Kyungpook Math. J.
Volume 16, Number 1
June, 1976

ALGUNOS TEOREMAS SOBRE TRANSFORMADAS INTEGRALES

Por S. E. Gonzalez de Galindo

1. Introduccion

En el presente trabajo las notaciones simbólicas:

a) $\phi(p) \doteqdot f(t)$, b) $\phi(p) \underset{k,m}{\overset{V}{=}} f(t)$ c) $\phi(p) \underset{\nu}{\overset{\gamma}{=}} f(t)$

d) $\phi(p) \underset{\mu}{\overset{K}{=}} f(t)$ serán usadas para denotar:

a) la transformada elásica de Laplace:

$$\phi(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt \tag{1.1}$$

b) la transformada de Varma:

$$\phi(p)=p\int_0^\infty (pt)^{m-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}pt}W_{k,m}(pt)f(t)dt \tag{1.2}$$

c) la transformada de Hankel:

$$\phi(p)=p\int_0^\infty (pt)^{\frac{1}{2}}J_\nu(pt)f(t)dt \tag{1.3}$$

d) la transformada Bessel de Meijer:

$$\phi(p)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}p\int_0^\infty (pt)^{\frac{1}{2}}K_\mu(pt)f(t)dt \tag{1.4}$$

En el presente trabajo establecemos ciertos teoremas sobre transformada de Laplace, Hankel y Varma. Usando los teoremas hemos logrado transformadas inversas de Laplace del producto de las funciones de Bessel.

2. Teoremas

En ésta seceión establecemos algunos teoremas sobre transformadas integrales.

TEOREMA 1. *Si*

$$\phi(p) \underset{k,m}{\overset{V}{=}} f(t) \tag{2.1}$$

$$y \quad \phi_1(p)[h(p)x]^{m-\frac{1}{2}} h(p) e^{-\frac{1}{2}h(p)x} W_{k,m}[h(p)x] \overset{V}{\underset{k,m}{=}} g(x,t) \tag{2.2}$$

luego:

$$\phi_1(p)\cdot\phi[h(p)] \overset{V}{\underset{k,m}{=}} \int_0^\infty f(x)g(x,t)dx \tag{2.3}$$

donde $\phi_1(p), h(p)$ *son funciones continuas de* p*, independientes de* x, $\mathrm{R}[h(p)] \geq p_0 > 0$, x *real y no negativo, las transformadas de* $|f(t)|$ *y* $|g(x,t)|$ *existen, y la integral de* (2.3) *es absolutamente convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos:

$$(1) \quad \phi[h(p)] = h(p)\int_0^\infty [h(p)t]^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}h(p)t} W_{k,m}[h(p)t] f(t)dt$$

ya que $\phi(p) \overset{V}{\underset{k,m}{=}} f(t)$, la integral $p\int_0^\infty (pt)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}pt} W_{k,m}[pt] f(t)dt$ converge para $\mathrm{R}(p) \geq p_0$, y así (1) converge si $\mathrm{R}[h(p)] \geq p_0 > 0$.

Multiplicando ambos miembros de (1) por $\phi_1(p)$, reemplazando t por x, y de acuerdo a (2.2) tenemos:

$$\phi_1(p)\cdot\phi[h(p)] = \int_0^\infty \left[p\int_0^\infty (pt)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}pt} W_{k,m}(pt) g(x,t)dt\right] f(x)dx$$

Cambiando orden de integración lo cual es posible por las condiciones impuestas en el teorema e interpretando el 2° miembro según la transformada de Varma tenemos demostrado (2.3).

De la misma manera podemos demostrar los siguientes teoremas:

TEOREMA 2. *Si*

$$\phi(p) \overset{\gamma}{\underset{\nu}{=}} f(t) \tag{3.1}$$

y

$$\phi_1(p)\cdot[h(p)x]^{\frac{1}{2}} h(p) J_\nu[h(p)x] \overset{\gamma}{\underset{\nu}{=}} g(x,t) \tag{3.2}$$

luego:

$$\phi_1(p)\cdot\phi[h(p)] \overset{\gamma}{\underset{\nu}{=}} \int_0^\infty f(x)g(x,t)dx \tag{3.3}$$

donde $\phi_1(p), h(p)$ *son funciones continuas de* p*, independientes de* x, $\mathrm{R}[h(p)] \geq p_0 > 0$, x *real no negativo las transformadas de* $|f(t)|$ *y* $|g(x,t)|$ *existen, y la* *integral de* (3.3) *es absolutamente convergente.*

Si ahora representamos con: $T[f(t);\ p]=\phi(p)$ a una transformada genérica cuyo núcleo es $K(p,t)$ o sea:

$$T[f(t);p] = p\int_0^\infty K(pt)f(t)dt$$

podemos enunciar el siguiente teorema general:

TEOREMA 3. *Si*

$$T[f(t);\ p]=\phi(p) \tag{4.1}$$

y

$$\phi_1(p)K[h(p)x]\,h(p)=T[g(x,t);\ p] \tag{4.2}$$

luego

$$\phi_1(p)\cdot T[f(t),p]=T\int_0^\infty f(x)g(x,t)dx;p] \tag{4.3}$$

donde $\phi_1(p), h(p)$ *son funciones continuas de* p, *independientes de* x, $\mathrm{R}[h(p)]\geq p_0>0$, x *real no negativo, las transformadas de* $|f(t)|$ *y* $|g(x,t)|$ *existen, y la integral en* (4.3) *es absolutamente convergente.*

Este teorema ha sido dado ya por Kalla [5].

