

<講 座>

有限要素法の 基本理論과 應用(Ⅲ)

—非線型問題에 登場하는 増分剛性 매트릭스—

金 恒 旭

비선형문제란 계의 통제방정식이 비선형 미분방정식으로 나타나는 문제를 말한다. 때로는 적당한 새 인자를 도입하여 외형상으로는 선형 미방인것 처럼 표현될 때도 있다. 그러나 새로 도입된 인자의 내용을 살펴보면 그 통제 방정식이 비선형임을 쉽게 알수 있다. 비선형 문제는 그 유도 과정 어딘가에서 물리량사이의 비선형 관계식이 등장하는것이다. 모—든 공학문제는 엄격히 말해서 비선형이라고 할수 있다. 비선형 통제방정식의 일반적 해법은 아직 개발되어 있지않다. 극소수의 특정 문제에 대해서만 그 해법이 연구 개발되어 있을 따름이다. 그러기에 공학문제를 다루는데 있어서는 현상의 특정영역에서 냉혹한 기정을 세우면서 통제 방정식을 선형화 하고 이의 해로서 얻어지는 일차 근사 값으로 참아 보려고 한다. 실제에 있어서 많은 문제들이 선형적으로 다루어지고 있으며 그 오차가 참을수 있는 범위에 머무르고 있지만 이들은 모두 수학의 힘을 쉽게 빌리기 위해서 채택되는 근사해법의 한방면에 불과함을 강조한다. 비선형 문제를 선형화 할때 두 가지 결과가 내두 된다. 하나는 수학적인 단진자의 경우와 같이 현상이 가정을 벗어 날때 오차가 증가해서 일차적인 근사해가 급기야는 쓸모 없는것이 되고 말지만 그러나 가정을 얼마나 벗어 나느냐에 따라서 오차가 허용한도내에 있는나 없느냐 하는 것이지 해를 전연 주지 않는것은 아니다. 다른 하나는 탄성안전문제와 같이 선형화 해 놓으면 좌굴한 다음의 변위를 전연 주지 않는것 같은 경우이다. 따라서 이와 같은 경우는 선형화하려는 노력을 포기한다.

이번 해설에서는 비선형 문제로서 탄성안전 문제를 예로 다루며 이에 등장하하는 증분강성매트릭스(Incremental Stiffness Matrix)를 설명코져 한다.

1. 緒 論

고체역학 분야의 통제 방정식은 대부분 힘의 평형방

정식이다. 고체역학의 근본원리는 에너지 원리이다. 여타가지 형태로 나타나는 이 에너지 원리는 힘과 변위가 자변수로 등장한다. 여기에서 변위를 고정할때 정역학의 평형식이 주어진다. 변위를 고정하지 않으면 동역학의 식들이 주어지며 힘을 지정하면 Kinematics가 되고 변위를 지정하면 Kinetics가 된다. 각 부분에 있어서의 힘이나 변위를 구할때는 계의 전 에너지 π 에 대해서 $\delta\pi=0$ 를 적용함으로써 통제방정식이 주어지지만 구조물의 탄성안전문제를 다룰때는 $\delta^2\pi=0$ 로서만이 통제방정식이 주어진다. 본 편에서는 기둥의 탄성안전문제를 다루면서 여기에 등장하는 증분강성매트릭스를 설명하고 그때 그때에 비선형 문제의 일반적인 면에 언급코져 한다. 기둥의 탄성안전문제를 다루는 유한요소법의 정도(正道)는 계의 전 에너지 π 를 형성한다음 $\delta^2\pi=0$ 를 적용함으로써 통제방정식을 구하는 것이다. 자변수를 변위 벡터로 하는 매트릭스 변위법(Matrix Displacement Method)에서는 변형도를 변위의 교차함수로 줄때 π 가 변위벡터의 4차식으로 나타나며 이것을 두번 미분하는 경위가 꼭 번거로우며 통제등정식의 유도 과정이 뚜렷한 물리학적 개념을 제시 하지 않는다. 판(板)과 같은 2차원 영역의 구조물에 있어서는 물리학적 개념이 명확한 유도과정은 어차피 찾을수가 없으니 유한요소법의 정도(正道)를 따라야 하지만 기둥과 같이 함수 영역이 1차원인 경우는 좀 간단한 유도과정이 마련되어 있다. 본 회에는 위의 간단한 과정을 따라 설명을 진행하겠으며 정도(正道)를 다루는 일은 다음기회로 미룬다.

