Bull. Korean Math. Soc.
Vol. 13, No. 2, 1976.

POISSON 過程에서 母數가 時間에 따라 變하는 경우 그 確率에 關하여

高 友 錫

§1. 序 論

單位 時間內의 發生數가 Poisson 分布에 따르는 경우 時間이 經過하면 그 頻度가 바뀌이는 경우가 普通이다. 그래서 이 論文에서는 Poisson 過程에서 Parameter가 時間에 依해서 變動하는 경우를 生覺한다. 時刻 S에서 系가 狀態 E_m에 있다고 할 때 時間 t $(s<t)$에서 系가 狀態 E_n에 있을 條件付 確率을 $P_{mn}(s,t)$라고 한다. Feller [1]에 따라서 任意의 狀態 E_m에 對應하여, $h\to 0$일때

$$\frac{1-P_{mm}(t,t+h)}{h}\to\lambda_m(t) \tag{1,1}$$

와 같이 되는 連續函數 $\lambda_m(t)$가 存在한다고 假定한다. 이때 $\lambda_m(t)h+0(h)$는 時刻 t에서 狀態 E_m에 있을때 $(t,t+h)$ 사이에서 變化가 일어날 確率이다. 또 任意의 狀態의 雙 E_m, E_n $(m\neq n)$에 對應하여
$h\to 0$ 일때

$$\frac{P_{mn}(t,t+h)}{h}\to\lambda_m(t)\ \ \pi_{mn}(t) \tag{1,1$'$}$$

와 같이 되는 $E_m\to E_n$인 推移確率 $\pi_{mn}(t)$가 存在한다고 假定한다. 여기서 $\pi_{mn}(t)$는 t에 關한 連續函數이다.

이 때 確率變化 方程式은

$$\frac{\partial}{\partial t}P_{mn}(s,t)=-\lambda_n(t)\ \ P_{mn}(s,t)+\sum_v P_{mv}(s,t)\ \ \lambda_v(t)\ \ \pi_{vn}(t) \tag{1,2}$$

이 論文에서는 $\lambda_m(t)$가 t의 函數인 경우의 二, 三의 model과 그 推定의 問題를 考察하고 나아가 $\lambda_m(t)$ 自體가 確率過程인 경우에 對해서 考察하고저 한다.

§2. 時間的으로 平等하지 않는 Poisson 程度

(1, 2)에서 특히

$$\lambda_m(t)=\lambda(t)$$
$$\pi_{mn}(t)=\begin{cases}1 & (n=m+1)\\ 0 & (n\neq m+1)\end{cases}$$

라고 하면 $s<t$에 對해서

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}P_{m,n}(s,t)=-\lambda(t)P_{m,n}(s,t)+\lambda(t)\ P_{m,n-1}\ (s,t)\ n>m\\ &\frac{\partial}{\partial t}P_{m,m}(s,t)=-\lambda(t)P_{mm}(s,t)\end{aligned}\right\}\qquad(2,1)$$

이것을 풀면

$$\Lambda(t)=\int_0^t\lambda(s)ds\qquad(2,2)$$

라고 놓고

$$P_{m\,m+n}(s,s+t)=\frac{\{\Lambda(s+t)-\Lambda(t)\}^n}{n!}e^{-\{\Lambda(s+t)-\Lambda(t)\}}\qquad(2,3)$$

를 얻는다.

特히 $\lambda(s)$가 有限個의 parameter로 表示되는 경우에 關해서 그 parameter의 推定의 問題를 考察하기로 하자.

