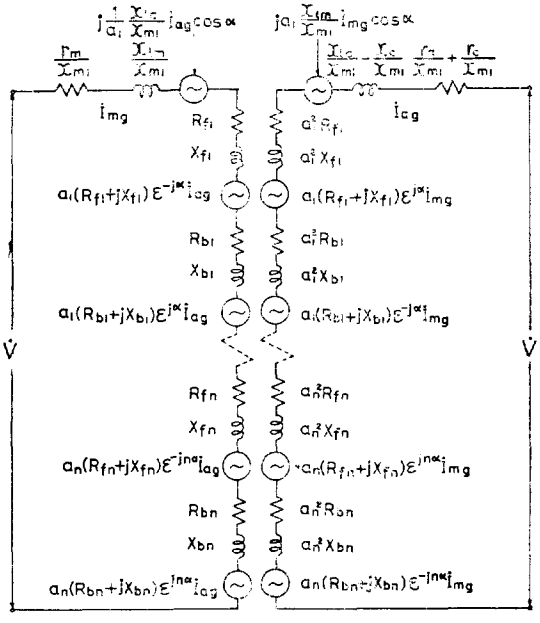


**그림 2.** 非對稱軸콘덴서電動機의 等價回路
**Fig. 2.** Equivalent circuit for the capacitor motor with windings not in quadrature.

$X_{bn}$ : $n$次調波磁束에 대한 等價回路의 主卷線 逆方向成分等價리액턴스

$I_{mg}$ : 主卷線의 電流

$I_{ag}$ : 補助卷線의 電流

$V$ : 一次 印加電壓

위와 같이 基本波磁束에 대한 等價回路의 勵磁리액턴스와 그 等價回路定數와의 比 즉 基本波磁束에 대한 等價回路定數比로 표시한 等價回路를 사용하여 解析하면 그 結果는 基本波磁束에 대한 等價回路定數比가 같은 電動機에 共通的으로 適用되고 또 振動토오크 特性을 용이하게 解析할 수 있을 것이다.

## 3. 振動토오크의 計算式

主卷線의 電流 $\dot{I}_{mg}$와 補助卷線의 電流 $\dot{I}_{ag}$와의 位相差를 $\theta_{ma}$라 하면 $\dot{I}_{mg}$, $\dot{I}_{ag}$는 각각 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\left.\begin{aligned}\dot{I}_{mg}&=I_{mg}(\cos\omega t+j\sin\omega t)\\ \dot{I}_{ag}&=I_{ag}\cos(\omega t+\theta_{ma})+j\sin(\omega t+\theta_{ma})\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

이것을 第$n$次調波磁束에 대한 等價回路에서 표시할 수 있는 다음과 같은 式에 代入한다.

(主卷線의 全正方向成分電壓)×(主卷線의 電流)
−(主卷線의 全逆方向成分電壓)×(主卷線의 電流)
+(補助卷線의 全正方向成分電壓)×(補助卷線의 電流)
−(補助卷線의 全逆方向成分電壓)×(補助卷線의 電流)

$$\begin{aligned}&=\{\dot{I}_{mg}(R_{fn}+jX_{fn})+a_n(R_{fn}+jX_{fn})\varepsilon^{-jn\alpha}\dot{I}_{ag}\}\dot{I}_{mg}\\&\quad-\{\dot{I}_{mg}(R_{bn}+jX_{bn})+a_n(R_{bn}+jX_{bn})\varepsilon^{jn\alpha}\dot{I}_{ag}\}\dot{I}_{mg}\\&\quad+\{\dot{I}_{ag}a_n^2(R_{fn}+jX_{fn})+a_n(R_{fn}+jX_{fn})\varepsilon^{jn\alpha}\dot{I}_{mg}\}\dot{I}_{ag}\\&\quad-\{\dot{I}_{ag}a_n^2(R_{bn}+jX_{bn})+a_n(R_{bn}+jX_{bn})\varepsilon^{-jn\alpha}\dot{I}_{mg}\}\dot{I}_{ag}\end{aligned}\quad(2)$$

다음에 이 式을 計算整理하면 그 實數部는

$$\begin{aligned}&\{(R_{fn}-R_{bn})(\dot{I}_{mg}^2+a_n^2I_{ag}^2\cos2\theta_{ma}\\&\qquad+2a_nI_{mg}I_{ag}\cos n\alpha\cos\theta_{ma})\\&-(X_{fn}-X_{bn})(a_n^2I_{ag}^2\sin2\theta_{ma}\\&\qquad2a_nI_{mg}I_{ag}\cos n\alpha\sin\theta_{ma})\}\cos2\omega t\\&-\{(R_{fn}-R_{bn})(a_n^2\ I_{ag}^2\sin2\theta_{ma}\\&\qquad+2a_n\ I_{mg}\ I_{ag}\cos n\alpha\ \sin\theta_{ma})\\&+(X_{fn}-X_{bn})\ (I_{mg}^2+a_n^2I_{ag}^2\cos2\theta_{ma}\\&\qquad+2a_nI_{mg}\ I_{ag}\cos n\alpha\ \cos\theta_{ma}\}\sin2\omega t\end{aligned}\quad(3)$$

와 같이 된다. Morrill氏[1]가 구한 基本波磁束만 고려했을 경우의 두 卷線軸間의 電氣角度가 $\pi/2$인 콘덴서電動機의 振動토오크 計算式의 誘導過程을 $n$次調波電動機에 適用하여 그 振動토오크의 計算式을 구하면 式(3)과 同一한 式을 얻는다. 또 Kibe氏와 Mitto氏[2]가 Morrill氏[1]의 方法에 따라 구한 基本波磁束만 고려했을 경우의 두 卷線軸間의 電氣角度가 任意角인 콘덴서電動機의 振動토오크 計算式과도 式 (3)은 一致한다. 따라서 式 (3)은 $n$次調波電動機의 振動토오크의 計算式으로서 成立한다. Morrill氏[1]의 方法은 그 誘導過程이 대단히 복잡하며 主卷線 및 補助卷線의 單位길이當 암페어回數, 그리고 回定子 및 回轉子에 있어서 正方向成分 및 逆方向成分磁束의 空隙周邊에서의 磁束도 구하여야 한다. 그러나 式 (3)의 誘導法은 等價回路로부터 직접 구할 수 있으므로 대단히 간단하다고 생각된다. 따라서 空間高調波磁束을 가진 非對稱軸콘덴서電動機의 振動토오크를 基本波電動機의 同期와트로서 표시하면 그 最大値振 $T'a$(動토오크는 그 最大値로서 표시한다)는 다음과 같다.

$$T'a=\sum n\sqrt{\{(R_{fn}-R_{bn})^2+(X_{fn}-X_{bn})^2\}\{I_{mg}^4-a_n^4\ I_{ag}^4+2a_n^2I_{mg}^2I_{ag}^2\cos2\theta_{ma}+4a_n^2I_{ng}^2I_{ag}^2\cos^2n\alpha+4a_nI_{mg}I_{ag}\cos n\alpha\cos\theta_{ma}(I_{mg}^2+a_n^2I_{ag}^2)\}}\quad(4)$$

그리고 실제의 振動토오크 $T_a$는

$$T_a=\frac{1}{x_{m1}}T'a\quad(5)$$

이다(式(4)에 關係되는 각 定數는 附錄에 표시하였다)

이 式에 의하여 $ns-n+1=1+n-ns$ 즉 $s=1$의 경우는 $R_{fn}=R_{bn}=X_{fn}=X_{bn}$이므로 實效導體數의 比, 콘덴서의 容量 등에 관계없이 起動 때는 振動토오크가 생기지 않을 것이다. 또 振動토오크의 計算式은 $R_{fn}$, $R_{bn}$, $X_{fn}$, $X_{bn}$, $I_{mg}$, $I_{ag}$, $a_n$, $\theta_{ma}$의 函數인데 이들에 관한 각 式을 대입하면 결국 振動토오크의 計算式은 $r_m/x_{m1}$, $x_{lm}/x_{m1}$, $r_{21c}/x_{m1}$, $r_{21e}/x_{m1}$, $x_{221}/x_{m1}$, $r_a/x_{m1}$, $x_{la}/x_{m1}$, $x_c/x_{m1}$, $\alpha$, $c_a/c_m$, $\theta_{sh}$의 函數가 되므로 基本波電動機의 等價回路定數比 등으로서 空間高調波磁束을 가진 非對稱軸콘덴서電動機의 振動토오크를 解析할 수 있다.

