Bull. Korean Math. Soc.
Vol. 13, No. 1, 1976

Abel 圈의 正規完備化에 關하여

任 昌 求

1. 序 言

圈$\boldsymbol{A}$가 完備圈(complete category) $\boldsymbol{C}$의 充滿部分圈(full subcategory)이고 $\boldsymbol{A}$를 包含하는 $\boldsymbol{C}$의 完備充滿眞部分圈이 存在치 않을 때 $\boldsymbol{C}$를 $\boldsymbol{A}$의 完備化(completion)라 한다[7].

圈의 完備化에 關한 硏究가 主로 C. Ehresmann [2], J. Lambek [13] 및 J. R. Isbell ([7], [10])에 依하여 이루워졌고 特히 J. Lambek 가 提起한 小圈(small category) $\boldsymbol{A}$에서 集合의 圈 $\boldsymbol{Set}$로의 函手들의 圈[$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{Set}$]의 餘完備性의 問題(cf. [13, pp. 21])를 J. F Kennison이 [12]에서 解決하고 그 後에 圈의 完備化에 關한 여러 性質들이 P. J. Freyd와 G. M. Kelly [5] 및 P. Gabriel과 F. Ulmer [4]에 依하여 發表되었고 特히 Abel圈의 完備化에 關한 硏究結果가 H. Herrlich와 G. E. Stauffer [16]에 依하여 發表되였다.

또 圈의 正規完備化(normal completion) (定義6. 參照)에 對한 硏究結果가 J. R. Isbell에 依하여 [7], [8]에서 發表되였고 J. F. Kennison는 完備圈$\boldsymbol{C}$의 充滿小部分圈$\boldsymbol{A}$의 正規完備化는 $\boldsymbol{C}$가 雙圈(bicategory) (定義8. 參照)의 構造을 갖일 때 存在 함을 밝혔다[11].

本論文에서 圈의 完備化및 正規完備化의 性質을 2節에서 論하고 3節에서 圈$\boldsymbol{A}$의 歸納的對象圈(category of inductive objects) $\bar{\boldsymbol{A}}$가 完備이고 $\boldsymbol{A}$는 $\bar{\boldsymbol{A}}$로 充滿埋藏됨을 證明하고 4節에서 完備 Abel圈는 그 小充滿部分圈의 正規完備化을 갖임을 證明하였음.

여기서 使用되는 用語및 記號는 主로 [7] [14]에 따른다.

2. 圈의 完備化

完備圈$\boldsymbol{A}$에서 圈$\boldsymbol{C}$까지의 函手 G가 圖式(diagram)들의 極限을 保存 한다면 G를 閉函手(closed functor)라 한다.

定義 1. 圈$\boldsymbol{C}$의 部分圈$\boldsymbol{B}$의 埋藏函手가 閉函手 일때 $\boldsymbol{B}$를 **眞性閉部分圈**(essentially closed subcategory)이라한다. 또 이 때 定義域이 $\boldsymbol{B}$에 있는 $\boldsymbol{C}$에서의 모든 同型射가 $\boldsymbol{B}$에 있다면 즉 同型閉(isomorphism-closed) 이면 $\boldsymbol{B}$를 **閉部分圈**(closed subcategory)이라 한다.

定義 2 A, B,가 圈 C의 部分圈이고 $I: A \longrightarrow C$, $J: B \longrightarrow C$를 各各 埋藏函手라 할때 ST와 TS가 各各 恒等函手 1_B, 1_A와 自然同型 (natural isomorphism)이고 또 JS가 I에 自然同型이며 IT가 J에 自然同型이 되는 函手 $S: A \longrightarrow B$, $T: B \longrightarrow A$가 存在 한다면 A와 B는 C에서 **同値**(equivalence)라 한다.

補助定理 1. 圈C의 모든 眞性閉充滿部分圈는 唯一한 閉充滿部分圈과 C에서 同値이다.

證明 B를 C의 眞性閉充滿部分圈이라 하고 I를 B의 C內로의 埋藏閉函手 또 $I(B)$는 그對象을 定義域으로 하는 C의 모든 同型射가 $I(B)$에 있도록하는 對象들로된 充滿部分圈이라 하자.

$I(B)$에서의 圖式 $E: E \longrightarrow C$의 極限을 $\{\phi(i): L \longrightarrow E(i)\}_{i \in E}$ 라면 $E(i) \in I(B)$이므로 B에서의 圖式 $D: E \longrightarrow B$를 얻는다. 但 모든 $i \in E$에 對하여 $E(i) = ID(i)$이다.