(i) $\lambda(s)=\lambda_0+\lambda_1 s$의 경우

$O\leq S\leq T$에 있어서 $\lambda_0+\lambda_1 s>0$, $(k+1)t=T$

$0=S_0<S_1<\cdots\cdots<S_{k+1}=T$

$S_{j+1}-S_j=t$라 하고 $(S_j,\ S_{j+1})$에서 事象이 일어날 回數를 n_j, $m_j=n_0+n_1+\cdots\cdots+n_{j-1}$ $(j=0,1,2,\cdots\cdots,\ k;m_0=0)$라고 하자.

$$\Lambda(S_j+t)-\Lambda(S_j)=\lambda_0 t+\frac{\lambda_1}{2}t^2+\lambda_1\ S_j t$$

$$P_{m_j\ m_j+n_j}\ (S_j,\ S_{j+t})=\frac{\{\Lambda(S_{i+t})-\Lambda(S_j)\}^{n_j}}{n_j\,!}e^{-\{\Lambda(S_j+t)-\Lambda(S_j)\}}\qquad(2,4)$$

이므로 (2, 4)의 尤度函數는

$$L=\prod_{j=0}^{k}P_{m_j\ m_j+n_j}\ (S_j,\ S_{j+t})$$

$$=\prod_{j=0}^{k}\frac{\{\lambda_0 t+\frac{\lambda_1}{2}t^2+\lambda_1 S_j t\}^{n_j}}{n_j!}e^{-\{\lambda_0 t+\frac{\lambda_1}{2}t^2+\lambda_1 S_j t\}} \tag{2,5}$$

따라서 λ_0 와 λ_1 의 最尤推定方程式은

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda_0}=\sum_{j=0}^{k}\frac{n_j t}{\lambda_0 t+\frac{\lambda_1}{2}t^2+\lambda_1 S_j t}-(k+1)t=0 \tag{2,6}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda_1}=\sum_{j=0}^{k}\frac{n_j(\frac{t^2}{2}+S_j t)}{\lambda_0 t+\frac{\lambda_1}{2}t^2+\lambda_1 S_j t}-\sum_{j=0}^{k}(\frac{t^2}{2}+S_j t)=0 \tag{2,7}$$

(2,6)과 (2,7)을 聯立시켜서 $\hat{\lambda}_0$, $\hat{\lambda}_1$ 을 얻을 수 있다
또

$$E(n_j)=\lambda_0 t+\frac{\lambda_1}{2}t^2+\lambda_1 S_j t \tag{2,8}$$

이므로

$$M=\sum_{j=0}^{k}(n_j-\lambda_0 t-\frac{\lambda_1}{2}t^2-\lambda_1 S_j t)^2$$

라고 하면

λ_0, λ_1 의 最小自乘推定方程式은

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda_0}=0 \qquad \frac{\partial M}{\partial \lambda_1}=0$$

에서

$$\sum_{j=0}^{k}(\lambda_0 t+\frac{\lambda_1}{2}t^2+\lambda_1 S_j t)=\sum_{j=0}^{k}n_j \tag{2,9}$$

$$\sum_{j=0}^{k}(\lambda_0 t+\frac{\lambda_1}{2}t^2+\lambda_1 S_j t)S_j=\sum_{j=0}^{k}n_j S_j \tag{2,10}$$

故로 (2,9), (2,10)에서 $\hat{\lambda}_0$, $\hat{\lambda}_1$을 얻을 수 있다.

(ii) $\lambda(S)=a_0+a_1\cos\lambda S$ $(\lambda=2\pi/T;T$ 는 旣知)의 경우

$$\Lambda(S_{j+t})-\Lambda(S_j)=a_0 t+\frac{a_1}{\lambda}\cos\lambda(S_j+\frac{t}{2})\sin\frac{\lambda}{2}t$$

가 되어 a_0, a_1의 推定을 (i)과 같은 方法으로 얻을 수 있다.

§3. 時間的으로 平等하지 않는 複合 Poisson 過程

(1,2)에서

$$\pi_{mn}(t)=\begin{cases}1 & n=m+1\\ 0 & n\neq m+1\end{cases}$$

라고 하면

$$\frac{\partial}{\partial t}P_{m\ m+n}(s,s+t)=-\lambda_{m+n}(s+t)P_{m\ m+n}(s_j\ s+t)$$
$$+\lambda_{m+n-1}(s+t)P_{m\ m+n-1}(s,s+t) \tag{3,1}$$

가 된다.

$$\lambda_{m+n}(s+t)=\frac{n+1}{t}\ \frac{P_{m\ m+n-1}(s,s+t)}{P_{m\ m+n}(s,s+t)}\ (t>0) \tag{3,2}$$

일 때 (3,1)의 解는

$$P_{mm+n}(s,s+t)=\int_0^\infty\frac{(tx)^n}{n!}e^{-tx}\ dV(s,m,x) \tag{3,3}$$

이다. 여기에서 V는 x의 分布函數이다.