2. 기둥 有限要素

기둥은 보와 달라서 축 방향의 압축력을 받고 있어야 한다. 보와 같이 횡하중(橫荷重)도 같이 받는 경우는 보—기둥(Beam-Column)이라고 하며 기둥과 구별 하지만 임계압축력을 구하는데 있어서는 기둥이나 보—기둥 이나 간에 다름바 없다. 그림 (1)의 기둥 유한요소

* 正會員, 韓國航空大學

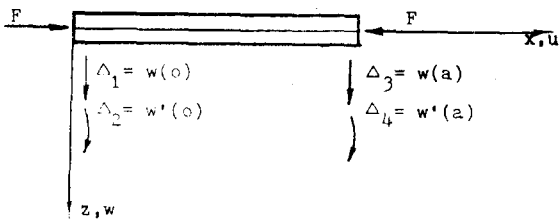


그림 1. 기동유한요소

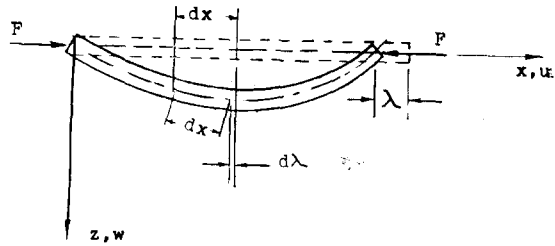


그림 2. 축방향변위

는 엄밀히 말하면 보-기동 유한요소이며 여기에서 절점의 횡하중을 영으로 놓으면 기동이 되는것이다.

기하학적 모양과 절점의 자유도는 보 유한요소의 경우와 같다. 다만 축 방향의 압축력 F 가 첨가되어 있을 따름이다. 정도를 따르려면 각 절점에 x 축 방향의 자유도를 하나씩 첨가한다. 여기에서와 같이 기동 유한요소를 정하는것은 다음과 같은 논리에 의한다. 즉 기동은 축압력 F 로 인해서 단순압축되다가 어느 한도 까지 단순 압축된 다음에는 더 이상 축 방향으로 압축 되지 못하고 힘 F 를 증가 함에 따라서 좌굴을 일으키는데 단순 압축이 벗은 때를 에너지의 기점으로 잡는다는 것이다. 따라서 재료에 저축되는 탄성 에너지는 단순압축에 의한것을 고려하지 않는다.

내부 변위함수와 변형도-변위관계식도 보 유한요소의 경우와 같다. 본 해설 (I)에서 본바와 같이 변위함수 $w(x)$ 는 다음과 같이 정한다.

$$w(x) = [\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = [\Delta] \{X\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\xi = \frac{x}{a}$$

위의 $\{X\}$ 는 낮은 헤미시안 1차 다항식 (First Order Hermitian Polynomials)이며 이의 유도과정과 성질은 본해설 (I)에서 볼수 있다.

식 (1)에서 $w(x)$ 의 시간에 대한 미분계수 $\dot{w}(x)$, x 에 대한 1차 미분계수 $w_x(x)$ 및 2차 미분계수 $w_{xx}(x)$ 는 각각 다음과 같이 됨을 알수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{w}(x) &= [\dot{\Delta}] \{X\} \\ w_x(x) &= [\Delta] \{X'\} \\ w_{xx}(x) &= [\Delta] \{X''\} \end{aligned} \quad (2)$$

변형도-변위관계식도 본 해설 (I)의 식 (7)과 같이 된다. 이것도 역시 축방향으로의 압축이 벗은 때를 기점으로 하며 따라서 휨 변형도만을 고려하는 것이다.

$$\epsilon = -Zw_{xx}(x) \quad (3)$$

3. 매트릭스 統制方程式

통제방정식의 유도에 있어서도 운동에너지 T 와 탄성 에너지 U 에 관한 부분은 본해설 (I)의 경우와 같다. 그러나 외력에 의한 포텐셜에너지의 부분은 달라진다. 즉 절점 하중에 의한 포텐셜에너지외에 축하중 F 에 의한 포텐셜 에너지가 첨가 된다.