B가 眞性閉充滿部分圈 이므로 圖式D의 B에서의 極限$\{\Psi(i): Y \longrightarrow D(i)_{i \in E}$가 存在하고 $I(Y)(\in I(B))$는 圖式E의 極限이다. 따라서 $(I(Y) \cong L$이고 $I(B)$는 閉充滿部分圈 이다. 이리하여 本補助定理를 얻는다.

定義 3. 圈C의 部分圈B가 $I: B \longrightarrow C$에 依하여 充滿埋藏되고 I가 極限保存函手이고 C에서 極限을 갖는 B에서의 모든 圖式이 B에서 極限을 갖는다면 즉 I가 極限을 만든다면(I creates the limits) B를 **普遍部分圈**(universal subcategory)이라 한다.

圈C의 部分圈B가 $I: B \longrightarrow C$에 依하여 埋藏되고 I가 極限保存函手이면 B를 **極限保存部分圈**(limit-conservative subcategory)이라 한다.

定義 4. A를 圈C의 部分圈이라 할때 A가 極限保存部分圈이 될수 있는 C의 最大充滿部分圈 B를 A의 **充滿칸텍크트**(full context)라 한다. 즉 充滿칸텍크트 B는 A에 있어서 모든 圖式D의 極限L에 對하여 D를 C에서의 圖式으로 생각하고 $\{\phi'(j): X \longrightarrow D(j)\}_{i \in D}$ 를 D의 兩立族(compatible family)이라 할 때 $(X \longrightarrow D(j) = X \longrightarrow L \longrightarrow D(j))$인 g가 唯一히 존재 할수 있는 X들로 이루워진 充滿部分圈이다. 但$D: D \longrightarrow A$.

雙對的으로 **餘閉函手**(co-closed functor), **眞性餘閉部分圈**(essentially co-closed suhcategory), **餘普遍部分圈**(co-universal subcategory), **充滿餘칸텍크트**(full co-context)를 定義한다.

〔注〕 [7], [8]에서 閉函手, 餘閉函手等을 各各左閉函手(left closed functor), 右閉函手(right closed functor)로 定義하고 있음.

定理 1. 圈C의 部分圈A의 充滿칸텍크트B는 餘普遍部分圈이다.

證明. $E: \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{C}$를 $\boldsymbol{B}$에 있어서의 圖式, $\{\phi(i) : E(i)R\}_{i\in E}$를 圖式$E$의 $\boldsymbol{C}$에서의 餘極限(colimit)이라 하고 $\{\Psi(j):L\to D(j)\}_{i\in D}$를 圖式$D: \boldsymbol{D} \longrightarrow \boldsymbol{A}$의 $\boldsymbol{A}$에서의 極限이라 하자.

또 $\{\Lambda(j) : R \longrightarrow ID(j)\}_{j\in D}$를 $\boldsymbol{C}$에서의 圖式 ID의 兩立族이라 하자. 但I: $\boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{C}$는 包含函手이다.

射$\Lambda(j)$와 $\phi(i)$는 合成射 $\Lambda(j)\phi(i) : E(i) \longrightarrow R \longrightarrow D(j)$를 갖는다. 이 때모든 $i\in \boldsymbol{E}$에 對하여$E(i)\in \boldsymbol{B}$이고, $j\in \boldsymbol{D}$에 對하여 $[\Lambda\phi(i)](j) = \Lambda(j)\phi(i)$로 定義하면 $\{[\Lambda\phi(i)](j) : E(i) \longrightarrow R \longrightarrow ID(j)\}_{j\in D}$는 $\boldsymbol{C}$에서의 圖式 ID의 兩立族이 된다. $\boldsymbol{B}$가 充滿칸텍크트 이므로 $\Lambda(j)\phi(i) = \Psi(j)f(i)$로 되는 射 $f(i)$: $E(i) \longrightarrow L$가 唯一히 存在 한다.

그러므로 $\mu: i \longrightarrow k(\in \boldsymbol{E})$에 對하여 $f(k)E(\mu) = f(i)$이고 $\{f(i) : E(i) \longrightarrow L\}_{i\in E}$는 圖式 D에 對한 餘兩立族(co-compatible family)이 된다.