證明;

$$\frac{\partial}{\partial t}P_{m\ m+n}(s,\ s+t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty\frac{(tx)^n}{n!}e^{-tx}dV(s,m,x)$$
$$=\int_0^\infty\left\{\frac{n(tx)^{n-1}}{n!}xe^{-tx}-x\frac{(tx)^n}{n!}e^{-tx}\right\}dV(s,m,x)$$
$$=\int_0^\infty\left\{\frac{n}{t}\ \frac{(tx)^n}{n!}e^{-tx}-\frac{n+1}{t}\ \frac{(tx)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-tx}\right\}dV(s,m,x)$$
$$=\frac{n}{t}P_{m,\ m+1}(s,s+t)-\frac{n+1}{t}P_{m,\ m+n+1}(s,s+t)$$

한편 (3.1)의 右邊은

$$-\frac{n+1}{t}\ \frac{P_{m,\ m+n+1}(s,s+t)P_{m,\ m+n}(s,s+t)}{P_{m,\ m+n}(s,s+t)}+\frac{n}{t}$$
$$\times\frac{P_{m,\ m+n}(s,s+t)P_{m,\ m-n}(s,s+t)}{P_{m,\ m+n-1}(s,s+t)}$$
$$=\frac{n}{t}P_{m,\ m+n}(s,\ s+t)-\frac{n+1}{t}P_{m,\ m+n+1}(s,s+t)$$

(證明끝)

여기서 (3,3)의 特別한 경우로서

$$P_{m,\ m+n}(s,\ s+t)=\sum_{i=1}^{l}a_i(s)\ \frac{(t\lambda_i)^n}{n!}e^{-t\lambda_i} \tag{3,4}$$

$$(\sum_{i=1}^{l}a_i(s)=1) \tag{3,5}$$

를 考察한다. 卽 λ가 λ_1, λ_2, ……λ_l인 값을 各各 確率 $a_1(s)$, ……$a_l(s)$라고 하면 그 確率은 時間에 依해서 바뀌인다고 한다. 한 例로써 電話의 呼出을 會社群과 家庭群에 對해서 생각하건데, 前者는 λ_1, 後者는 λ_2의 Poisson 分布에 따른다고 하면 午前 8 時～午後 5 時頃까지는 λ_1을 取하는 確率이 높고 午後 6 時～午後 10時頃까지는 λ_2를 取하는 確率이 높아진다. 簡單을 위하여 $a_i(s)=\alpha_i s+\beta_i$, $O\leq S\leq T$에 있어서 $\alpha_i s+\beta_i>0$라고 假定하고 α_i, β_i, λ_i의 推定을 하여 보자. 時間을 §2(i)의 경우와 같이 區劃하면 (但, $k\geq l-1$과 같이 한다)

$$P_{m\ jm_j+n_j}(s_j,\ s_j+t)=\sum_{i=2}^{l}a_i(s_j)\ \frac{(t\lambda_i)^{ni}}{n_j!}e^{-t\lambda_i}(j=0,\ 1,\ \cdots\cdots k) \tag{3,4}$$

$$\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i s_i+\beta_i)=1 \tag{3,5'}$$

또 $$E(n_j)=\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i s_j+\beta_i)t\lambda_i\ \ (j=0,\ 1,\ \cdots\cdots k) \tag{3,6}$$

이므로 最小自乘法에 依해서 α_i, β_i 및 λ_i의 推定을 할 수가 있다.