3-1 축하중에 의한 포텐셜에너지

기동 유한요소가 축 방향의 압축이 정지되고 회기 시작 하면 이로인하여 힘 F 의 두착력점이 힘의 방향으로 접근한다. 이 접근거리는 다음과 같이 구해진다. 그림 (2)에서 보는바와 같이 유한요소의 미소길이 dx 가 휨으로서 양단의 x 축방향 접근거리 $d\lambda$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} d\lambda &= dx - dx \cos\theta = dx(1 - \cos\theta) \\ &= dx \left[1 - \left(-\frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right) \right] \\ &\approx \frac{\theta^2}{2} dx \end{aligned}$$

$\theta = \frac{dw(x)}{dx} = w_x(x)$ 로 놓고 $d\lambda$ 를 유한요소의 전길이 a 에 관해서 적분하면 힘 F 의 착력점은 다음식으로 표시되는 인거리만큼 접근함을 알수 있다. 즉

$$\lambda = \int_{x=0}^{x=a} d\lambda = \int_0^a \frac{1}{2} w_x^2 dx$$

따라서 힘 F 에 의한 포텐셜 에너지 V_f 는 다음과 같이 된다.

$$V_f = -\frac{F}{2} \int_0^a w_x^2 dx \quad (4)$$

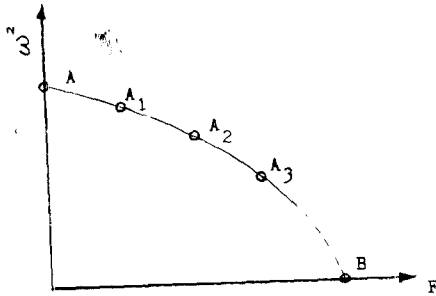


그림 3. 축압력과 진동속도

식 (4)의 $\frac{1}{2}w_s^2$ 은 유한요소가 힘을 받을 때 중립면에 나타나는 변형도의 고차항임을 알려준다. 유한요소법의 정도를 다타서 통제방정식을 유도할 때는 식 (4)의 V_f 에 해당하는 탄성에너지항이 변위벡터 $\{d\}$ 의 3차와 4차항으로 나타난다. 여기에서는 축압력 F 를 자유도와 관련시키지 않았기 때문에 다음에서 보는 바와 같이 V_f 가 $\{d\}$ 의 2차항으로 나타낼 수 있다.

식 (4)에 식 (1)과 (2)를 대입하고 다음과 같이 정돈한다.

$$\begin{aligned}
 V_f &= -\frac{F}{2} \int w_s^2 dx = -\frac{F}{2} \int [d][X']^2 dx \\
 &= -\frac{F}{2} \int [d][B]\{d\} dx \\
 \text{즉 } V_f &= -\frac{F}{2} [d][N]\{d\} \\
 [N] &= \int_0^a [B] dx \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$[B] = \{X'\} [X'] = \begin{Bmatrix} X'_1 X'_1 & X'_1 X'_2 & X'_1 X'_3 & X'_1 Y'_1 \\ X'_2 X'_1 & X'_2 X'_2 & X'_2 X'_3 & X'_2 X'_4 \\ X'_3 X'_1 & X'_3 X'_2 & X'_3 X'_3 & X'_3 X'_4 \\ X'_4 X'_1 & X'_4 X'_2 & X'_4 X'_3 & X'_4 X'_4 \end{Bmatrix}$$