따라서 모든 $i\in \boldsymbol{E}$에 對하여 $(g\phi(i) = f(i)$인 $g: R \longrightarrow L$가 唯一히 存在 한다. 한편 모든 $i\in \boldsymbol{E}$에 對하여 $\Lambda(j)\phi(i) = \Psi(j)f(i) = \Psi(j)g\phi(i)$, 이리하여 $\Psi(j)g = \Lambda(j)$임을 알수 있다. 모든 $j\in \boldsymbol{D}$에 對하여 $\Psi(j)g' = \Lambda(j)$인$g' : R \longrightarrow L$이 存在 한다면 $\Psi(j)g'\phi(i) = \Lambda(j)\phi(i) = \Psi(j)f(i)$이므로 $g'\phi(i) = f(i)$이고 $g = g'$이다. 따라서 $\{\Psi(j) : L \longrightarrow ID(j)\}_{j\in D}$는 圖式 ID의 極限이고 $R\in \boldsymbol{B}$이다. 즉 R는 $\boldsymbol{B}$에서의 圖式의 $\boldsymbol{B}$에 있어서의 餘極限이고 $\boldsymbol{B}$는 包含函手에 의하여 $\boldsymbol{C}$로 埋藏된다. 이리하여 $\boldsymbol{B}$는 餘普遍部分圈이다.

定義 5. 圈$\boldsymbol{C}$의 部分圈$\boldsymbol{A}$를 包含하는 모든 $\boldsymbol{C}$의 充滿閉部分圈의 共通部分을 $\boldsymbol{A}$의 充滿閉包(full closure)라 한다. 또 $\mathbf{A}$를 包含하는 $\mathbf{C}$의 充滿普遍部分圈들의 共通部分圈을 $\boldsymbol{A}$의 **充滿普遍閉包**(full universal closure)라 한다.

雙對的으로 **充滿餘閉包**(full co-clesure)및 **充滿餘普遍閉包**(full couniversal closure)을 定義한다.

系, 圈$\boldsymbol{C}$의 完備充滿部分圈$\boldsymbol{A}$는 $\boldsymbol{A}$의 充滿餘普遍閉包에서 眞性閉部分圈이 된다.

證明 $\boldsymbol{A}$는 $\boldsymbol{A}$의 充滿칸텍크트$\boldsymbol{B}$에 包含되고 定理 1에 依하여 $\boldsymbol{B}$는 充滿餘普遍이다. 이리하여 $\boldsymbol{B}$는 $\boldsymbol{A}$의 充滿餘普遍閉包$\boldsymbol{F}$를 包含 하므로 $\boldsymbol{A}$의 $\boldsymbol{F}$內로의 埋藏函手는 極限保存函手이다. 따라서 $\boldsymbol{F}$는 眞性閉部分圈이다.

定義 6. $\boldsymbol{A}$를 完備圈$\boldsymbol{C}$의 充滿部分圈이라 할때 $\boldsymbol{A}$의 閉包와 餘閉包가 다같이 $\boldsymbol{C}$이면 $\boldsymbol{C}$를 $\boldsymbol{A}$의 **正規完備化**(normal completion)이라 한다.

$\boldsymbol{C}$를 $\boldsymbol{A}$의 正規完備化라 하고 $\boldsymbol{B}$를 $\boldsymbol{A}$를 包含하는 完備充滿部分圈이라 하면 $\boldsymbol{B}$의 餘閉包는 $\boldsymbol{A}$의 餘閉包을 包含하고 $\boldsymbol{A}$의 餘閉包는 $\boldsymbol{C}$이므로 $\boldsymbol{B}$의 餘閉包도 $\boldsymbol{C}$이다.

定理 1의 系에 依하여 $\boldsymbol{B}$는 眞性閉充滿部分圈이다. 補助定理 1에 依하여 $\boldsymbol{B}$는 $\boldsymbol{C}$에서 $\boldsymbol{C}$와 同値이다. 雙對的으로 $\boldsymbol{A}$를 包含하는 餘完備充滿部分圈도 $\boldsymbol{C}$에서 $\boldsymbol{C}$와 同値임을 알수 있다. 따라서 다음 定理를 얻는다.

定理 2. 圈$\boldsymbol{A}$의 正規完備化는 $\boldsymbol{A}$의 完備化이다.