즉 $\alpha_i\lambda_i=\alpha'_i$, $\beta_i\lambda_i=\beta_i'$ $(i=1,2,\cdots\cdots l)$ (3,7)

이므로 (3,6)은

$$E(n_j)=\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i S_j+\beta_i')t\ \ (j=0,\ 1,\ \cdots\cdots k) \tag{3,8}$$

라고 하면

$$\frac{\partial M}{\partial\alpha_i}=0,\qquad \frac{\partial M}{\partial\beta_i}=0\qquad (i=1,2,\cdots\cdots l)$$

에서

$$\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=1}^{l}(\alpha'_i\ s_j+\beta'_i)ts_j=\sum_{j=0}^{k}n_j s_j \tag{3,9}$$

$$\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=1}^{l}(\alpha'_i s_j+\beta_i')\ t=\sum_{j=0}^{k}n_j \tag{3,10}$$

를 얻는다. 이 (3,9), (3,10)을 聯立해서 그 解 $\hat{\alpha}_i'$, $\hat{\beta}_i'$ $(i=1,\cdots\cdots,l)$을 얻는다. 다음 (3,7)을 (3,5')에 代入하면

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\lambda_i} (\hat{\alpha}_i' s_j + \hat{\beta}_i') = 1 \qquad (j=0, 1, \cdots\cdots k) \tag{3,11}$$

이 式에서 適當한 l 個의 $s_j(j=0, 1, \cdots\cdots, k-1)$의 값을 주면 l 個의 方程式을 얻을 수 있고 $\hat{\lambda}_i$ $(i=1, \cdots\cdots, l)$를 얻는다. 따라서 (3, 7)에서 $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_i$ $(i=1, \cdots\cdots l)$을 얻을 수 있다.

§4. 時間的으로 平等하지 않은 一般 Poisson 過程

§2, §3에서는 變化量을 1이라고 生覺하였지만, 여기서는 變化量이 1, 2, ……, r인 任意의 값을 取하는 경우를 생각한다. (1, 2)에서

$$\Pi_{mn}(t) = \begin{cases} \dfrac{h_k(t)}{h_1(t) + \cdots\cdots + h_l(t)} & (n=m+k;\ k=1, 2, \cdots\cdots, l) \\ 0 & (n \neq m+k;\ k=1, 2, \cdots\cdots, l) \end{cases}$$

라고 함. 여기서 $h_k(t)k$는 $(t, t+k)$ 사이에서 k만큼 增加하는 確率을 나타낸다. 따라서

$$\lambda_n(t) = h_1(t) + h_2(t) + \cdots\cdots + h_l(t)$$

라고 놓으면 $\lambda_n(t)h$는 $(t, t+h)$에서 變化가 일어나는 確率이고 n에 無關係이다 .

$$H_k(s, t) = \int_s^{s+t} h_k(t)\,dt \tag{4,1}$$

라고 놓고 (1, 2)를 $n=1, 2, \cdots\cdots$라 하여 順次的으로 풀면

$$P_{m,\, m+n}(s, s+t) = e^{-\sum_{k=1}^{e} H_k(s,t)} \sum_{\nu 1+\nu 2+\cdots+r\nu r=n} \frac{\{H_1(s,t)\}^{\nu_1} \{H_2(s,t)\}^{\nu_2} \cdots \{H_e(s,t)\}^{\nu_k}}{\nu_1! \nu_2! \cdots\cdots \nu_e!} \tag{4,2}$$

임이 數學的 歸納法에 依해서 證明된다.

이와 같이 一般 Poisson 過程에서는 每回의 變化量이 언제나 1單位라고는 할 수 없으며, 出生過程에서 두 쌍둥이나 세 쌍둥이의 確率을 考慮한 경우와 같고, 또 電話의 呼出을 생각하는 경우에도 同時에 몇個의 呼出이 發生하는 確率을 無視할 必要가 없고, 그들 各各이 parameter를 갖는 Poisson 過程에 獨立的으로 따르고 있다고 생각해도 괜찮게 된다.