따라서 $\frac{\delta V_f}{\delta \{d\}} = -F[N]\{d\}$ (6)

식 (6)을 본해설 (I)의 식 (12)에 추가함으로써 계의 통제 방정식이 구하여 진다. 즉

$$(-m\omega^2[M] + EI[K] - F[N])\{d\} = \{P\} \quad (7)$$

여기에서 m 은 단위길이당의 질량, ω 는 횡진동속도, EI 는 휨에 대한 강성, F 는 축방향의 압축력, $\{P\}$ 는 절점의 자유도에 대응하는 외력이다. 질량매트릭스 $[M]$ 과 강성 매트릭스 $[K]$ 는 본해설 (I)의 식 (15)에 주어져 있다. 매트릭스 $[N]$ 은 증분강성매트릭스(Incremental Stiffness Matrix)이라 불리우며 일반경우는 F 가 $[N]$

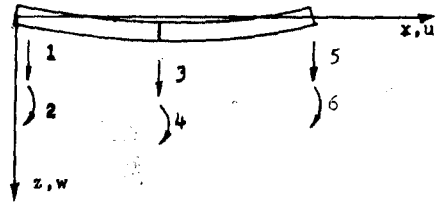


그림 4. 2개 유한요소 모형

에 포함되며 따라서 매트릭스 $[N]$ 은 변위벡터 $\{d\}$ 의 함수가 된다. 매트릭스 $[N]$ 은 변형도-변위의 고차항을 취함으로서 등장하는 것이다. 식 (5)의 적분을 수행하여 양성화 하고 본 해설 (I)의 식 (15)에 주어진 매트릭스 $[K]$ 와 함께 다음에 표시했다.

$$[N] = \frac{1}{30} \begin{Bmatrix} 36a^{-1} & 3 & 36a^{-1} & 3 \\ 3 & 4a & -3 & -a \\ 36a^{-1} & -3 & 6a^{-1} & -3 \\ 3 & -a & -3 & 4a \end{Bmatrix}$$

$$[K] = \begin{Bmatrix} 12a^{-3} & 6a^{-2} & -12a^{-3} & 6a^{-2} \\ 6a^{-2} & 4a^{-1} & -6a^{-2} & 2a^{-1} \\ -12a^{-3} & -6a^{-2} & 12a^{-3} & -6a^{-2} \\ 6a^{-2} & 2a^{-1} & -6a^{-2} & 4a^{-1} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

4. 統制方程式의 應用

4-1. 축압력하의 자유진동

식 (7)에서 $\{p\} = \{0\}$ 라 놓으면 축압력 F 를 받을 때의 횡적 자유진동을 다루는 통제방정식이 된다.

$$(-m\omega^2[M] + EI[K] - F[N])\{d\} = \{0\} \quad (9)$$

$F=0$ 인 경우에 대하여는 본해설 (I)에서 본 바와 같이 보의 횡진동에 있어서의 고유진동속도 ω 와 진동모양 $\{d\}$ 를 구하는 식이 된다. F 가 영에서 부터 점점 증가하면 식 (9)의 제 3항은 제 2항의 값을 줄이는 결과를 초래한다. 즉 증분강성매트릭스는 휨에 대한 저항을 감소시키는 결과를 가져오며 따라서 고유진동수 ω 는 감소한다. 축압력 F 가 어느 값에 도달하면 제 2항과 제 3항은 완전히 상쇠되며 ω 는 영이 된다. 식 (9)의 F 와 이에 따르는 ω^2 의 관계식을 그리면 어떤 구조물이든간에 그림 (3)과 같은 개형을 그린다.

그림 (3)의 점 A는 축하중이 없을 때의 고유진동 속도를 표시한다. 축압력 F 를 점점 증가하면서 식 (9)에 의해 해당되는 ω^2 의 값을 구하므로써 점 A_1, A_2, A_3 , 등을 구한다음 곡선 $A \sim A_3$ 를 적어 연장해서 횡축과의 교점 B를 구한다. 점 B는 임계 압축력 F_{cr} 를 지정하는 것이며 이것은 흔히 쓰이는 방법중의 하나이다. 이것은

축압력 F 가 F_c 에 이를때 기둥은 좌굴을 일으키고 더 이상 진동을 하지 않는다는것을 의미 한다.