## 4. 振動토오크의測定

### 4·1. 測定方法

2重構造의 축받이를 사용하여 電動機의 固定子도 그 軸의 周圍에서 자유롭게 回轉할 수 있도록 工作하고 回轉子로부터 固定子에 전달된 振動토오크 $T''a$는 固定子 振動角의 振幅과 固定子의 慣性모멘트를 측정하여 다음 式에 의하여 計算한다.

$$T''a=J\omega^2\theta_0 \text{ [N·m]} \qquad (6)$$

여기서

$J$ : 固定子 慣性모멘트[kg·m²]

$\omega$ : $2\pi\times$(電源周波數의 2倍의 周波數)

$\theta_0$ : 固定子 振動角의 振幅의 半[rad]

이다.

固定子 振動角의 振幅은 固定子 振動의 振幅과 그外徑을 측정하여 측정한다. 그리고 固定子 振動의 振幅은 그림 3에서 보는 바와 같이 固定子에 접촉된 픽업裝置에 의하여 그 振動을 電氣的 振動으로 변환하고 이것을 電源의 2倍周波數의 필터를 거쳐 Photocorder에 記錄한 다음 이 記錄된 振動波의 振幅을 實測하여

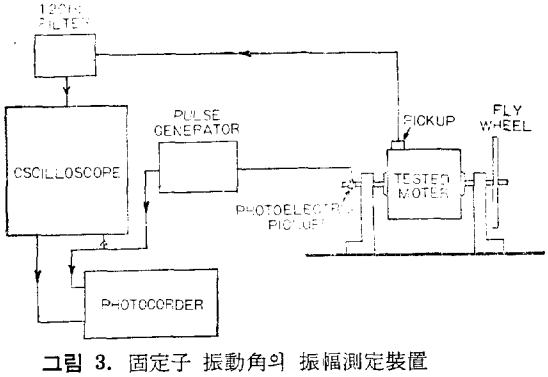



**그림 3.** 固定子 振動角의 振幅測定裝置
**Fig. 3.** Measuring apparatus diagram of amplitude of stator vibration angle

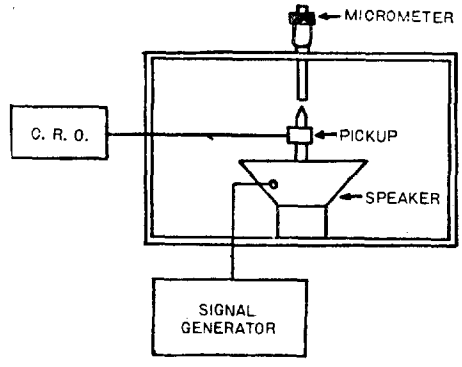



**그림 4.** 換算係數 測定裝置
**Fig. 4.** Measuring apparatus diagram of reduction factor.

이것을 실제의 값으로 換算하여 측정한다. 그 換算은 그림 4와 같은 裝置로서 換算係數를 구하여 換算한다. 즉 스피이커에 低電壓을 인가하고 스피이커의 振動膜의 中心에 固定된 振動片의 振動을 픽업에 의하여 오실로스코우프에 나타나게 한 후 固定된 마이크로미터를 振動의 尖頭部分이 變形하지 않았을때까지 조정하여 그 位置를 기준으로 정한다. 다음에 電壓을 높여 振動波의 振幅을 크게하고 그 振動波의 尖頭部分이 變形되지 않는 위치까지 마이크로미터를 조정하므로서 마이크로미터의 이동거리를 측정하여 換算係數를 구한다. 이 경우 픽업부터 Photocorder에 記錄될때까지의 過程에 있어서의 그 값의 변화도 고려하여야 한다.

速度는 光電裝置에 의하여 측정한다. 黑色 테이프를 等間隙으로 電動機의 축에 부착하고 Photoelectric pickoff를 사용하여 電動機 回轉數當 테이프數만큼의 펄스를 발생시켜 이 펄스를 固定子振動의 振動波와 동시에 Photocordr에 記錄한 후 펄스의 간격으로부터 平均速度를 구하는 것과 同時에 그 速度에 대한 固定子 振動角의 振幅을 구한다. 그리고 固定子의 慣性모멘트는 비틀림 振子에 의한 方法에 따라 측정한다.

### 4·2 計算結果와 實驗結果

解析結果를 檢討하기 위하여 表1과 같은 定格과 定數 및 基本波磁束에 대한 等價回路定數比를 가진 콘덴서電動機에 대하여 계산하였다. 계산은 電子計算機에 의하여 슬립을 1% 間隙으로 변화시켜 각 슬립에 대한 값을 산출하였고 그 結果를 그림 5에서 實線으로 표시하였다.

實驗에 있어서 振動波의 振幅을 固定子 振動의 振幅으로 換算하기 위한 換算係數, 固定子의 外徑 및 慣性

**表 1.** 供試電動機 I의 定格과 定數및 等價回路定數比
**Table. 1.** Specifications, constants & equivalent circuit constant ratios of the tested motor I

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 定格 | 電壓 100[V], 周波數 60[Hz], 極數 2<br>200[W], 回轉數 3430[R.P.M.] | | | |
| 定數및等價回路定數比 | $1/x_{m1}$ | 0.02939 | $\alpha$ | $\pi/2$[rad] |
| | $r_m/x_{m1}$ | 0.05601 | $k_{wm3}/k_{wm1}$ | 0.00777 |
| | $x_{lm}/x_{m1}$ | 0.04799 | $k_{wm5}/k_{wm1}$ | 0.00565 |
| | $r_{21e}/x_{m1}$ | 0.04187 | $c_a/c_m$ | 1.60909 |
| | $x_{21c}/x_{m1}$ | 0.00943 | $a_1$ | 1.60783 |
| | $x_{221}/x_{m1}$ | 0.01133 | $a_2$ | 1.55411 |
| | $r_a/x_{m1}$ | 0.20104 | $a_3$ | 1.42734 |
| | $x_{la}/x_{m1}$ | 0.12232 | $\theta_{sk}$ | 0.30489[rad] |
| | $x_c/x_{m1}$ | 2.61979 | | |

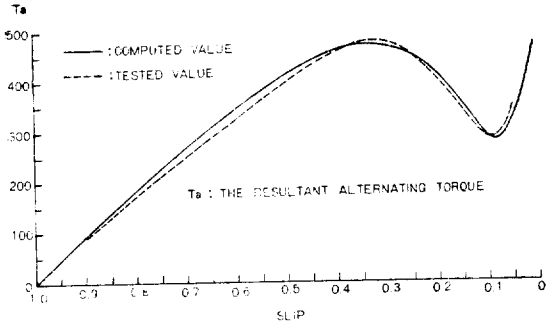



**그림 5.** 供試電動機 I의 合成振動토오크(同期와트)
**Fig. 5.** Resultant alternating torques(synchronous watts) vs. slip for the tested motor I

모멘트는 각각 다음과 같았다.

| | |
|---|---|
| 換算係數 | 0.443367 |
| 固定子의 外徑 | 0.1436[m] |
| 固定子의 慣性모멘트 | 0.02317[kg·m²] |

이들을 사용하여 實測한 振動토오크를 그림 5에서 點線으로 표시하였는데 그림에서 보는 바와 같이 計算値는 實測値에 접근한다고 생각하여도 좋다.

그림 6은 振動토오크의 計算値를 각 高調波電動機에 대하여 분해한 것인데 第 3, 5調波振動토오크는 그 값이 대단히 적음을 알 수 있다. 이것은 表 1에서 보는 바와 같이 供試電動機의 空間高調波磁束이 대단히 적다는 것과 일치한다.