다음에 (4, 2)에 있어서 n의 r次 moment μ_r'를 求해보자.

moment 母函數는

$$M(\theta) = e^{\sum_{k=1}^{l} H_r(s,t)(e^{k\theta}-1)} \tag{4,3}$$

이므로

$$\mu'_r=\frac{\partial^r}{\partial\theta^r}M(\theta)\Big|_{\theta=0}=\frac{\partial^r}{\partial\theta^r}e^{\sum_{k=1}^{l}H_k(s,t)(e^{k\theta}-1)}\Big|_{\theta=0} \tag{4,4}$$

$$\alpha_r=\sum_{k=1}^{l}k^rH_k(s,t) \qquad (r=1,2\cdots\cdots) \tag{4,5}$$

라고 놓으면

$$\mu_1'=\alpha_1$$
$$\mu_2'=\alpha_2+\alpha_1^2$$
$$\mu_3'=\alpha_3+3\alpha_1\alpha_2+\alpha_1^3$$
$$\mu_4'=\alpha_4+4\alpha_1\alpha_3+6\alpha_1^2\alpha_2+3\alpha_2^2+\alpha_1^4$$
$$\mu'_5=\alpha_5+4\alpha_1\alpha_4+11\alpha_2\alpha_3+9\alpha_1^2\alpha_3+15\alpha_1\alpha_2^2+10\alpha_1^3\alpha_2+\alpha_1^5$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

α_1 , α_2, ……에 關해서 풀면

$$\alpha_1=\mu_1'$$
$$\alpha_2=\mu_2'-(\mu_1')^2$$
$$\alpha_3=\mu_3'-3\mu_3'\mu_2'+2(\mu_1')^3$$
$$\alpha_4=\mu_4'-4\mu_1'\mu_3'+12(\mu_1')^2\mu_2'-3(\mu_2')^2-2(\mu_1')^4$$
$$\alpha_5=\mu_5'-4\mu_1'\mu_2'+18(\mu_1')^2\mu_3'-56(\mu_1')^3\mu_2'-30\mu_1'(\mu_2')^2-11\mu_2'\mu_3'+21(\mu_1')^5$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

여기서 $h_k(t)=\alpha_rt+\beta_k$ $0\leqq t\leqq T$라고 놓고 $\alpha_kt+\beta_k>0$ 라고 하고 α_k, β_k를 推定하여 보자. 時間을 §2 (i)과 같이 區劃하면 $\mu_1'=\alpha_1$이므로

$$E(n_j)=\sum_{k=1}^{l} kH_k(s_j,t)=\sum_{k=1}^{l}k\{\alpha_k(\frac{t^2}{2}+s_jt)+\beta_kt\} \qquad (j=0.1,\cdots\cdots k) \tag{4,6}$$

앞에서와 같이 最小自乘推定을 하면

$$M=\sum_{j=0}^{k}\{n_j-\sum_{k=1}^{l}kH_k(s_j,t)\}^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial\alpha_k}=0, \qquad \frac{\partial M}{\partial\beta_k}=0, \quad (k=1,2,\cdots\cdots,l)$$

에서

$$\sum_{j=0}^{k}\sum_{k=1}^{l}k\{\alpha_k(\frac{t^2}{2}+s_jt)+\beta_kt\}s_j=\sum_{j=0}^{k}n_js_j \tag{4,7}$$

$$\sum_{j=0}^{k}\sum_{k=1}^{l}k\{\alpha_k(\frac{t^2}{2}+s_jt)+\beta_kt\}=\sum_{j=0}^{k}n_j \tag{4,8}$$

이것을 聯立시켜서 풀면 $\hat{\alpha}_k$, $\hat{\beta}_k$를 얻는다.

瞬間的 變化量으로서는 $1, 2, \cdots\cdots r$ 中에 取하지 않는 것이 있어도 좋으며 이 경우의 k에 對해서는 $h_k(t)=0$라고 놓으면 可하다. 어떤 값을 取하는가에 對해서는 그 現象에서 아는 경우와 一應 $1, 2, \cdots\cdots, r$(r는 適當하게 잡는다)을 取하는 것으로 하고 data를 解析한 結果에서 判斷되는 경우가 있다.