4-2. 임계압축력을 구하는 문제

식 (7)의 첫째 항인 관성력을 제거하고 다음과 같은식을 얻으며 이식은 탄성안정문제를 아이겐벨류 (Eigen Value) 문제의 표준형으로 이끌어 갈수있게 하여준다.

$$(EI[K]-F[N]) \{D\} = \{P\} \quad (10)$$

식 (10)에서 절점의 자유도에 대응하는 하중벡터 $\{P\}$ 를 영으로 놓으면 기둥의 탄성안정문제가 되며 다음과 같이 Eigen Value 문제의 표준형으로 유도된다.

$$(EI[K]-F[N]) \{D\} = \{0\}$$

$$([N]^{-1}[K] - \frac{F}{EI}[I]) \{D\} = \{0\}$$

$$\begin{aligned} \text{즉 } ([D] - \lambda[I]) \{D\} &= \{0\} \\ [D] &\equiv [N]^{-1}[K] \\ \lambda &\equiv \frac{F}{EI} \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)로서 임계 압축력 F_c 를 구하는 방법은 본 해설 (I)의 예제의 경우와 같다.

식 (10)의 $\{P\}$ 가 소멸되지 않을때에는 보-기둥의 탄성안정 문제가 된다. 식 (10)의 미소변화량 (Variation)을 취하면 다음과 같이 된다.

$$(EI[K]-F[N]) \delta\{D\} = \delta\{P\} \quad (12)$$

실사 절점의 자유도에 대응되는 하중 벡터가 어떤 일정 값을 갖는다 해도 위식에서 $\delta\{P\} = \{0\}$ 로 놓을 수 있기 때문에 식 (11)의 경우와 꼭 같이되고 따라서 임계압축력 F_c 를 구하는것도 똑 같다.

4-3. 유한요소법의 정도(正道)를 다룰때의 경우

유한요소법의 정도를 다룰때는 축 압축력을 절점의 자유도와 무관한 인자로 등장시키지 않고 각 절점에 축 방향의 자유도를 하나씩 첨가 한다. 이때는 식 (7)의 제 3항에 있는 $F[N]$ 는 F 가 매트릭스의 밖에 나오지 못하고 $[N]$ 안에 음성적으로 포함됨을 이미 언급하였다. 따라서 $\delta\pi=0$ 로서 유도 되고 식 (7)에 해당되는 힘의평형식은 관성력을 무시할때 다음과 같이 된다.

$$(EI[K]+[N(D)]) \{D\} = \{P\} \quad (13)$$

이 식의 매트릭스 $[N(D)]$ 는 식 (8)과 같은 상수가 아니고 자유도벡터 $\{D\}$ 의 함수 이다. 식 (13)은 큰 변위 이론 (Large Deflection Theory)에서 변위를 구하는 통제 방정식이기도 하다. 이 식에서 보면 변형에 대한 저항 즉 강성이 좌변 괄호안의 첫항으로 표시되는 상수 매트릭스와 둘째항으로 표시되는 $\{D\}$ 의 함수 매트릭스로

