

## PRODUCCION DE CALOR EN UN CILINDRO CIRCULAR SEMI-INFINITO

Por Mariá A. Villalonga de Luccioni

### 1. Introducción

Se considera el problema de conducción de calor en un cilindro circular semi-infinito, en el que se está generando calor mediante una fuente lineal colocada en el eje del cilindro y con radiación de calor al medio que lo rodea. La fuente se describe usando la "función" delta de Dirac y la solución se obtiene haciendo uso de la transformada seno de Fourier y de la transformada finita de Hankel.

El resultado obtenido ha sido interpretado numéricamente usando una computadora IBM-1620. Se dan además gráficos de la distribución de la temperatura en el cilindro.

### 2. Transformadas Integrales

Se define la transformada finita de Hankel de una función  $\theta(r, z, t)$ , [3], como:

$$\bar{\theta}(\eta_i, z, t) = \int_0^a r \theta(r, z, t) J_0(r\eta_i) dr \quad (1)$$

donde  $\eta_i$  es una raíz de la ecuación trascendente

$$hJ_0(a\eta_i) = \eta_i J_1(a\eta_i) \quad (2)$$

y  $J_0, J_1$  son las funciones de Bessel de primera especie y órdenes cero y uno respectivamente.

Si  $\theta$  satisface las condiciones de Dirichlet en un intervalo cerrado  $(0, a)$  y si su transformada finita de Hankel está definida por (1), entonces para cada punto de ese intervalo en el que  $\theta(r, z, t)$  es continua

$$\theta(r, z, t) = \frac{2}{a^2} \sum_i \frac{\eta_i^2 \theta(\eta_i, z, t)}{h^2 + \eta_i^2} \frac{J_0(r\eta_i)}{\{J_0(a\eta_i)\}^2} \quad (3)$$

tomándose la suma sobre todas las raíces positivas de (2).

Se considera la transformada seno de Fourier de una función  $\theta(r, z, t)$  como

$$\theta_S(r, \xi, t) = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \theta(r, z, t) \text{sen}(z\xi) dz \quad (4)$$

y por lo tanto

$$\theta(r, z, t) = \sqrt{2/\pi} \int_0^{\infty} \theta_s(r, \xi, t) \text{sen}(z\xi) d\xi \quad (5)$$

### 3. Solución del problema

Si se supone que el calor generado por la fuente no depende de la temperatura del punto, la ecuación para la conducción del calor en el medio sólido cilíndrico es

$$\frac{1}{\kappa} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \phi(r, z, t) \quad (6)$$

en donde  $\theta$  es la función temperatura.

La solución dada en [2] a la ecuación (6) con las condiciones iniciales y de borde:

$$\theta(r, z, 0) = f(r, z), \quad t=0 \quad (7)$$

$$\theta(r, 0, t) = m(r, t); \quad z=0, \quad 0 < r < a, \quad t > 0 \quad (8)$$

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial r} + h\theta \right]_{r=a} = hn(t)p(z); \quad z > 0, \quad r=a, \quad t > 0, \quad h > 0 \quad (9)$$

es la siguiente

$$\begin{aligned} \theta(r, z, t) = \sqrt{2/\pi} \frac{2}{a^2} \sum_i \frac{\eta_i^2}{h^2 + \eta_i^2} \frac{J_0(r\eta_i)}{\{J_0(a\eta_i)\}^2} \int_0^{\infty} \{ \bar{f}_s(\eta_i, \xi) e^{-\kappa(\xi^2 + \eta_i^2)t} \\ + G(\eta_i, \xi, t) \} \text{sen}(z\xi) d\xi \end{aligned} \quad (10)$$

en donde  $\eta_i$  es raíz de la ecuación (2), y

$$\begin{aligned} G(\eta_i, \xi, t) = \kappa \int_0^t \{ aJ_0(a\eta_i)hn(\tau)p_s(\xi) + \sqrt{2/\pi} \xi \bar{m}(\eta_i, \tau) \\ + \bar{\phi}_s(\eta_i, \xi, \tau) \} e^{-\kappa(\xi^2 + \eta_i^2)(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (11)$$

La solución (10) fue obtenida en el trabajo mencionado [2], recurriendo a la transformada seno de Fourier y a la transformada finita de Hankel, sucesivamente.