§5. Parameter가 確率過程이 될 경우

前節까지의 Poisson 過程에서는 parameter $\lambda(t)$가 時間의 函數로써 連續的으로 變動하는 경우를 생각하였지만 Poisson parameter $\lambda(t)$가 偶然性을 가지고 變動하는 경우 卽 $\lambda(t)$ 自身이 確率過程인 경우도 생각할 수 있다.

N. L. Johnson [2]는 어떤 事象이 時間的으로 Poisson 分布에 따라 일어나는 경우에 어떤 期間에 生起數 z의, 그 前의 期間에서의 生起數 z의, 그 前의 期間에서의 生起數 y에 對한 回歸函數가 y의 一次式으로 되어 있을 必要條件은 時間의 變化에 따라서 變하는 Poisson parameter가 Γ 分布에 따르는 것이다 라는 것을 證明하였다. 여기에서 變化하는 parameter는 期間에 따라서 獨立인 것으로 假定되어 있지만 이 節에서는 서로 相關을 하여 時間的으로 變化하는 確率過程의 경우를 생각한다. 여기서 다음과 같은 二變數의 Γ 分布를 생각하자.

$$f(\lambda_1, \lambda_2)=\begin{cases} c\lambda_1^{\frac{\nu-1}{2}}e^{-A\lambda_1}\lambda_2^{\frac{\nu-1}{2}}e^{-A\lambda_2}J_{\nu-1}(i\alpha\sqrt{\lambda_1\lambda_2}) & (\lambda_1\lambda_2>0) \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \qquad (5, 1)$$

여기서 $J_{\nu-1}$는 $\nu-1$次의 第一種 Bessel 函數이고

$$J_{\nu-1}(i\alpha\sqrt{\lambda_1\lambda_2})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(i\alpha\sqrt{\alpha_1\alpha_2})^{2m+\nu-1}}{2^{2m+\nu-1}m!\Gamma(m+\nu)}$$

A, α는 E의 實數이고 $c=\dfrac{(4A^2-\alpha^2)^\nu}{2^{\nu+1}(i\alpha)^{\nu-1}\Gamma(\nu)}$

또 λ_1 λ_2의 周邊分布를 $f(\lambda)$라고 하면

$$f(\lambda)=\frac{(4A^2-\alpha^2)^\nu}{\Gamma(\nu)(4A)^\nu}e^{-\left(A-\frac{\alpha^2}{4A}\right)\lambda}\lambda^{\nu-1} \qquad (5, 2)$$

다음에 λ_1과 λ_2의 相關係數를 求해보자.

(5. 1)의 moment 母函數는

$$M(\theta_1, \theta_2)=\frac{(4A^2-\alpha^2)^\nu}{\{4(A-\theta_1)(A-\theta_2)-\alpha^2\}^\nu}$$

故로

$$E(\lambda_1)=E(\lambda_2)=\frac{4A\nu}{4A^2-\alpha^2}$$

$$E(\lambda_1^2)=E(\lambda_2^2)=\frac{16A^2\nu(\nu+1)}{(4A^2-\alpha^2)^2}$$

$$E(\lambda_1\lambda_2)=\frac{16A^2\nu(\nu+1)}{(4A^2-\alpha^2)^2}-\frac{4\nu}{4A^2-\alpha^2}=\frac{4\nu(4A^2\nu+\alpha^2)}{(4A^2-\alpha^2)^2}$$

$$Cor(\lambda_1\lambda_2)=\frac{4\nu\alpha^2}{(4A^2-\alpha^2)^2}$$

$$V(\lambda_1)=V(\lambda_2)=\frac{16\nu A^2}{(4A^2-\alpha^2)^2}$$

따라서

$$\rho(\lambda_1\lambda_2)=\frac{\alpha^2}{4A^2}\quad(\alpha\leqq 2A)$$

여기서 $t>0$ 에 對해서

$$\alpha=\frac{2ba^T}{1-a^{2T}},\ A=\frac{b}{1-a^{2T}}\quad(0<a<1,\ b>0)$$

라고 놓으면 (5, 1), (5, 2)는

$$f(\lambda_1,\lambda_2)=\begin{cases}\dfrac{b^{\nu+1}}{\Gamma(\nu)(1-a^{2T})(ia^T)^{\nu-1}}(\lambda_1\lambda_2)^{\frac{\nu-1}{2}}e^{-\frac{b(\lambda_1\lambda_2)}{1-a^{2T}}}J_{\nu-1}\left(\dfrac{i2ba^2}{1-a^2}\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\right) & (\lambda_1,\lambda_2>0)\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}\qquad(5,1')$$