圈$\boldsymbol{A}$의 完備化$\boldsymbol{C}$가 正規完備化라면 $\boldsymbol{A}$를 包含한 $\boldsymbol{C}$의 完備充滿部分圈및 餘完備充滿部分圈은 $\boldsymbol{C}$에서 $\boldsymbol{C}$와 同値이다. 反對로 $\boldsymbol{A}$를 包含한 $\boldsymbol{C}$의 모든 完備充滿部分圈과 餘完備充滿部分圈이 $\boldsymbol{C}$에서 $\boldsymbol{C}$와 同値라면 $\boldsymbol{A}$의 充滿閉包및 充滿餘閉包도 $\boldsymbol{C}$와 同値 이므로 $\boldsymbol{C}$는 $\boldsymbol{A}$의 正規完備化가 된다.

定理 3. 圈$\boldsymbol{A}$의 完備化$\boldsymbol{C}$는 $\boldsymbol{A}$를 包含하는 $\boldsymbol{C}$의 모든 完備部分圈및 餘完備充滿部分圈이 $\boldsymbol{C}$에서 $\boldsymbol{C}$와 同値 일때에 限하여 $\boldsymbol{A}$의 正規完備化가 된다.

3. 歸納的對象圈

A. Grothendiek [15]와 H. B. Stauffer [16]에 論述한 方法을 使用해서 圈$\boldsymbol{A}$로 부터 새로운 圈$\tilde{\boldsymbol{A}}$를 만들고자함.

$\boldsymbol{I}$를 有向集合(圈으로생각함), 이라 할 때 圖式 $\tilde{A} : \underset{\substack{\cup \\ i}}{\boldsymbol{I}} \longrightarrow \underset{\substack{\cup \\ A_i}}{\boldsymbol{A}}$에 對한 餘極限을 **歸納的極限**(inductive limit)이라 하고 $\underset{\overleftarrow{i}}{\lim} \boldsymbol{A}_i$로 表示하고 또 有向集合을 定義域으로 갖는 $\boldsymbol{A}$에서의 모든 圖式에 對하여 歸納的極限을 갖는다면 $\boldsymbol{A}$는 **歸納的極限下**에서 닫혔다고 한다. 雙對的으로 $\tilde{A}$에 對한 極限을 **射影的極限** (projective limit)이라 하고 $\underset{\overleftarrow{i}}{\lim} \boldsymbol{A}$로 表示한다(cf. [14, pp. 47–49]).

위에서 말한 圖式$\tilde{A}$를 $\boldsymbol{A}$의 歸納的對象(inductive object, 簡單히 ind-object)라 한다.

두개의 歸納的對象 $\tilde{A} : \boldsymbol{I} \longrightarrow \boldsymbol{A}$, $\tilde{B} : \boldsymbol{J} \longrightarrow \boldsymbol{A}$에 對하여 $\tilde{A}$에서 $\tilde{B}$까지의 射를 다음과 같이 定義한다. 즉 모든 $i \in \boldsymbol{I}$와 函手 $\phi : \boldsymbol{I} \longrightarrow \boldsymbol{J}$에 對하여

$$\begin{array}{ccc} A_i & \longrightarrow & \underset{\overrightarrow{i}}{\lim} A_i \\ {\scriptstyle f_i}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle g} \\ B_{\phi(i)} & \xrightarrow[b\phi(i)]{} & \underset{\overrightarrow{j}}{\lim} B_j \end{array}$$

인 g를 $\tilde{A}$에서 $\tilde{B}$까지의 射라 하자. 그러면 $\{A_i \longrightarrow B_{\phi(i)} \longrightarrow \underset{\overrightarrow{j}}{\lim} B_i\}_{i \in I}$는 $\tilde{A}$의 餘兩立族이므로 위 圖形을 만족하는 射 g는 唯一히 存在한다. 따라서 g는 모든 $i \in I$에 對하여 f_i와 ϕ에 依해서 決定 되므로 g를 한 順序雙 $(\phi_1 f_i)_{i \in I}$ 또는 簡

單히 (ϕ, f)로 表示한다. 즉 $Hom(\tilde{A}, \tilde{B}) = Hom(\varinjlim_i A_i, \varinjlim_i B_j)$이다.