CASOS PARTICULARES:

1) Si

$$\phi(p)\overset{K}{\underset{\mu}{=}}f(t) \tag{5.1}$$

y

$$\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}[h(p)]^{\frac{3}{2}}\phi(p)\ K_\mu\,[xh(p)]\ \overset{K}{\underset{\sigma}{=}}g(x,t) \tag{5.2}$$

luego

$$\phi(p)\cdot\phi[h(p)]\ \overset{K}{\underset{\sigma}{=}}\int_0^\infty f(x)g(x,t)dx \tag{5.3}$$

probado que la transformada Bessel de Meijer de $|f(t)|$ y $|g(x,t)|$ existen, $\mathrm{R}[h(p)]>0$, $\phi(p)$ y $h(p)$ son funciones continuas de p, independientes de x, y la integral en (5.3) es absolutamente convergente.

Este teorema ya ha sido demostrado por Rathie [3].

2) Si

$$\phi(p)\overset{K}{\underset{\mu}{=}}f(t) \tag{6.1}$$

y

$$\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (p)^{\frac{3}{4}} \cdot \phi(p) K_{\mu} [xp^{\frac{1}{2}}] \doteqdot g(x, t) \tag{6.2}$$

luego

$$\phi(p) \cdot \phi(p)^{\frac{1}{2}} \doteqdot \int_{0}^{\infty} f(x) g(x, t) dx \tag{6.3}$$

probado que la transformada Bessel de Meijer de $|f(t)|$ y la transformada de Laplace de $|g(x, t)|$ existen, $R(p) > 0$, $\phi(p)$ es una función continua de p, independiente de x, y la integral en (6.3) es absolutamente convergente.

Este teorema también ha sido dado por Rathie [3].

3. Ejemplos

Usando resultados dados en sección 2, daremos la transformada inversa del producto de funciones de Bessel.

EJEMPLO 1. Haremos aplicación del resultado (5.3) en el caso en que $\sigma = \mu$.

Si $f(t) = t^{-\frac{1}{2}} e^{-at^2}$, entonces según [2, Pag. 132(24)] tenemos:

$$\phi(p) = \frac{1}{4} \cdot \sec\left(\frac{1}{2}\mu\pi\right) \left(\frac{\pi p}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{p^2}{8a}\right) K_{\frac{1}{2}\mu}\left(\frac{p^2}{8a}\right) \text{ con Re } (a) > 0, \ -1 < \text{Re } \mu < 1$$

Tomamos $h(p) = p^{\frac{1}{2}}$, $\phi(p) = \pi p^{-\frac{5}{4}}$ entonces según [2, Pag. 146(54)] tenemos:

$$g(x, t) = \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} K_{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{x^2}{4t}\right)$$

luego según (5.3) tenemos:

$$\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{4a^{\frac{1}{2}}} p^{-1} \sec\left(\frac{1}{2}\mu\pi\right) \exp\left(\frac{p}{8a}\right) K_{\frac{1}{2}\mu}\left(\frac{p}{8a}\right) \frac{K}{\mu} \int_{0}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-ax^2} K_{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{x^2}{4t}\right) dx$$

Haciendo $x^2 = X$, obtenemos salvo un factor a la transformada de Laplace de la función

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}} K_{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{x}{4t}\right)$$

Según [1, Pag. 198(28)] tenemos:

$$\frac{\phi(a)}{a} = \frac{-\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left[\frac{\mu-1}{2}\pi\right]\left(a^2 - \frac{1}{16t^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot Q_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\mu}{2}} \left[\frac{a}{\left(a^2 - \frac{1}{16t^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right],$$

$$\text{con Re } a > -\text{Re}\left(\frac{1}{4t}\right)$$

Usando la relación dada por [1, Pag 370], y considerando $a=\frac{\alpha}{4}$, tendremos finalemente:

$$\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{16}\alpha^{\frac{3}{2}}\,p^{-1}\sec\left(\frac{1}{2}\mu\pi\right)\exp\left(\frac{p}{2\alpha}\right)K_{\frac{1}{2}\mu}\left(\frac{p}{2\alpha}\right)$$

$$\doteqdot\frac{K}{\mu}t^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}\right)e^{\frac{\mu\pi i}{2}}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\mu-1}{2}\pi\right)(\alpha^2t^2-1)^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{1}{\alpha^2t^2}\right)^{\frac{\mu-1}{4}}{}_2F_1\left[\frac{\mu+1}{4},\ \frac{\mu+3}{4},\ 1;\left(1-\frac{1}{\alpha^2t^2}\right)\right]$$

CASO PARTICULAR:

1) Si $\mu=0$ obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{16}\alpha^{\frac{3}{2}}p^{-1}\exp\left(\frac{p}{2\alpha}\right)K_0\left(\frac{p}{2\alpha}\right)\doteqdot\frac{K}{\mu}t^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\alpha^2t^2}\right)^{\frac{1}{4}}}\,{}_2F_1\left[\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},1;1-\frac{1}{\alpha^2t^2}\right]$$

EJEMPLO 2.