이들 結果 計算値와 實測値는 比較的 잘 일치하며 本 解析法이 妥當함을 알 수 있다. 그리고 空間高調波磁束을 고려했을 경우도 合成振動토오크는 起動때 零이고 슬립이 적은 範圍에서 極小値를 가지며 그 極小

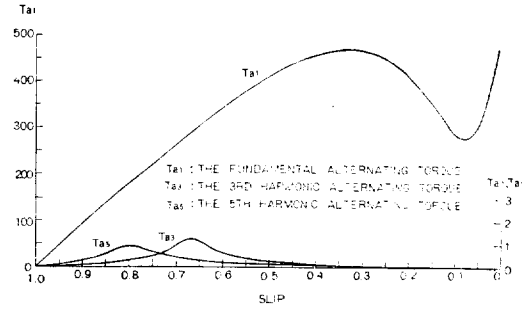



**그림 6.** 供試電動機 I의 高周波振動토오크(同期와트)
**Fig. 6.** Harmonic alternating torques(synchronous watts) vs. slip for the tested motor I.

値에 해당하는 슬립부터 슬립의 감소에 따라 거의 直線的으로 증가한다는 것도 알 수 있다.

## 5. 電動機의 定數및 等價回路定數比와 振動토오크特性과의 關係

電動機의 定數및 基本波磁束에 대한 等價回路定數比 중에서 任意의 1개를 어떤 範圍內에 변화시켜 그들이 振動토오크特性에 미치는 영향을 명백히 하기 위하여 表 2와 같은 定格과 定數 및 基本波磁束에 대한 等價回路定數比를 가진 高調波成分이 큰 電動機를 選定하여 第 5 調波磁束까지 고려한 각 速度一振動토오크 特性曲線을 구하면 그림 7~17과 같다. 그림에서 百分率로 표시한 것은 供試電動機 II의 等價回路定數比 및 定數를 100%로 한 것이다.

각 그림에서 보는 바와 같이 基本波振動토오크는 슬립이 적은 點에서 極小値를 가지며 그 極小値에 해당

**表 2.** 供試電動機 II의 定格과 定數 및 等價回路定數比
**Table. 2.** Specifications, constants & equivalent circuit constant ratios of the tested motor II

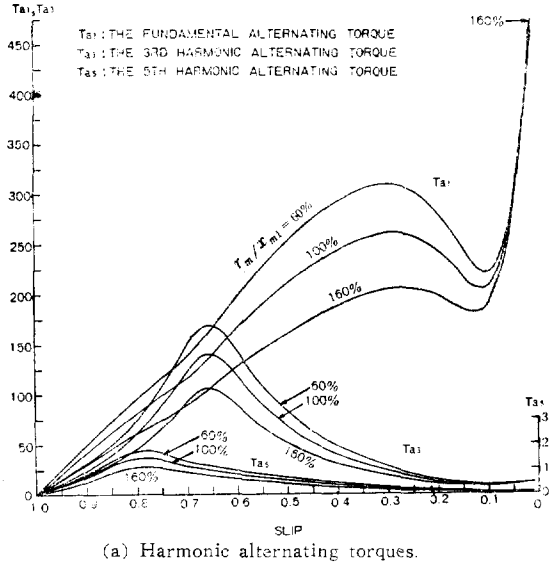
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 定格 | 電壓 100[V], 周波數 60[Hz], 極數 4<br>出力 200[W], 回轉數 1680[R.P.M.] | | | |
| 定數및等價回路定數比 | $1/x_{m1}$ | 0.02666 | $\alpha$ | $\pi/2$[rad] |
| | $r_m/x_{m1}$ | 0.08000 | $k_{wm3}/k_{wm1}$ | 0.15000 |
| | $x_{lm}/x_{m1}$ | 0.08000 | $k_{wm5}/k_{m1}$ | 0.01500 |
| | $r_{21e}/x_{m1}$ | 0.02750 | $c_a/c_m$ | 1.50000 |
| | $r_{21c}/x_{m1}$ | 0.03380 | $a_1$ | 1.60000 |
| | $x_{221}/x_{m1}$ | 0.03370 | $a_2$ | 2.50000 |
| | $r_a/x_{m1}$ | 0.20000 | $a_3$ | 0.60000 |
| | $x_{la}/x_{m1}$ | 0.20000 | $\theta_{ks}$ | 0.40000[rad] |
| | $x_c/x_{m1}$ | 2.83085 | | |

하는 슬립부터 슬립의 감소에 따라 거의 直線的으로 증가하고 그 極大値에 해당하는 슬립부터는 슬립의 증가에 따라 서서히 감소하여 $s=1$ 즉 起動때 零이다. 第 3, 5 調波振動토오크는 슬립 약 0~0.3 범위에서 그 값이 극히 적고 슬립의 증가에 따라 증가한다. 또 第3調波振動토오크는 슬립 약 0.65, 第5調波振動토오크는 슬립 약 0.78에서 最大値를 가지며 그 슬립 부근에서는 대부분의 경우 그 값의 변화가 심하고 이들 역시 $s=1$에서 零이다. 그리고 合成振動토오크의 슬립이 적은 범위에서의 변화는 주로 基本波振動토오크의 영향이고 그 合成振動토오크特性曲線에 평탄한 부분과 슬립 약 0.62 부근에서 弧狀부분이 생기는 것은 主로 第 3調波振動토오크의 영향임을 알 수 있다.

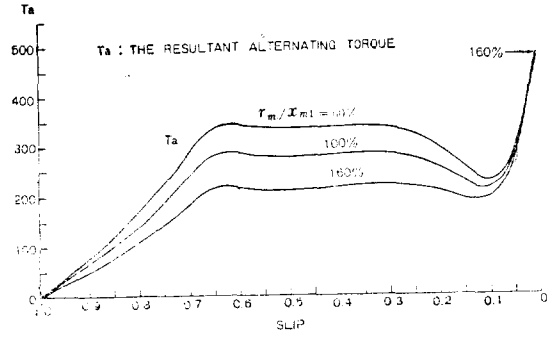
어떤 基本波磁束에 대한 等價回路定數比를 변화시킨다는 것은 그 等價回路定數比만이 가지는 構造上의 設計定數를 適宜 변화시킨다는 것은 그 等價回路定數比만이 가지는 構造上의 設計定數를 適宜 변화시킨다는 것이며 $r_m/x_{m1}$, $r_a/x_{m1}$을 변화시킨는데는 固定子 슬롯의 깊이·卷線의 斷面積및 그 固有抵抗, $x_{1m}/x_{m1}$ $x_{1a}/x_{m1}$을 변화시키는데는 固定子 슬롯의 모양, $r_{21c}/x_{m1}$을 변화시키는데는 回轉子 導體棒의 斷面積 및 그 固有抵抗, $x_{22e}/x_{m1}$을 변화시키는 데는 端絡環의 斷面積·內徑·外徑및 그 固有抵抗, $x_{221}/x_{m1}$을 변화시키는데는 回轉子 슬롯의 모양이 각각 중요한 因子가 된다.

### 5·1 $r_m/x_{m1}$, $x_{1m}/x_{m1}$, $x_{221}/x_{m1}$, $\theta_{sk}$의 영향

$r_m/x_{m1}$, $x_{1m}/x_{m1}$, $x_{221}/x_{m1}$, 및 $\theta_{sk}$ 중에서 任意의 1개를 어떤 範圍로 변화시켰을 경우의 각 速度一振動토오크 特性曲線을 구하면 그림 7~10과 같다. 각 그림

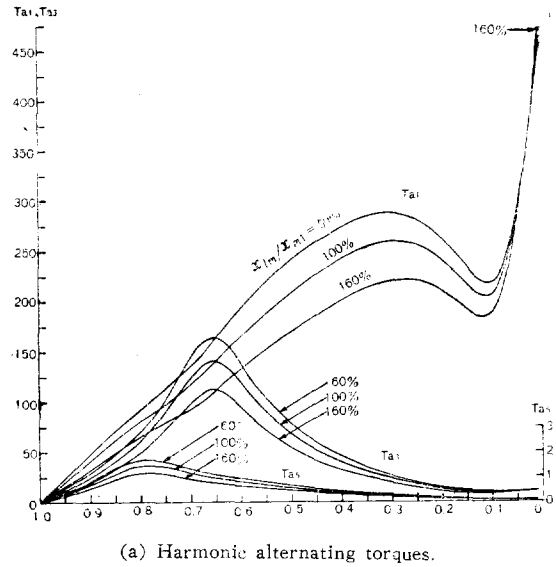



(a) Harmonic alternating torques.