$$f(\lambda)=\frac{b^\nu}{\Gamma(\nu)}\lambda^{\nu-1}e^{-b\lambda}\qquad(5,2')$$

가 되고 또

$$E(\lambda)=\frac{\nu}{b},\ E(\lambda^2)=\frac{\nu(\nu+1)}{b^2},\quad V(\lambda)=\frac{\nu}{b^2}$$

$$E(\lambda_1\lambda_2)=\frac{\nu(\nu+a^{2T})}{b^2},\ \rho(\lambda_1,\lambda_2)=a^{2T}\qquad(5,3)$$

가 됨.

時間을 單位長의 同間隔으로 區劃할 때 各區間에서의 事象의 生起數가 Poisson 分布에 따르고 있을 때, Poisson parameter가 λ이면 한 區間內에서의 事象의 生起數가 x일 確率은

$$P(x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \quad (x=0,1,2,\cdots\cdots)$$

로 주어진다. 이 parameter λ가 (5, 2')에 따른다고 하면 한 區間內에서의 事象의 生起數 y의 分布는

$$P(y)=\int_0^\infty \frac{\lambda^y}{y!}\ e^{-\lambda}f(\lambda)d\lambda$$

$$=\frac{b^\nu}{\Gamma(y+1)\Gamma(\nu)}\int_0^\infty \lambda^{y+\nu-1}e^{-(1+b)\lambda}\ d\lambda$$

$$=\frac{b^\nu\Gamma(y+\nu)}{(1+\mathrm{b})^{y+\nu}\Gamma(y+1)\Gamma(\nu)} \qquad (y=0,1,2,\cdots\cdots) \tag{5, 4}$$

다음에 이 平均과 分散을 求하면

$$E(y)=\int_0^\infty \sum y\cdot\frac{\lambda^y}{y!}e^{-\lambda}f(\lambda)d\lambda=\int_0^\infty \lambda f(\lambda)d\lambda$$

$$=E(\lambda)=\frac{\nu}{b} \tag{5, 5}$$

또

$$E(y^2)=\int_0^\infty \sum_{y=0}^\infty y^2\cdot\frac{\lambda^y}{y!}e^{-\lambda}f(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\frac{\nu(\nu+1)}{b^2}+\frac{\nu}{b}$$

故로

$$V(y)=E(y^2)-\{E(y)\}^2=\frac{\nu(1+\mathrm{b})}{b^2} \tag{5, 6}$$

여기서 $t(t=1,2,\cdots\cdots,N)$番째의 區間에서의 生起數를 $x_t=y$, $T(T=1,2,\cdots\cdots,N-1)$ 單位만큼 後區間에서의 生起數를 $x_{t+T}=z$라 하고 各各 區間에서의 parameter를 $\lambda_t=\lambda_1$, $\lambda_{t+T}=\lambda_2$, λ_t와 λ_{t+T} 사이에는 (5, 3)의 相關이 있다고 하면 y만 일어났다는 條件下에서 z만 일어날 確率은

$$P\{z|y\}=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\lambda_1{}^y}{y!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^z}{z!}e^{-\lambda_2}f(\lambda_1\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2 \Big/$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\lambda_1{}^y}{y!}e^{-\lambda_1}\ f(\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2 \tag{5, 7}$$

$$=\frac{b^{\nu}(1-a^{2t})^{\nu+y+z}(1+b)^{y+\nu}}{\Gamma(z+1)\Gamma(y+\nu)(1-a^{2t}+b)^{2\nu+y+1}}\sum_{m=t}^{\infty}\frac{\Gamma(m+\nu+y)\Gamma(m+\nu+z)}{\Gamma(m+\nu)\Gamma(m+1)}$$
$$\times\left(\frac{ba^{2T}}{1-a^{2t}+b}\right)^{2m} \qquad (5,8)$$

z의 條件付 平均 및 分散은 (5, 7)에서 얻어진다.