Consideremos ahora que

$$\phi(r, z, t) = \frac{1}{K} F(r) V(z) M(t) \quad (12)$$

la transformada de Hankel, de la transformada seno de esta función es

$$\bar{\phi}_s(\eta_i, \xi, t) = \frac{1}{K} M(t) V_s(\xi) \bar{F}(\eta_i) \quad (13)$$

Si la fuente de calor coincide con el eje del cilindro (fuente lineal semi infinita) y se la describe con  $F(r) = \delta(r)/2\pi r$ ; donde  $\delta(r)$  [4] denota "función" delta de

Dirac [3, p. 204] y  $\bar{F}(\eta_i) = 1/2\pi$ . Si además

$$M(t) = C_2, \quad \text{constante} \quad (14)$$

$$V(z) = ze^{-\alpha z^2} \quad (15)$$

(13) puede escribirse

$$\phi_s(\eta_i, \xi, t) = \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \frac{C_2}{K} \alpha^{-3/2} \xi e^{-\frac{1}{4\alpha}\xi^2} \quad (16)$$

Considerando además

$$n(t) = C_0, \quad \text{constante} \quad (17)$$

$$p(z) = z e^{-\alpha z^2} \quad (18)$$

$$m(r, t) = C_1, \quad \text{constante} \quad (19)$$

e integrando (11), se tiene

$$G(\eta_i, \xi, t) = \left[ \frac{\sqrt{2}}{4} \alpha^{-3/2} \left( aJ_0(\eta_i a) hC_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{C_2}{K} \right) \xi e^{-\frac{1}{4\alpha}\xi^2} + \sqrt{2/\pi} \frac{aC_1}{\eta_i} J_1(a\eta_i) \xi \right] \left[ \frac{1}{\xi^2 + \eta_i^2} - \frac{e^{-\kappa(\xi^2 + \eta_i^2)t}}{\xi^2 + \eta_i^2} \right] \quad (20)$$

Si se hace

$$f(r, z) = C_3, \quad \text{constante} \quad (21)$$

$$f_s(r, \xi) = \sqrt{2/\pi} C_3 \frac{1}{\xi} \quad (22)$$

$$\bar{f}_s(\eta_i, \xi) = \sqrt{2/\pi} \frac{aC_3}{\eta_i} J_0(a\eta_i) \frac{1}{\xi} \quad (23)$$

Haciendo uso de (23) y de los resultados dados por las tablas de transformadas [1], la función temperatura (10) puede escribirse finalmente

$$\theta(r, z, t) = \sqrt{2/\pi} \sum_i \frac{J_0(\eta_i r)}{\{J_0(\eta_i a)\}^2} \frac{\eta_i^2}{h^2 + \eta_i^2} (A + B)$$

en donde

$$A = \frac{\sqrt{2}}{16} \pi \alpha^{-3/2} \left[ aJ_0(\eta_i a) hC_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{C_2}{K} \right] e^{-\frac{1}{4\alpha}\eta_i^2} \\ \times [E_i(-z, t) - E_i(z, t) + E_i(z, 0) - E_i(-z, 0)] \\ + \sqrt{\pi/2} \frac{aC_1}{\eta_i} J_1(a\eta_i) \left\{ e^{-\eta_i z} - \frac{1}{2} [E_i^*(z, t) - E_i^*(-z, t)] \right\}$$

$$B = \sqrt{\pi/2} \frac{aC_3}{\eta_i} J_0(a\eta_i) e^{-\kappa\eta_i^2 t} \operatorname{Erf} \left[ \frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \right]$$

con

$$E_i(z, t) = e^{-\eta_i z} \operatorname{Erf} c \left[ \sqrt{\kappa t + 1/4\alpha} \left( \eta_i - \frac{z}{2(\kappa t + 1/4\alpha)} \right) \right]$$

$$E_i^*(z, t) = e^{-\eta_i z} \operatorname{Erf} c \left[ \sqrt{\kappa t} \left( \eta_i - \frac{z}{2\kappa t} \right) \right]$$

#### 4. Interpretación Numérica

Para el cálculo numérico, se considera un cilindro circular de acero ( $K=0,12$  y  $\kappa=0,12$ ) de radio igual a la unidad ( $a=1$ ) y se supone además que: la superficie  $z=0$  está mantenida a temperatura cero ( $m(r, t)=C_1, C_1=0$ ): la temperatura inicial del curepo es cero ( $f(r, z)=C_3, C_3=0$ ): en la expresión que da la radiación al medio  $n(t)=C_0, C_0=20$  y  $h=0,1$ : en la fuente la constante  $C_2=10000$  y finalmente  $\alpha=25$ .