구성됨을 알수 있다. 다시 말하면 증분강성매트릭스는 변위에 따라 그 값이 달라진다. 식 (13)으로서 $\{D\}$ 를 구할때는 Linear Incremental Approximation이란 방법에 의한다. 이 방법은 의력 $\{P\}$ 와 변위 $\{D\}$ 의 비선형 관계를 직선분의 연속으로 대체 하는 방법이다. 처음에 $\{D\} = \{0\}$ 로 놓고 $\{N\}$ 의 값을 구한다음 주어진 하중 $\{P\}$ 에 해당하는 $\{D\}_1$ 을 구한다. 다음에 $\{D\}_1$ 으로서 이에 해당하는 $\{N\}$ 를 구하고 하중의 증가 $\delta\{P\}$ 를 줌으로서 이에 대응되는 변위의 증가 $\delta\{D\}$ 를 구한다. $\{D\}_2 = \{D\}_1 + \delta\{D\}$ 를 대입하여 다시 $\{N\}$ 을 구한다음 또 $\delta\{P\}$ 를 주고 $\delta\{D\}$ 를 구한다. 일반적으로 $\{D\}_{i+1} = \{D\}_i + \delta\{D\}_i$ 로 하면서 위의 방법을 반복하여 비선형적인 $\{P\}$ 와 $\{D\}$ 의 관계를 구한다. 이 방법으로 추적 하면 탄성안정의 임계값은 $\{P\}$ 와 $\{D\}$ 의 관계 곡선이 급격히 그 방향을 바꾸는 점 즉 Bifurcation point로서 주어진다. 여기에서는 더 깊은 언급을 피하려 한다. 좌우간 비선형문제를 다루는데 있어서는 그 통제방정식의 유도와 응용에 있어서 텐서 (Tensor) 계산이 많은 복잡성을 동반한다.

식 (13)의 미소변화량을 취하는것은 $\delta\pi=0$ 에 해당하는 행위이다. 식에서 보는 바와 같이 좌변에 있는 $\{D\}$ 의 계수매트릭스가 상수가 아니고 $\{D\}$ 의 함수 이기 때문에 $\delta\pi=0$ 를 적용하는 과정이 식 (12)와 같이 간단 명료하지 못하다. 그러기에 웬만한 경우는 식 (7)과 같이 축압축력 F 를 도입해서 Eigen Value 문제의 표준형으로 처리한다.

5. 數值計算例

본장에서는 실제 문제를 풀어 보인다. 예제로서는 기둥의 임계 압축력을 구하는 문제를 다룬다. 길의 L , 재료의 탄성계수 E , 단면의 관성 모-멘트 I 인 기둥을 두 개의 유한요소 결합체로 모형화한다. 절점의 자유도는 그림 (4)와 같이 번호를 붙였다.

유한요소 하나에 대한 통제방정식은 식 (10)에서 $\{P\} = \{0\}$ 로 놓아서 다음과 같이 된다.

$$(EI[K]-F[N]) \{D\} = \{0\} \quad (14)$$

위의 식은 4×4 인 매트릭스식이며 두개의 유한요소가 결합해서 구성되는 기둥에 대해서는 식 (14)를 적어 중첩하여야 하며 계의 통제방정식은 6×6 이 된다. Eigen Value 문제의 표준형을 다루는 대표적인 방법은 반복법 (power method)이며 이것은 고성능 전자계산기의 힘을 빌려서 쉽게 처리 된다는 것을 본 해설 (I)에서 설명

한바 있다. 매트릭스 통제방정식에 경계조건을 적용하여 분할함으로써 얻는 매트릭스식이 $n \times n$ 이면 n 차 방정식을 풀어야 Eigen Value λ 를 구할수 있기 때문에 지면상의계산으로 처리 할수 있는것은 2×2 매트릭스식이 고작이다.

5-1. 양단이 단순지지된 기둥

양단이 단순지지 된 기둥에 있어서는 그림 (4)에서 보는 바와 같이 $\Delta_1=0, \Delta_6=0$ 이다. 6×6 인 매트릭스 식을 분할하여 Δ_1, Δ_6 를 제거해도 남는 식은 4×4 이다. 이식을 갖고 지면상에서 Eigen Value λ 를 구하려면 4차 방정식을 풀어야 한다. 따라서 이 문제를 연필로 쉽게 풀기 위해서는 다른 방법이 강구 되어야 한다. 양단 조건이 같을 때는 변형이 중간점에 대하여 대칭이라는 조건을 이용하면서 원편 유한요소 하나로서 이 문제를 다룬다. 이때는 통제방정식이 식 (14)와 같이 되고 적용될수 있는 경계조건은 다음과 같다. 즉

$$\begin{aligned} \Delta_1 &:= w_1 = w(0) = 0 \\ \Delta_4 &:= \theta_2 = w_x(a) = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