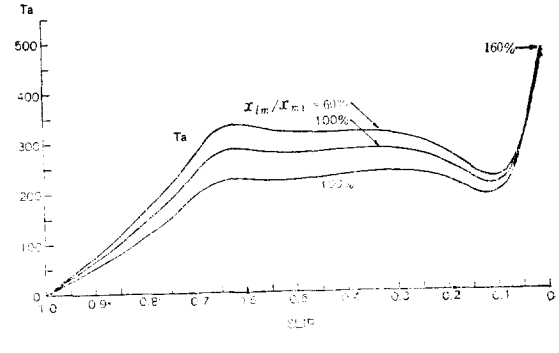



(b) Resultant alternating torques.

**그림 7.** $r_m/x_{m1}$과 振動토크오(同期와트)와의 關係
**Fig. 7.** Alternating torques (synchronous watts) vs. slip with variation in $r_m/x_{m1}$.

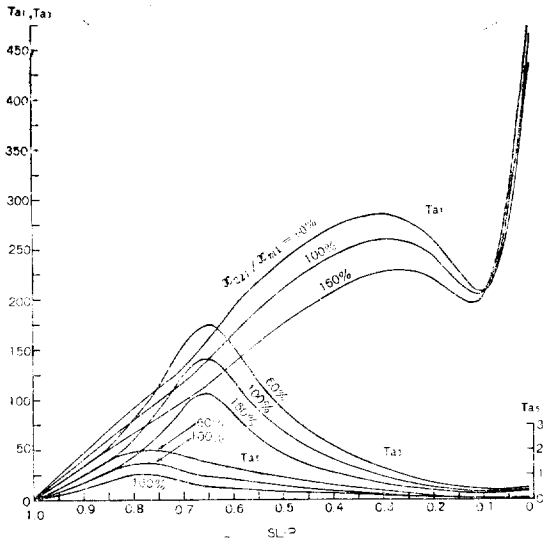



(a) Harmonic alternating torques.

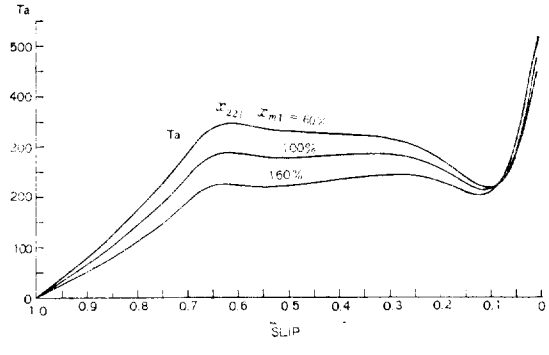



(b) Resultant alternating torques

**그림 8.** $x_{1m}/x_{m1}$과 振動토오크(同期와트)와의 關係
**Fig. 8.** Alternating torques (synchronous watts) vs. slip with variation in $x_{1m}/x_{m1}$.

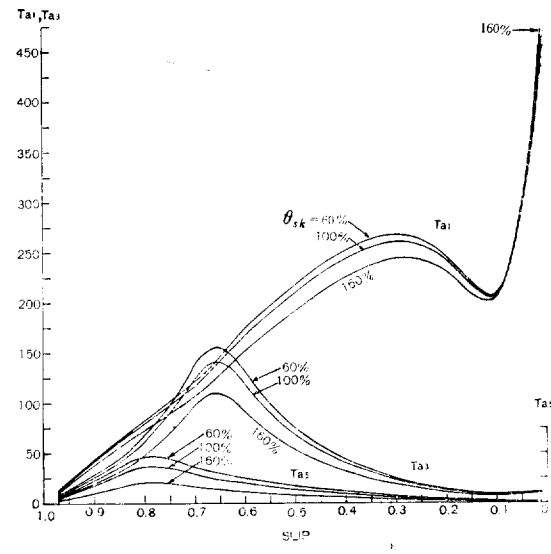



(a) Harmonic alternating torques.

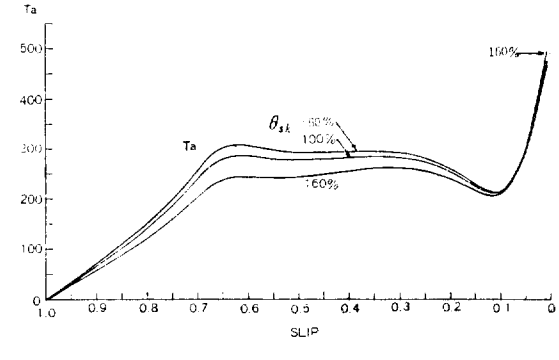



(b) Resultant alternating torques.

**그림 9.** $x_{221}/x_{m1}$과 振動토오크(同期와트)와의 關係
**Fig. 9.** Alternating torques (synchronous watts) vs. slip with variation in $x_{221}/x_{m1}$.




(a) Harmonic alternating torques.




(b) Resultant alternatig torques.

**그림 10.** $\theta_{sk}$와 振動토오크(同期와트)와의 關係
**Fig. 10.** Alternating torques (synchronous watts) vs. slip with variation in $\theta_{sk}$.

에서 보는 바와 같이 이들은 類似한 변화를 하며 그림에 의하여 檢討한 結果를 要約하면 다음과 같다.

(1) 基本波振動토오크는 $r_m/x_{m1}$, $x_{lm}/x_{m1}$, $x_{221}/x_{m1}$ 및 $\theta_{sk}$의 변화에 의하여 슬립이 극히 적은 범위에서는 거의 변화가 없지만 그 외 범위에서는 그 증가에 따라 極大値 및 極小値의 감소와 同時에 全般的으로 감소한다. 그 變化狀態는 $r_m/x_{m1}$의 변화의 경우가 가장 심하고 $\theta_{sk}$를 변화시켰을 경우는 별로 심하지 않다.

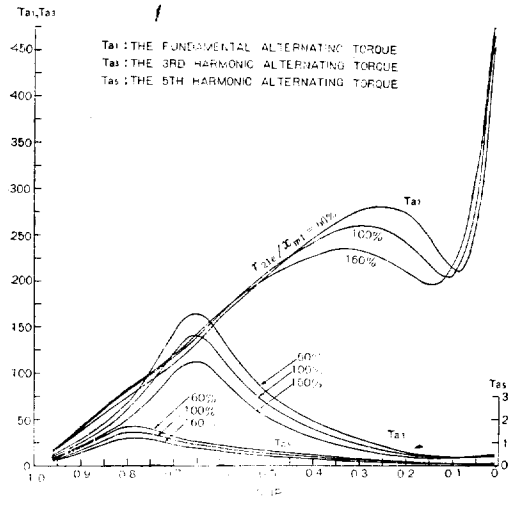
(2) 第3, 5 調波振動토오크도 각 變數値의 변화에 의하여 슬립이 적은 범위에서는 거의 변화가 없지만 그 외 범위에서는 그 증가에 따라 最大値의 감소와 同時에 全般的으로 감소한다. 그 變化狀態는 $x_{221}/x_{m1}$의 변화의 경우가 가장 심하다.

(3) 위의 結果에 따라 合成振動토오크도 슬립이 극히 적은 범위에서는 거의 변화가 없지만 그 외 범위에서는 각 變數値의 증가에 따라 그 極小値의 감소와 同時에 全般的으로 감소한다. 그 變化狀態는 $r_m/x_{m1}$의 변화의 경우가 가장 심하며 $\theta_{sk}$를 변환시켜도 合成振動토오크는 별로 심한 변화를 하지 않는다.

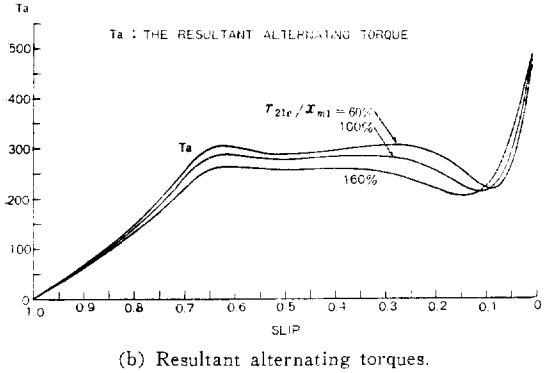
### 5·2 $r_{21e}/x_{m1}$, $r_{21c}/x_{m1}$의 영향

이 경우의 각 速度—振動토오크 特性曲線은 그림11, 12와 같으며 檢討 結果를 要約하면 다음과 같다.