Las tablas que se dan a continuación y que muestran la distribución de la temperatura en varios puntos del cilindro para diferentes tiempos, fueron obtenidas en el Centro de Cómputos de la Universidad Nacional de Tucumán, con un equipo IBM 1620.

Puede observarse que ya para valores de  $z=4,5$  por ejemplo, las temperaturas calculadas son cero para tiempos entre 0 y 9 segundos y muy bajas entre 10 y 120 segundos; esto es debido a que tanto la producción de calor por la fuente como la temperatura del medio dependen de una función de la forma  $ze^{-\alpha z^2}$

TIEMPO	RADIO									
	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	1.00
.1	17.9	6.3	1.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
.2	39.8	20.3	8.4	2.7	.7	.2	0.0	0.0	0.0	0.0
.3	55.9	32.8	16.5	7.3	2.9	1.1	.3	0.0	0.0	0.0
.4	67.3	42.2	23.5	11.9	5.6	2.5	.9	.2	.1	.1
.5	75.6	49.4	29.2	15.9	8.3	4.1	1.8	.7	.3	.3
.6	81.7	54.8	33.7	19.4	10.7	5.7	2.8	1.3	.7	.6
.7	86.4	59.1	37.3	22.3	12.9	7.2	3.8	2.0	1.2	1.0
.8	90.0	62.4	40.2	24.7	14.8	8.6	4.9	2.7	1.7	1.5
.9	92.9	65.2	42.6	26.7	16.4	9.9	5.8	3.4	2.3	2.0
1.0	95.3	67.4	44.6	28.4	17.8	11.1	6.7	4.2	3.0	2.6
2.0	106.3	78.0	54.5	37.5	26.0	18.4	13.3	10.1	8.5	8.0
3.0	110.4	82.0	58.5	41.5	29.9	22.1	17.0	13.7	12.1	11.5
4.0	112.9	84.5	60.9	43.9	32.3	24.5	19.3	16.0	14.3	13.8
5.0	114.5	86.1	62.6	45.5	33.9	26.1	20.9	17.6	15.9	15.3

*Produccion de Calor en un Cilindro Circular Semi-Infinito*

6.0	115.7	87.3	63.8	46.7	35.1	27.3	22.1	18.8	17.1	16.5
7.0	116.7	88.3	64.8	47.7	36.0	28.3	23.0	19.7	18.0	17.4
8.0	117.4	89.0	65.5	48.4	36.8	29.0	23.8	20.5	18.8	18.1
9.0	118.1	89.7	66.1	49.0	37.4	29.6	24.4	21.1	19.3	18.7

**Z = .50**

**RADIO**

TIEMPO	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	1.00
10.0	118.6	90.2	66.6	49.5	37.9	30.1	24.9	21.6	19.8	19.2
20.0	121.1	92.7	69.2	52.1	40.4	32.6	27.4	24.1	22.3	21.6
30.0	122.0	93.6	70.1	53.0	41.3	33.5	28.3	24.9	23.2	22.5
40.0	122.5	94.1	70.5	53.4	41.8	33.9	28.7	25.4	23.6	22.9
50.0	122.7	94.3	70.7	53.6	42.0	34.2	28.9	25.6	23.8	23.1
60.0	122.8	94.4	70.9	53.8	42.1	34.3	29.0	25.7	23.9	23.3
70.0	122.9	94.5	71.0	53.8	42.2	34.4	29.1	25.8	24.0	23.3
80.0	123.0	94.6	71.0	53.9	42.3	34.4	29.2	25.8	24.1	23.4
90.0	123.0	94.6	71.0	53.9	42.3	34.5	29.2	25.9	24.1	23.4
100.0	123.0	94.6	71.1	54.0	42.3	34.5	29.2	25.9	24.1	23.5
110.0	123.1	94.6	71.1	54.0	42.3	34.5	29.2	25.9	24.1	23.5
120.0	123.1	94.6	71.1	54.0	42.3	34.5	29.3	25.9	24.2	23.5