Sea $f(t)=t^{-\frac{1}{2}}e^{-at^2}$, Re $a>0$, $-1<$Re $\mu<1$, según [2, Pag 132(24)] tenemos:

$$\phi(p)=\frac{1}{4}\sec\left(\frac{1}{2}\mu\pi\right)\left(\frac{\pi p}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{p^2}{8a}\right)K_{\frac{1}{2}\mu}\left(\frac{p^2}{8a}\right)$$

Tomando:

$\phi(p)=p^{-\frac{3}{4}}I_\mu(\gamma p^{\frac{1}{2}})$ según [1, Pag 284(56)] tenemos:

$$g(x,t)=\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}t^{-1}e^{-\frac{x^2+\gamma^2}{4t}}I_\mu\left[\frac{x\gamma}{2t}\right],$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{x+\gamma}{2}\right)^2>0,\quad \operatorname{Re}\left(\frac{x-\gamma}{2}\right)^2>0$$

Aplicando (6.3):

$$p^{-\frac{3}{4}}I_\mu(\gamma p^{\frac{1}{2}})\frac{1}{4}\sec\left(\frac{1}{2}\mu\pi\right)\left(\frac{\pi p^{\frac{1}{2}}}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{p}{8a}\right)K_{\frac{1}{2}\mu}\left(\frac{p}{8a}\right)$$

$$\doteqdot\frac{t^{-1}e^{-\gamma^2/4t}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty e^{-\left(a+\frac{1}{4}\right)x^2}I_\mu\left[\frac{\gamma}{2t}x\right]dx$$

Haciendo $x^2=\mu$, y de acuerdo a [1, Pag 197(20)] tenemos:

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{4}p^{-\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}\sec\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)\exp\left(\frac{p}{8a}\right)I_\mu(\gamma p^{\frac{1}{2}})\ K_{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{p}{8a}\right)$$

$$\doteqdot \frac{4}{\gamma} \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)} e^{-\frac{\gamma^2}{4t}+\frac{\gamma^2}{8t(4at+1)}} M_{0,\frac{\mu}{2}}\left[\frac{\gamma^2}{4t(4at+1)}\right]$$

Usando la siguiente relación:

$$M_{0,\mu}(x)=2^{2\mu}\Gamma(\mu+1)x^{\frac{1}{2}} I_{\mu}\left(\frac{x}{2}\right)$$

tendremos finalmente:

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{4} p^{-\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} \sec\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) \exp\left(\frac{p}{8a}\right) I_{\mu}(\gamma p^{\frac{1}{2}}) K_{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{p}{8a}\right)$$

$$\doteqdot 2^{\mu+\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)} [t(4at+1)]^{-\frac{1}{2}} e^{-\gamma^2\left[\frac{8at+1}{8t(4at+1)}\right]} I_{\frac{\mu}{2}}\left[\frac{\gamma^2}{8t(4at+1)}\right].$$

CASO PARTICULAR:

Si $\mu=0$ tenemos:

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{4} p^{-\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{p}{8a}\right) I_0(\gamma p^{\frac{1}{2}}) K_0\left(\frac{p}{8a}\right)$$

$$\doteqdot 2^{\frac{1}{2}} [t(4at+1)]^{-\frac{1}{2}} e^{-\gamma^2\left[\frac{8at+1}{8t(4at+1)}\right]} I_0\left[\frac{\gamma^2}{8t(4at+1)}\right].$$

El autor agradece al Dr. S. L. Kalla por su ayuda y dirección en la preparación del presente trabajo.

Faculted de Bioquimica, Quimica y Farmacia
Cátera de Matemáticas, U. N. T.
Tucumán, Argentina

REFERENCIAS

[1] Erdelyi, A. et al, *Tables of integral transforms*, Vol. I, McGraw-Hill, N. Y. (1954).

[2] Erdelyi, A. et al, *Tables of integral transforms*, Vol. II, McGraw-Hill, N. Y. (1954).

[3] Rathie, P. N., *The inverse Laplace transform of the product of Bessel and Whittaker functions*, J. London Math. Soc., 40(ii) (1965), 367—369.

[4] McLachlan, N. W., *Modern Operational Calculus*, (Dover), McMillan, N. Y. (1954).

[5] Kalla, S. L. *On a generalized theorem of integral transforms* (to appear).

[6] Varma, R. S. *On a generalization of Laplace integral*, Proc. Nat. Acad. Sci. India 20 (1951), 209—216.