(1) 基本波振動토오크는 $r_{21e}/x_{m1}$, $r_{21c}/x_{m1}$의 증가에 의하여 그 極大値 및 極小値가 감소하고 슬립이 극히 적은 범위에서는 그 감소에 따라 감소한다. 그리고 슬립 약 0.45~1 범위에서는 거의 변화가 없다.

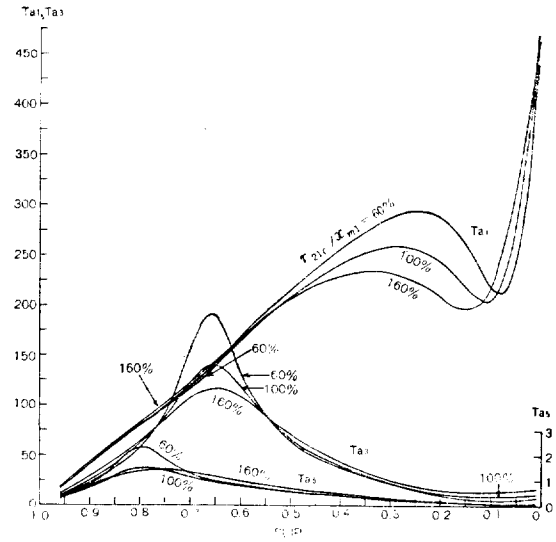



(a) Harmonic altemating torques.

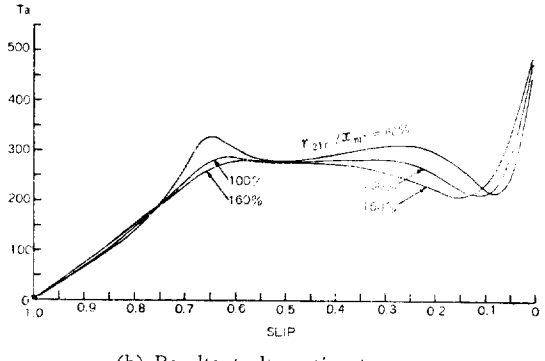



(b) Resultant alternating torques.

**그림 11.** $r_{21e}/x_{m1}$과 振動토오크(同期와트)와의 關係
**Fig. 11.** Alternating torques (synchronous watts) vs. slip with variation in $r_{21e}/x_{m1}$.




(a) Harmonic alternating torques.




(b) Resultant alternating torques,

**그림 12.** $r_{21e}/x_{m1}$과 振動토오크(同期와트)와의 關係
**Fig. 12.** Alternating torques (synchronous watts) vs. slip with variation in $r_{21e}/x_{m1}$.

(2) 第3調波振動토오크는 $r_{21e}/x_{m1}$의 변화에 의하여 슬립이 적은 범위에서는 거의 변화가 없지만 그 외 범위에서는 그 증가에 따라 最大値의 감소와 同時에 全般的으로 감소한다. 그리고 $r_{21e}/x_{m1}$를 감소시키면 最大値는 심하게 증가하지만 그 最大値에 해당하는 슬립 부근의 슬립 이외의 범위에서는 별로 변화가 없다.

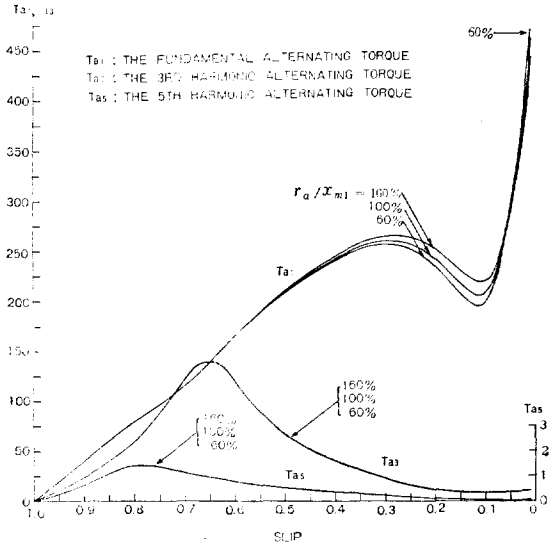
(3) 第5調波振動토오크도 第3調波振動토오크의 경우와 類似한 변화를 하지만 $r_{21e}/x_{m1}$을 크게 증가시켰을 경우는 全域에 걸쳐 거의 변화가 없다.

(4) 合成振動토오크는 $r_{21e}/x_{m1}$을 감소시키면 슬립이 극히 적은 범위에서는 감소하지만 그 외 범위에서는 그 감소에 따라 極小値의 증가와 同時에 全般的으로 증가한다. 그리고 $r_{21e}/x_{m1}$을 변화시키면 슬립이 적은 범위에서는 그 감소에 따라 감소하고 슬립 약 0.75~1 범위에서는 거의 변화가 없다. 그러나 그 두 범위 외에서는 그 증가에 의하여 감소하고 $r_{21e}/x_{m1}$의 감소가 심하면 弧狀部分의 변화도 심하다.

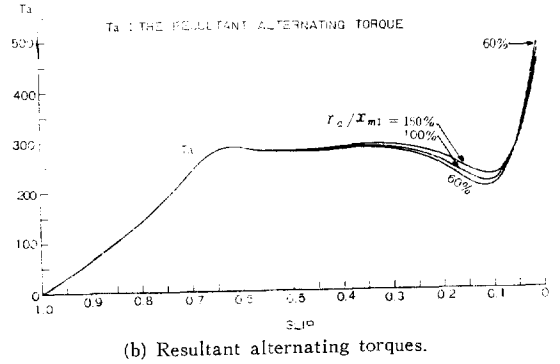
### 5·3 $r_a/x_{m1}$, $x_{la}/x_{m1}$의 영향

이 경우의 각 速度—振動토오크 特性曲線은 그림13, 14와 같으며 그 변화는 극히 미소하다.

(1) 基本波振動토오크는 $r_a/x_{m1}$의 감소에 의하여 그 極大値 및 極小値는 감소하지만 그 極大値 및 極小値에 해당하는 슬립 부근의 슬립 이외의 범위에서는 거의 변화가 없다. 그리고 $x_{la}/x_{m1}$을 변화시키면 그 極小値에 해당하는 슬립보다 多少 큰 슬립부터 슬립이 적은 범위에서는 그 감소에 의하여 極小値의 감소와 同時에

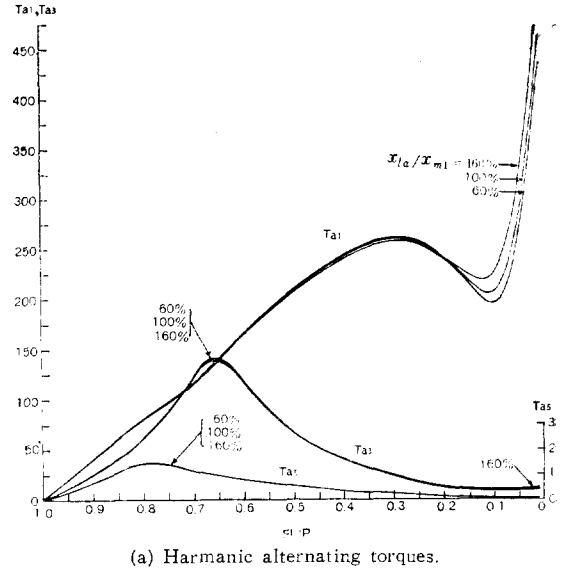



(a) Harmonic alternating torques.

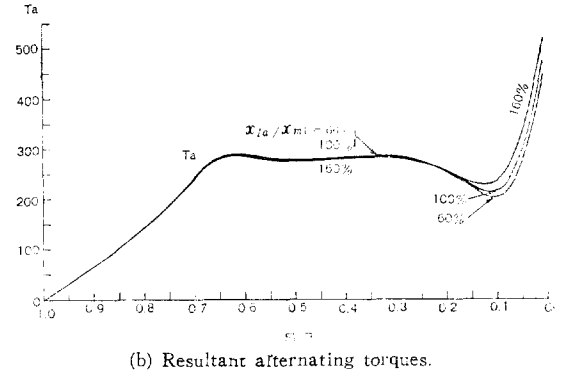



(b) Resultant alternating torques.

**그림 13.** $r_a/x_{m1}$과 振動토오크(同期와트)와의 關係
**Fig. 13.** Alternating torques (synchronous watts) vs. slip with variation in $r_a/x_{m1}$.