**Z = .75**

**RADIO**

TIEMPO	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	1.00
10.0	51.7	47.5	42.0	36.6	31.8	27.9	25.0	22.9	21.7	21.2
20.0	55.4	51.1	45.7	40.2	35.4	31.5	28.5	26.5	25.2	24.6
30.0	56.7	52.4	47.0	41.5	36.7	32.8	29.8	27.8	26.5	25.9
40.0	57.3	53.1	47.6	42.1	37.3	33.4	30.4	28.4	27.1	26.5
50.0	57.7	53.4	47.9	42.5	37.7	33.7	30.8	28.7	27.4	26.8
60.0	57.9	53.6	48.1	42.7	37.9	33.9	31.0	28.9	27.6	27.0
70.0	58.0	53.7	48.3	42.8	38.0	34.1	31.1	29.0	27.7	27.1
80.0	58.1	53.8	48.4	42.9	38.1	34.1	31.2	29.1	27.8	27.2
90.0	58.1	53.9	48.4	42.9	38.1	34.2	31.2	29.1	27.8	27.3
100.0	58.2	53.9	48.4	43.0	38.1	34.2	31.3	29.2	27.9	27.3
110.0	58.2	53.9	48.5	43.0	38.2	34.3	31.3	29.2	27.9	27.3
120.0	58.2	53.9	48.5	43.0	38.2	34.3	31.3	29.2	27.9	27.3

**Z = .75**

**RADIO**

TIEMPO	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	1.00
.1	.3	.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
.2	2.2	1.4	.7	.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
.3	5.6	4.0	2.4	1.2	.5	.2	0.0	0.0	0.0	0.0
.4	9.4	7.2	4.7	2.7	1.4	.6	.2	.1	0.0	0.0
.5	13.0	10.3	7.2	4.5	2.6	1.3	.6	.3	.1	.1

.6	16.3	13.2	9.6	6.4	3.9	2.2	1.2	.6	.3	.2
.7	19.2	15.8	11.8	8.2	5.2	3.2	1.8	1.0	.6	.5
.8	21.7	18.1	13.8	9.8	6.5	4.1	2.5	1.5	1.0	.8
.9	23.8	20.2	15.6	11.3	7.7	5.1	3.2	2.1	1.4	1.2
1.0	25.7	21.9	17.2	12.7	8.9	6.0	4.0	2.6	1.9	1.7
2.0	36.2	32.0	26.7	21.4	16.8	13.1	10.3	8.4	7.4	7.0
3.0	41.0	36.8	31.4	26.0	21.2	17.4	14.6	12.6	11.4	11.0
4.0	44.0	39.8	34.4	28.9	24.2	20.3	17.5	15.5	14.3	13.8
5.0	46.2	41.9	36.5	31.1	26.3	22.4	19.6	17.6	16.4	15.9
6.0	47.8	43.6	38.1	32.7	27.9	24.1	21.1	19.1	17.9	17.4
7.0	49.1	44.8	39.4	34.0	29.2	25.3	22.4	20.4	19.2	18.7
8.0	50.1	45.9	40.4	35.0	30.2	26.3	23.4	21.4	20.2	19.6
9.0	51.0	46.7	41.3	35.9	31.1	27.2	24.3	22.2	21.0	20.5

$Z = 4.5t$		RADIO								
TIEMPO	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	1.00
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
9.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

$Z = 4.50$		RADIO								
TIEMPO	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	1.00
10.0	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1
20.0	1.4	1.4	1.4	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3
30.0	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.7	2.7	2.7
40.0	4.0	4.0	4.0	4.0	3.9	3.9	3.9	3.9	3.8	3.8
50.0	4.8	4.8	4.8	4.8	4.7	4.7	4.7	4.7	4.6	4.6
60.0	5.4	5.4	5.4	5.3	5.3	5.3	5.2	5.2	5.2	5.1
70.0	5.8	5.8	5.7	5.7	5.7	5.7	5.6	5.6	5.5	5.5
80.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	5.9	5.9	5.9	5.8	5.8
90.0	6.2	6.2	6.2	6.2	6.2	6.1	6.1	6.0	6.0	5.9
100.0	6.4	6.4	6.4	6.3	6.3	6.3	6.2	6.2	6.1	6.1
110.0	6.5	6.5	6.4	6.4	6.4	6.4	6.3	6.3	6.2	6.2
120.0	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.4	6.4	6.3	6.3	6.2