식 (15)를 에 (14)적 용하고 식 (14)를 분할하여 Δ_1, Δ_4 를 제거 하면 다음의 식이 얻어진다. 즉

$$\left(EI \begin{bmatrix} K_{22} & K_{32} \\ K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} - F \begin{bmatrix} n_{22} & n_{32} \\ n_{23} & n_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{16}$$

식 (16)에 식 (8)의 해당 K_{ij} 와 n_{ij} 를 대입하면 다음식이 얻어진다.

$$\left(EI \begin{bmatrix} 4a^{-1} & -6a^{-2} \\ -6a^{-2} & 12a^{-3} \end{bmatrix} - \frac{F}{30} \begin{bmatrix} 4a & -3 \\ -3 & 36a^{-1} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

윗식을 식 (11)의 꼴로 고치면 다음과 같이 된다. 즉

$$\left(\begin{bmatrix} 21 & -30a^{-1} \\ -2a & 5 \end{bmatrix} - \lambda [I] \right) \begin{Bmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{17}$$

여기에서 λ 는
$$\lambda = \frac{3a^2 F}{4EI} = -\frac{3L^2 F}{16EI} \tag{18}$$

식 (17)에서 $\begin{Bmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix}$ 의 계수 매트릭스의 행렬식을 영으로

놓고 λ 를 구하면 다음의 값을얻는다 즉

$$\lambda_1 = 24.136$$

$$\lambda_2 = 1.864$$

F_{cr} 을 구하기 위하여 적은 쪽의 Eigen Value λ_2 를 취하고 식 (18)에 의하면 F_{cr} 는 다음과 같이 얻는다.

$$F_{cr} = \frac{16\lambda_2 \cdot EI}{L^2} = 9.94 \frac{EI}{L^2} \tag{19}$$

임계압축력 F_{cr} 의 정확한 값 $\pi^2 EI/L^2$ 과 비교 해서 오차가 0.7%정도임을 알수 있다.

5-2. 한끝이 고정되고 다른 끝이 단순지지된 기둥

이때는 식 (14)를 중첩해서 얻는 6×6 매트릭스식에 그림 (4)에서 쉽게 알수 있는 경계조건 $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_6 = 0$ 를 적용한 다음 매트릭스를 분할해서 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_6$ 를 제거함으로써 다음식을 얻는다. 식 (14)를 중첩하는 방법은 본해설 (Ⅱ)에서 보여준 식 (11)의 형성과정을 참조하면 좋겠다.

$$\begin{aligned} & \left(EI \begin{bmatrix} K_{33}+K_{11} & K_{34}+K_{12} & K_{14} \\ K_{43}+K_{21} & K_{44}+K_{22} & K_{24} \\ K_{41} & K_{42} & K_{44} \end{bmatrix} \right. \\ & \left. - F \begin{bmatrix} n_{33}+n_{11} & n_{34}+n_{12} & n_{14} \\ n_{43}+n_{21} & n_{44}+n_{22} & n_{24} \\ n_{41} & n_{42} & n_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

식 (20)의 K_{ij} 및 n_{ij} 는 식 (8)에 주어져 있다. 식 (8)의 값들을 대입하고 Gauss-Jordan 소거 방법으로 매트릭스 $[K]$ 를 뒤집은 다음 식 (11)의 꼴로 유도하고 Power method로서 λ_1 을 구함으로써 F_{cr} 을 구하는 일은 독자 자신이 처리해 보기 바란다. 위의 과정에서 $[N]$ 를 뒤집지 않고 $[K]$ 를 뒤집는 것은 Power method로 처음에 구해지는 λ_1 이 제일 큰 Eigen Value이며 이것이 첫째임겨치 F_{cr} 을 줄수 있도록 하기 위해서 이다.