(a) Harmanic alternating torques.




(b) Resultant alternating torques.

**그림 14.** $x_{1a}/x_{m1}$과 振動토오크(同期와트)와의 關係
**Fig. 14.** Alternating torques (synchronous watts) vs. slip wish variation in $x_{1a}/x_{m1}$.

全般的으로 감소하지만 그 외의 범위에서는 거의 변화가 없다.

(2) 第 3, 5調波振動토오크는 $r_a/x_{m1}$, $x_{1a}/x_{m1}$의 변화에 따라 거의 변화하지 않는다.

(3) 合成振動토오크는 $r_a/x_{m1}$의 감소에 의하여 極小値의 감소와 同時에 그 極小値에 해당하는 슬립 부근에서는 감소하지만 그 외의 범위에서는 거의 변화가 없다. 그리고 $x_{1a}/x_{m1}$를 감소시키면 그 極小値에 해당하는 슬립보다 多少 큰 슬립부터 슬립이 적은 범위에서는 極小値의 감소와 同時에 全般的으로 감소하지만 그 외 범위에서는 거의 변화가 없다.

### 5·4 $x_c/x_{m1}$, $\alpha$의 영향

이 경우의 각 速度—振動토오크特性曲線은 그림 15, 16과 같고 각 變數値의 변화에 대한 각 基本波振動토오크 特性曲線의 변화는 복잡하고 심하다.

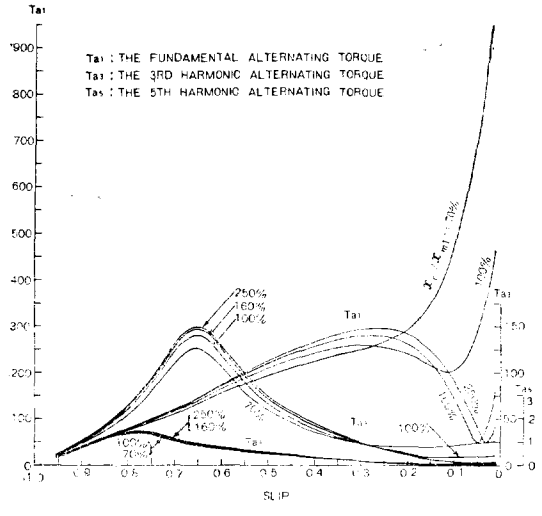
(1) 基本波振動토오크의 변화는 一律的인 변화는 아니다. $x_c/x_{m1}$, $\alpha$의 증가에 의하여 그 極小値가 대단히 심하게 감소한다. 그리고 $x_c/x_{m1}$의 감소, $\alpha$의 증가에 의하여 그 振動토오크가 슬립이 적은 범위에서 급격히 증가하는 경우가 있다. 또 $x_c/x_{m1}$, $\alpha$를 크게 증가시켰을 경우의 그 特性曲線과 그것을 더욱 크게 증가시켰을 경우의 特性曲線과는 거의 全域에 걸쳐 별로 변화가 없다.

(2) 第 3 調波振動토오크는 $x_c/x_{m1}$의 감소, $\alpha$의 증가에 의하여 그 最大値가 감소하고 슬립의 감소에 따라 그들의 변화는 比較的 복잡하고 심하다. 이와같은

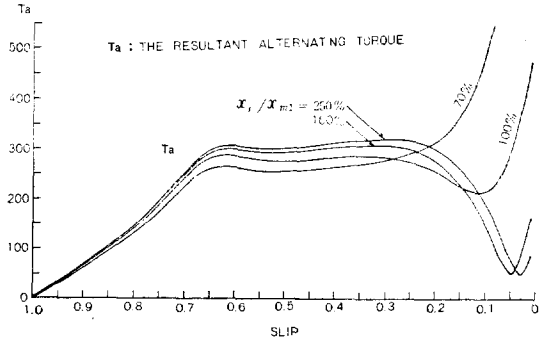
變化狀態는 $\alpha$의 변화의 경우가 심하다. 그리고 $x_c/x_{m1}$을 크게 증가시켰을 경우의 그 特性曲線과 그것을 더욱 크게 증가시켰을 경우의 特性曲線과는 거의 全域에 걸쳐 별로 변화가 없다.

(3) 第5調波振動토오크는 $x_c/x_{m1}$의 변화에 대하여서는 거의 변화가 없지만 $\alpha$의 변화의 경우는 그 증가에 따라 거의 全域에 걸쳐 미소하게 감소하는 경향을 보이고 있다.

(4) 合成振動토오크의 변화도 一律的인 변화는 아니다. $x_c/x_{m1}$, $\alpha$의 증가에 의하여 그 極小値가 대단히 심하게 減少한다. 그리고 $x_c/x_{m1}$의 감소, $\alpha$의 증가에 따라 그 振動토오크가 슬립이 적은 범위에서 급격히 증가하는 경우가 있다. 또 $x_c/x_{m1}$, $\alpha$를 크게 증가시켰을 경우의 그 特性曲線과 그것을 더욱 크게 증가시켰을 경우의 特性曲線과는 거의 全域에 걸쳐 별로 변화가 없다.

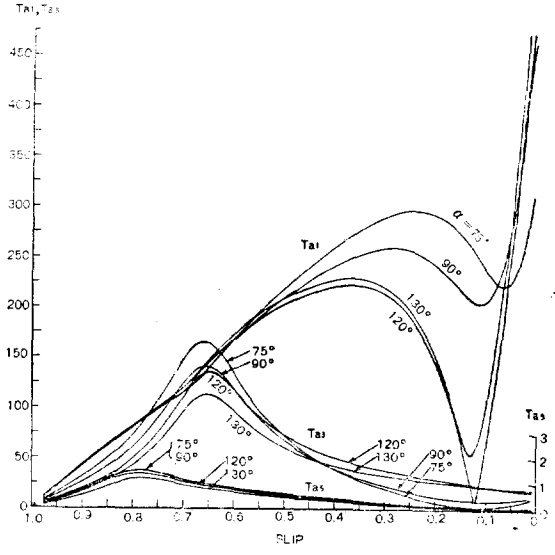



(a) Harmonic alternating torques.

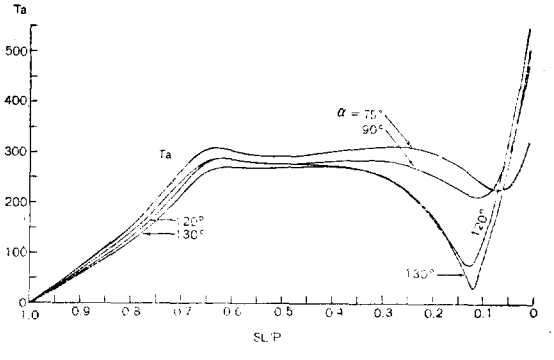



(b) Resultant alternating torques.

**그림 15.** $x_c/x_{m1}$과 振動토오크(同期와트)와의 關係
**Fig. 15.** Alternating torques (synchronous watts) vs. slip with variation in $x_c/x_{m1}$.




(a) Harmonic alternating torques.




(b) Resultant alternating torques.

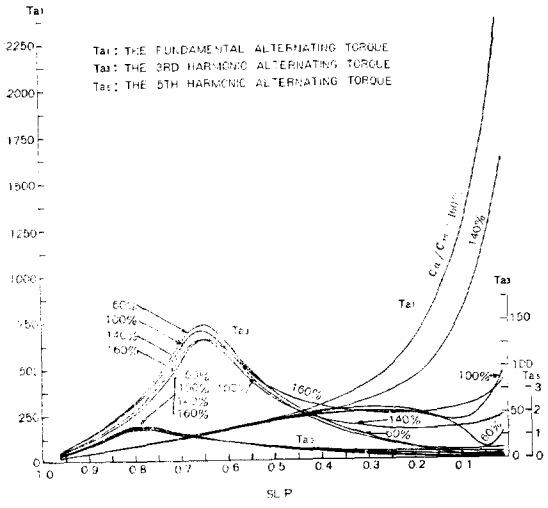
**그림 16.** $\alpha$와 振動토오크(同期와트)와의 關係
**Fig. 16.** Alternating torques (synchronous watts) vs. slip with variation in $\alpha$.