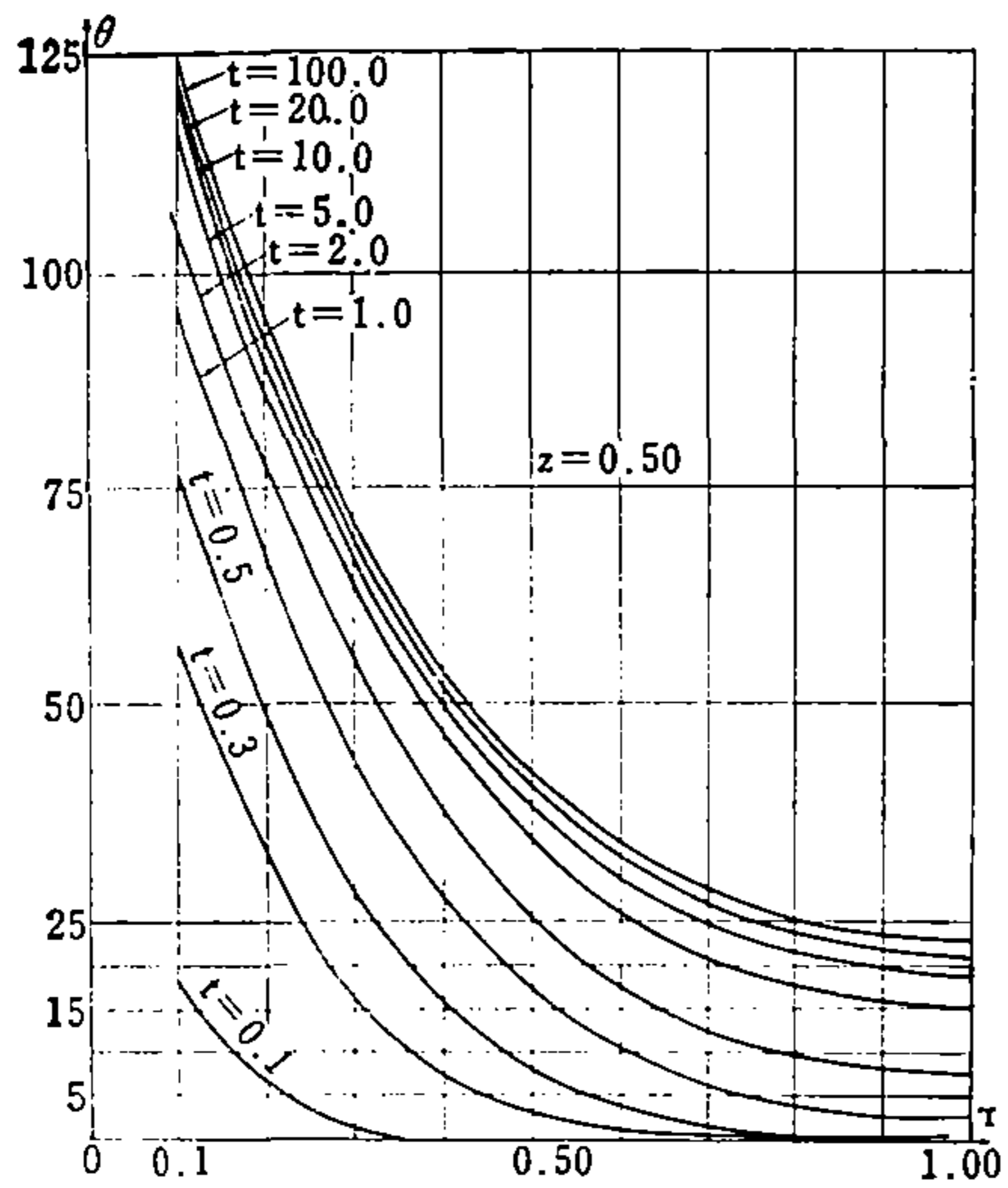


fig. 1

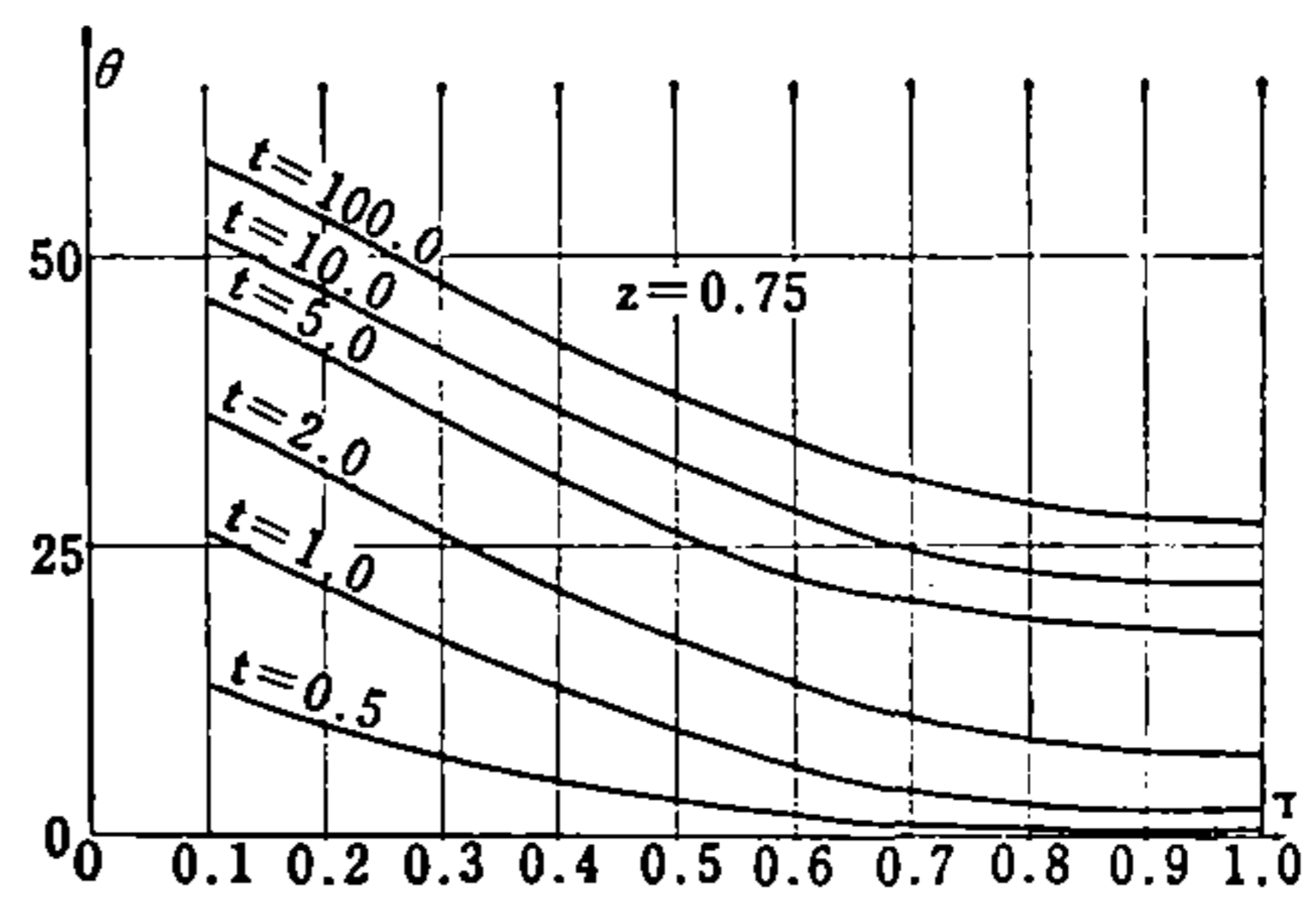


fig. 2

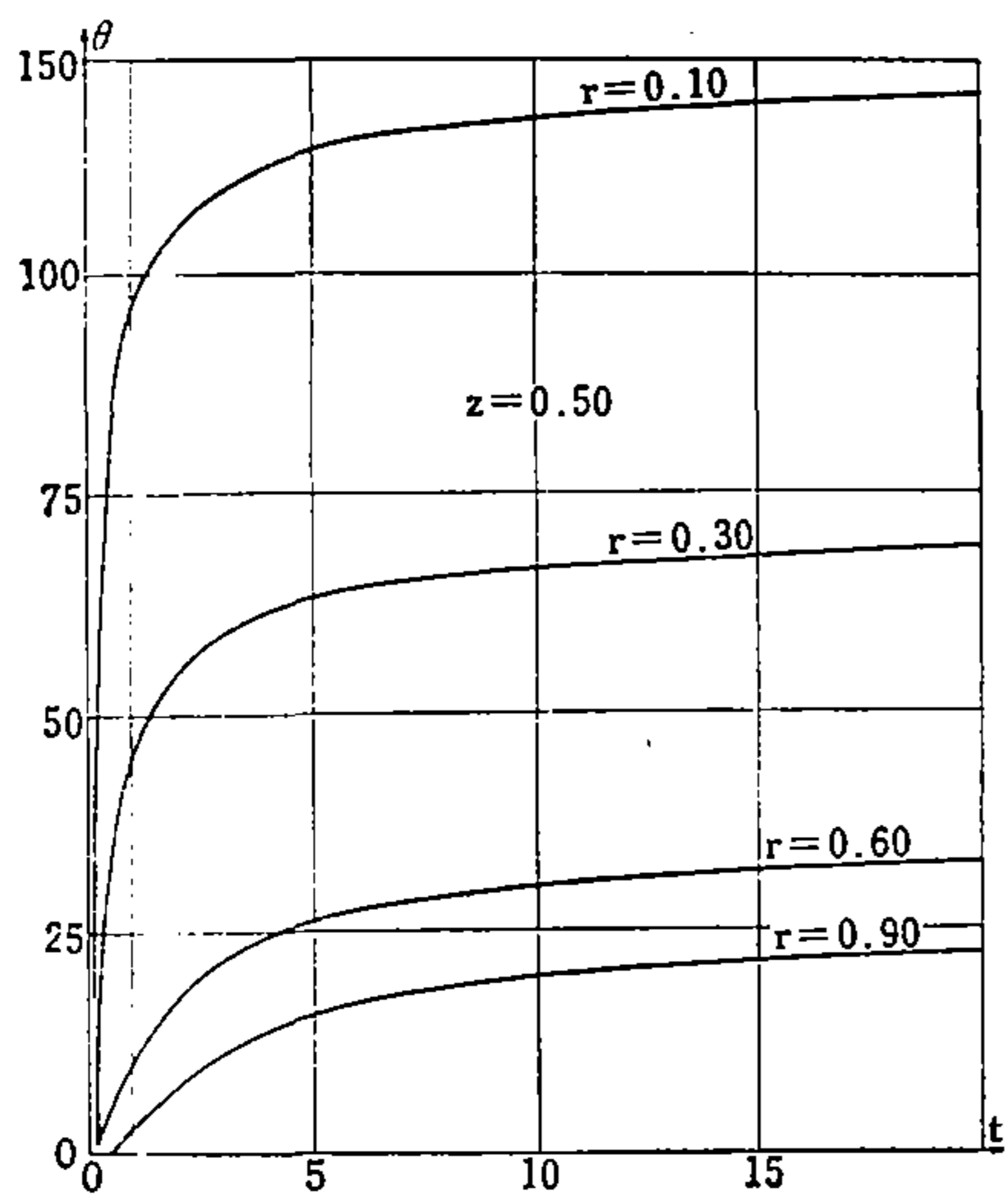


fig. 3

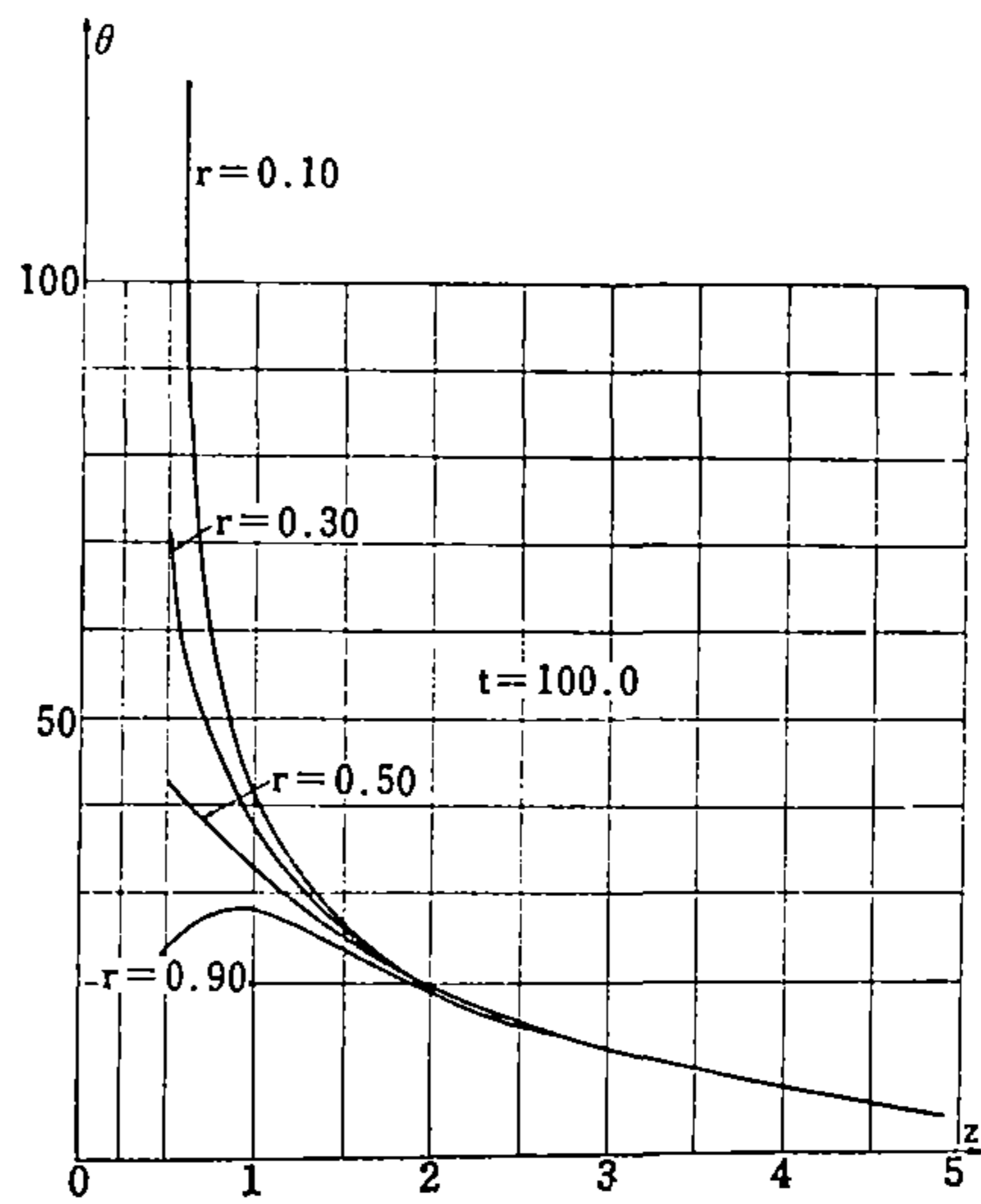


fig. 4

Mi agradecimiento a los Profesores S.L. Kalla y A. Battig por haberme sugerido el tema así como por la valiosa información que me han brindado sobre elmismo

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología  
Universidad Nacional de Tucumán

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] Erdelyi, A(Ed), *Table of Integral Transforms* Vol.1, Mc Graw Hill—New York—1945.
- [2] Kalla, Battig, Luccioni, *Diffusion of heat in a cylinder which is generating heat with radiation. Boundary conditions*, Proc. Acad. Indian Science.
- [3] Sneddon, I.N. *Fourier Transforms*, McGraw Hill, New York.
- [4] Van der Pol, B & Bremmer, H., *Operational Calculus Based on the two-sided Laplace Integral*, Cambridge—1951.