$$E(z|y)=\sum_{z=0}^{\infty}zp(z|y)=\frac{a^{2T}}{1+b}y+\frac{\nu}{b}(1-\frac{a^{2T}}{1+b}) \qquad (5,9)$$

$\sum_{z=0}^{\infty}z(z-1)\ P(z|y)$을 計算하고 이것과 (5, 9)에서

$$V(z|y)=\frac{a^{2T}}{b(1+b)^2}(a^{2T}b^2+b-a^{2T}+2)y$$
$$+\frac{a^{2T}}{b^2(1+b)^2}(b^3+4b^2+2b+1)\nu+\frac{(1-a^{2T})(1-a^{2T}+b)}{b^2}\nu \qquad (5,10)$$

를 얻음. 윗式에서 $E(z|y)$ $V(z|y)$가 둘 다 y의 一次式으로 되어 있다. (5, 9)에서 T가 크게 되면 y의 影響은 적지 않다.

$$\lim_{T\to\infty}E(z|y)=\frac{\nu}{b},\quad \lim_{T\to\infty}V(z|y)=\frac{\nu(1+b)}{b^2}$$

가 된다. 이들 式의 右邊은 各各 周邊分布의 條件 없는 平均値 및 分散이다. 다음에 y와 z의 相關係數를 求하면

$$Cor(y,z)=E(yz)-E(y)\ E(z)=\frac{\nu a^{2T}}{b^2}$$

이므로

(5, 6)에서

$$\rho(y,z)=\rho(T)=\frac{a^{2T}}{1+b} \qquad (5,11)$$

를 얻음. 여기서 (5, 9)에 있어서의 y의 係數는 y와 z의 相關係數임을 알 수 있다.

다음에 ν, a, b의 推定에 있어서 b와 ν의 推定値 $\hat{b}$와 $\hat{\nu}$는 (5, 5)와 (5, 6)에서의 moment法에 依하여 求할 수 있다. y의 標本平均을 $\bar{y}$, 標本分散을 $\hat{\sigma}_y{}^2$라고 하면

$$\hat{b}=\frac{\bar{y}}{\hat{\sigma}_y^2-\bar{y}}, \qquad \hat{\nu}=\frac{\bar{y}^2}{\hat{\sigma}_y^2-\bar{y}} \tag{5,12}$$

가 됨. a의 推定에는 $E(y,z)=\nu(\nu+a^{2T})/b^2$을 利用할 수 있다. 卽

$$r_T=\frac{1}{N-T}\sum_{t=1}^{N-T} x_t x_{t+T}=\frac{\nu(\nu+a^{2T})}{b^2} \tag{5,13}$$

에 있어서 (5,12)를 代入하여 a^{2T}에 關하여 풀면

$$a^{2T}=\frac{r_T-\bar{y}^2}{\hat{\sigma}_y-\bar{y}} \tag{5,14}$$

$T=1$이라고 하면 $\hat{a}^2$가 얻어진다.

이 $\hat{a}^2$에 對해서 $T=2,3,\cdots\cdots$라고 해도 (5,14)가 標本誤差의 範圍에서 成立되어야 한다. 그렇지 아니한 경우에는 model은 不適合하여 진다.

參 考 文 獻

(1) W. Feller: *An Introduction to Probability Theory and its Application I.* (1970) pp. 444~481.

(2) N. L. Johnson: *Uniqueness of a result in the theory of accident pronenenss,* Biom. Vol. 44 (1957) Part 1~2 pp. 530~531.

(3) 河田敬義：確率論 (1950) pp. 303~332.

(4) K. L. Chung and Ornstein Donald: *On recurrence of sums of random variables,* Bull. Amer. Math. Soc. Vol 68 (1962), pp. 30~32.

全北大學校