### 5·5 $C_a/C_m$의 영향

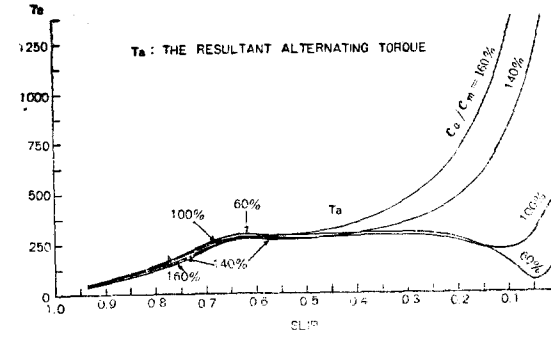
이 경우의 각 速度一振動토오크特性曲線은 그림 17과 같고 $C_a/C_m$의 변화에 대한 각 基本波 및 第3調波振動토오크 特性曲線의 변화는 복잡하다.

(1) 基本波振動토오크는 슬립 약 0.45~1 범위에서는 $C_a/C_m$의 변화에 대하여 거의 변화가 없지만 그외 범위에서는 그 증가에 의하여 一般的으로 증가한다. 그리고 슬립이 적은 범위에서는 그 증가에 따라 급격히 증가하는 경우가 있다.

(2) 第3調波振動토오크의 변화는 一律的인 변화는




(a) Harmonic altemating torques.




(b) Resultant alternating torques.

**그림 17.** $c_a/c_m$와 振動토오크(同期와트)와의 關係
**Fig. 17.** Alternating toruqes (synchronous watts) vs. slip with variation in $c_a/c_m$.

아니고 복잡하며 슬립의 감소에 따라 比較的 심한 변화를 하고 있다.

(3) 第5調波振動토오크는 $C_a/C_m$의 변화에 의하여 거의 全域에 걸쳐 별로 변화가 없다.

(4) 合成振動토오크는 슬립 약 0.45~1 범위에서는 $C_a/C_m$의 변화에 의하여 별로 변화가 없지만 그의 범위에서는 그 증가에 의하여 一般的으로 증가한다. 그리고 슬립이 적은 범위에서는 그 증가에 따라 급격히 증가하는 경우가 있다.

## 6. 結 論

空間高調波磁束을 가진 非對稱軸콘덴서電動機를 回轉磁界理論으로서 解析하고 基本波磁束에 대한 等價回路의 勵磁리액턴스와 그 等價回路의 각 定數와의 比 즉 基本波磁束에 대한 等價回路定數比를 사용하여 作成된 直列形等價回路부터 직접 電源周波數의 2倍의 周波數로서 振動하는 그 電動機의 振動토오크 計算式을 구하였다.

그리고 픽업裝置를 이용하여 考案한 固定子振動角의 振幅測定裝置를 써서 측정한 그 振幅의 값을 사용하여 振動토오크를 계산하였다. 그 實測値와 計算式을 供試機에 적용하여 계산한 計算値를 比較한 바 比較的 잘 一致하였다. 다음에 그 計算式을 이용하여 각 高調波磁束에 의한 振動토오크特性과 合成振動토오크特性의 性質 그리고 電動機의 각 定數 및 基本波磁束에 대한 각 等價回路定數比중에서 任意의 1개를 변화시켰을 경우의 각 高調波磁束에 의한 振動토오크 特性曲線과 合成振動토오크 特性曲線의 변화를 考察하므로서 다음것들이 밝혀졌다.

(1) 基本波振動토오트는 起動때 零이고 슬립이 적은 點에서 極小値를 가지며 그 極小値에 해당하는 슬립부터 슬립의 감소에 따라 거의 直線的으로 증가한다.

(2) 第3, 5調波振動토오크도 起動때 零이고 슬립이 적은 범위에서는 그 값이 적다. 그리고 第3調波振動토오크는 슬립 약 0.65, 第5調波振動토오크는 슬립 약 0.78에서 最大値를 가진다.

(3) 合成振動토오크의 슬립이 적은 범위에서의 변화는 主로 基本波振動토오크의 영향이지만 그 特性曲線에 평탄한 부분과 弧狀部分이 생기는 것은 主로 第3調波振動토오크의 영향이다.

(4) 電動機의 각 定數 및 基本波磁束에 대한 각 等價回路定數比의 변화에 의한 基本波振動토오크特性曲線, 각 高調波振動토오크特性曲線및 合成振動토오크特性曲線의 변화는 比較的 다양하고 特히 슬립이 적은 범위에서는 그 변화가 比較的 복잡하며, 그 定數 및 基本波磁束에 대한 等價回路定數比에는 振動토오크의 減少를 고려한 最適値가 存在한다. 設計에 있어서 그 最適値를 選擇하여야 하며 이는 本解析法에 의하여 계산하므로서 구할 수 있다.

(5) 각 定數 및基本波磁束에 대한 각等價回路定數比의 合理的인 決定을 할려면 合成振動토오크特性曲線의 弧狀部分과 평탄한 부분에서의 振動토오크, 슬립이 적은 點에서의 振動토오크의 極小値 및 高速時의 振動토오크등을 고려하여야 한다.

以上의 解析에 의하여 非對稱軸콘덴서電動機의 振動토오크特性과 그 因果關係의 一部가 명백히 되었고 그 特性을 定量的, 定性的으로 취급할 수 있게 되었음으를

設計上 有益한 資料가 될 것이다.

끝으로 이 硏究는 1976年度 産學協同財團의 學術硏究費로 이루어진 것임을 밝히고, 여러모로 積極的으로 도와주신 金星社釜山工場, 成均館大學校 電氣工學科敎室 여러분 및 原子力硏究所의 黃哲圭君에게 심심한 사의를 드린다.

### 參考文獻

1) W.J. Morrill, "The Revolving Fild Theory of Capacitor Motor," Trans. A.I.E.E., Vol. 48, pp. 614~632, Apr. 1929.
2) J.Kibe, S. Mitto & K. Kamimura, "Torque Characteristics of Single-phase Induction Motor," I.E.E.J., Vol. 91, No.11, pp. 24~33, Feb. 1962.
3) 吳兢烈, "空間高調波磁束을 가진 콘덴서 電動機의 特性解析에 關한 硏究" 大韓電氣學會誌, Vol. 24, No. 1, pp. 29~42, 1975~1.
4) T. Yokozuka, "Effects of the Rotor Slot shape on the Alternating torque characteristics," I.E.E.J., Vol. 95-B, No.11, pp. 33~40, Nov. 1975.
5) A. Ozawa, "Analysis of Single phase Induction Motor by use of Cross-Field Theory," I.E.E.J., Vol. 90, No.6, pp. 147~156, Jun. 1970.
6) A.L. Kimball, Jr. & P.L.Alger, "Single-phase Motor-torque Pulsations," Trans. A.I.E.E., Vol. 43, pp.730~739, Jun. 1924.
7) L.W. Buchanan, "An Equivalent Circuit for a Single-phase Motor Having Space Harmonics in its Magnetic Field," I.E.E.E., Vol. PAS-84, No. 11, pp. 999~1007, Nov. 1965.
8) J.H. Kuhlmann, "Design of Electrical Apparatus," willy, 1950, pp. 358

### 附　錄

振動토오크의 計算式인 式(4)에 關係되는 각 定數는 다음과 같다.

(1) $K_{wan}$

補助卷線의 軸부터 最外側에 있는 코일의 導體數를 $C_{1a}$, $C_{1a}$ 다음에 內側에 있는 코일의 導體數를 $C_{2a}$, 最內側에 있는 코일의 導體數를 $C_{na}$라 하고 $B_{1a}$, $B_{2a}$, …, $B_{na}$를 각 코일 $C_{1a}$, $C_{2a}$, …, $C_{na}$의 位置를 電氣角으로 표시한 것이라 하면.

$$K_{wan}=\frac{C_{1a}\sin nB_{1a}+C_{2a}\sin nB_{2a}+\cdots+C_{na}\sin nB_{na}}{n(C_{1a}+C_{2a}+\cdots+C_{na})} \quad (\text{附 } 1)$$

(2) $K_{wmn}/K_{wm1}$

主卷線의 軸부터 最外側에 있는 코일의 導體數를 $C_1$, $C_1$ 다음에 內側에 있는 코일의 導體數를 $C_2$, 最內側에 있는 코일의 導體數를 $C_n$이라 하고 $B_1, B_2, \cdots, B_n$을 각 코일 $C_1$, $C_2$, …, $C_n$의 位置를 電氣角으로 표시한 것이라 하면

$$\frac{K_{wmn}}{K_{wm1}}=\frac{C_1\sin nB_1+C_2\sin nB_2+\cdots+C_n\sin nB_n}{n(C_1\sin B_1+C_2\sin B_2+\cdots+C_n\sin B_n)} \quad (\text{附 } 2)$$

이다.

(3) $a_n$

$p$를 極數, $C_m=2p(C_1+C_2+\cdots+C_n)$, $C_a=2p(C_{1a}+C_{2a}+\cdots+C_{na})$라 하면

$$a_n=\frac{C_aK_{wan}}{C_mK_{wmn}} \quad (\text{附 } 3)$$

(4) $x_{sk1}$

斜溝角을 $\theta_{sk}$[rad]라 하면

$$x_{sk1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(2x_{m1}\cdot\frac{\theta_{sk}^2}{12}\cdot 0.95\right)=0.03958$$

$$\theta_{sk}^2x_{m1}=k\theta_{sk}^2x_{m1} \quad (\text{附 } 4)$$

여기서 $k=0.03958$

(5) $C_{skn}/C_{sk1}$

$$\frac{C_{skn}}{C_{sk1}}=\frac{\sin\frac{n\theta_{sk}}{2}}{n\sin\frac{\theta_{sk}}{2}} \quad (\text{附 } 5)$$

6) $R_{fn}$, $X_{fn}$, $R_{bn}$, $X_{bn}$

$$R_{fn}=\frac{\left(\frac{K_{wmn}}{K_{wm1}}\cdot\frac{S_{skn}}{C_{sk1}}\right)^2\left\{n^2\frac{r_{21e}}{x_{m1}(ns-n+1)}\right\}^2}{\left\{n^2\frac{r_{21e}}{x_{m1}(ns-n+1)}+\frac{r_{21e}}{x_{m1}(ns-n+1)}\right\}^2+\left\{n^2\frac{x_{221}}{x_{m1}}+\frac{C_{skn}}{C_{sk1}}(kn^2\theta_{sk}^2+1)\right\}^2} \quad (\text{附 } 6)$$

$$X_{fn}=\frac{\left(\frac{K_{wmn}}{K_{wm1}}\right)^2\left(\frac{C_{skn}}{C_{sk1}}\right)\left[\left\{n^2\frac{r_{21e}}{x_{m1}(ns-n+1)}\right\}^2+n^2\left(\frac{x_{221}}{x_{m1}}+\frac{C_{skn}}{C_{sk1}}\right)\right]}{\left\{n^2\frac{r_{21e}}{x_{m1}(ns-n+1)}+\frac{r_{21e}}{x_{m1}(ns-n+1)}\right\}^2+\left\{n^2\frac{x_{221}}{x_{m1}}+\frac{C_{skn}}{C_{sk1}}\right\}^2}$$

$$\frac{k\theta_{sk}^2)\times\left\{n^2\frac{x_{221}}{x_{m1}}+\frac{C_{skn}}{C_{sk1}}(kn^2\theta_{sk}^2+1)\right\}]}{\times(kn^2\theta_{sk}^2+1)\Big\}^2} \quad (附\ 7)$$

$R_{bn}$, $X_{bn}$은 각각 $R_{fn}$, $X_{fn}$의 $(ns-n+1)$ 대신 $(1+n-ns)$를 대입한 것이다.

(7) $R_{mg}$, $X_{mg}$, $R_{ag}$, $X_{ag}$

$$R_{mg}=\frac{(\beta_{mm}\beta_{aa}-\beta_{ma}\beta_{am}-\gamma_{mm}\gamma_{aa}+\gamma_{ma}\gamma_{am})(\beta_{aa}-\beta_{ma})}{(\beta_{aa}-\beta_{ma})^2}$$
$$\frac{+(\beta_{mm}\gamma_{aa}+\beta_{aa}\gamma_{mm}-\beta_{ma}\gamma_{am}-\beta_{am}\gamma_{ma})(\gamma_{aa}-\gamma_{ma})}{+(\gamma_{aa}-\gamma_{ma})^2} \quad (附\ 8)$$

$$X_{mg}=\frac{(\beta_{mm}\gamma_{aa}+\beta_{aa}\gamma_{mm}-\beta_{ma}\gamma_{am}-\beta_{am}\gamma_{ma})(\beta_{aa}-\beta_{ma})}{(\beta_{aa}-\beta_{ma})^2}$$
$$\frac{-(\beta_{mm}\beta_{aa}-\beta_{ma}\beta_{am}-\gamma_{mm}\gamma_{aa}+\gamma_{ma}\gamma_{am})(\gamma_{aa}-\gamma_{ma})}{+(\gamma_{aa}-\gamma_{ma})^2} \quad (附\ 9)$$

$$R_{ag}=\frac{(\beta_{mm}\beta_{aa}-\beta_{ma}\beta_{am}-\gamma_{mm}\gamma_{aa}+\gamma_{ma}\gamma_{am})(\beta_{mm}-\beta_{am})}{(\beta_{mm}-\beta_{am})^2}$$
$$\frac{+(\beta_{mm}\gamma_{aa}+\beta_{aa}\gamma_{mm}-\beta_{ma}\gamma_{am}-\beta_{am}\gamma_{ma})(\gamma_{mm}-\gamma_{am})}{+(\gamma_{mm}-\gamma_{am})^2} \quad (附10)$$

$$X_{ag}=\frac{(\beta_{mm}\gamma_{aa}+\beta_{aa}\gamma_{mm}-\beta_{ma}\gamma_{am}-\beta_{am}\gamma_{ma})(\beta_{mm}-\beta_{am})}{(\beta_{mm}-\beta_{am})^2}$$
$$\frac{-(\beta_{mm}\beta_{aa}-\beta_{ma}\beta_{am}-\gamma_{mm}\gamma_{aa}+\gamma_{ma}\gamma_{am})(\gamma_{mm}-\gamma_{am})}{+(\gamma_{mm}-\gamma_{am})^2} \quad (附11)$$

여기서

$$\beta_{mm}=\frac{r_m}{x_{m1}}+\sum(R_{fn}+R_{bn}) \quad (附12)$$

$$\gamma_{mm}=\frac{x_{lm}}{x_{m1}}+\sum(X_{fn}+X_{bn}) \quad (附13)$$

$$\beta_{ma}=\sum a_n\{(R_{fn}+R_{bn})\cos n\alpha+(X_{fn}-X_{bn})\sin n\alpha\} \quad (附14)$$

$$\gamma_{ma}=\frac{1}{a_1}\frac{x_{la}}{x_{ma}}\cos\alpha+\sum a_n\{(R_{bn}-R_{fn})\sin n\alpha$$
$$+(X_{fn}+X_{bn})\cos n\alpha\} \quad (附15)$$

$$\beta_{aa}=\frac{r_a}{x_{m1}}+\frac{r_c}{x_{m1}}+\sum a_n^2(R_{fn}+R_{bn}) \quad (附16)$$

$$\gamma_{aa}=\frac{x_{lm}}{x_{m1}}-\frac{x_c}{x_{m1}}+\sum a_n^2(X_{fn}+X_{bn}) \quad (附17)$$

$$\beta_{am}=\sum a_n\{(R_{fn}+R_{bn})\cos n\alpha-(X_{fn}-X_{bn})\sin n\alpha\} \quad (附18)$$

$$\gamma_{am}=a_1\frac{x_{lm}}{x_{m1}}\cos\alpha+\sum a_n\{(R_{fn}-R_{bn})\sin n\alpha$$
$$+(X_{fn}+X_{bn})\cos n\alpha\} \quad (附19)$$

이다.

(8) $I_{mg}$, $I_{ag}$, $\theta_{ma}$

$$I_{mg}=\frac{V}{\sqrt{R_{mg}^2+X_{mg}^2}} \quad (附20)$$

$$I_{ag}=\frac{V}{\sqrt{R_{ag}^2+X_{ag}^2}} \quad (附21)$$

$$\theta_{m5}=-\tan^{-1}\frac{X_{ag}}{R_{ag}}-\left(-\tan^{-1}\frac{X_{mg}}{R_{mg}}\right) \quad (附22)$$