$Hom(\tilde{A}, \tilde{B})$에서 $(\phi, f_i)_{i\in I}$와 $(\phi', f_i')_{i\in I}$는 모든 $i\in I$에 對하여 $A_i \xrightarrow{f_i} B_{\phi(i)} \longrightarrow B_j = A_i \xrightarrow{f_i'} B_{\phi(i)} \longrightarrow B_j$와 같이 되고 $j \geqq \phi(i), \phi'(i)$인 $j\in J$가 存在할때에 限해서 同値가 된다. A의 歸納的對象들의 類를 $\bar{A}$로 表示하자. 다음에 $\bar{A}$에서 $\tilde{C} : K \longrightarrow A$, $I \xrightarrow{\Phi} J \xrightarrow{\Psi} K$라하고 두개의 射 $(\Psi, g_j)_{j\in J}\tilde{B} \longrightarrow \tilde{C}$, $(\phi, f_i)_{i\in I} : \tilde{A} \to \tilde{B}$에 對하여 $(\Psi, g_j)_{j\in J}\ (\phi, f_i)_{i\in I} = (\Psi\Phi, g_{\Phi(i)}\ f_i)\ _{i\in I} :\ \tilde{A} \longrightarrow \tilde{C}$라면 이것은 $\bar{A}$에서 射들의 合成이 된다. 따라서 $\bar{A}$는 이들 射와 結合法을가지고 圈을 이룬다. 이 圈을 A의 **歸納的對象圈**이라 한다.

S를 元素 하나만을 가진 集合이라 할때 S에서 A까지의 函數를 $s_A : \begin{matrix} S \longrightarrow A \\ \cup\!\!\!\!\shortmid \quad\ \cup\!\!\!\!\shortmid \\ s \longmapsto A \end{matrix}$ 로 表示하자.

$\tilde{A}\in\bar{A}$, $(\tilde{A} : I \longrightarrow A)$에 對하여 $(h_{\tilde{A}} = Hom(\ \ , \varinjlim_i A_i) :$ A※$\longrightarrow Set$를 對應시키면

Yoneda 補助定理에 依하여 全單射

$\Psi :$ Hom$(h_{\tilde{A}},\ h_{\tilde{B}}) \longrightarrow$ Hom$(\varinjlim_i A_i,\ \varinjlim_j B_j)$를 얻는다. 但 A※는 A의 雙對圈이다.

따라서 函手 $F : \bar{A} \longrightarrow [A$※$, Set]$는 充滿忠實埋藏函手이다. 但$F(\tilde{A}) = h_{\tilde{A}}$

定義 7. 函手 $h_{\tilde{A}}$와 自然同型인 函手$G : A$※$\longrightarrow Set$를 **歸納的表現可能函手** (inductive representable functor)라 한다.

定理 4. 圈A의 歸納的對象圈$\bar{A}$는 $[A$※$,\ Set]$로 充滿忠實埋藏되고$[A$※$, Set]$의 歸納的表現可能函手로된 充滿部分圈과 同値이다.

다음에 $\bar{A}$에서의 圖式 $D : K \longrightarrow \bar{A}$에 對한 餘極限을 求하고저 한다.

I_k $(k\in K)$를 有向集合이라 하고 $D(k) = \tilde{A}_k : \begin{matrix} I \longrightarrow A \\ \cup\!\!\!\!\shortmid \quad\ \cup\!\!\!\!\shortmid \\ i \longmapsto A_{ki} \end{matrix}$라 하자.

또 $\mu : k \longrightarrow k' \in K$에 對하여 $D(\mu)$를 다음 圖式

$$\begin{array}{ccc} A_{ki} & \longrightarrow & \varinjlim_i A_{ki} \\ {\scriptstyle f_{ki\phi}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D(\mu)} \\ A_{k'\phi(i)} & \longrightarrow & \varinjlim_j A_{k'j} \end{array} \qquad \text{(可換)}$$

이 可換이 되는 $f_{ki\phi}$와 $\phi : I_k \longrightarrow I_k$와의 짝$(\phi,\ f_{ki\phi})$로 定한다.

$M = U_{k\in K} I_k$라 하고 $(Hom\ (k, k') \neq \phi,\ Hom\ (\phi(i),\ j) \neq \phi$ (但 $i\in I_k,\ \ j\in I_k$) 일때에 限해서 M에서 $i \leqq j$라면 M는 이 順序에 關해서 有向集合이된다.

$\tilde{T}: M \longrightarrow A$, 任意의 $i\in I_k\subset M$ 와 $i_\mu: i\longrightarrow j\in M$에 對하여 $\tilde{T}(i)=A_{ki}$, $\tilde{T}(i_\mu)$: $A_{ki}\xrightarrow{f_{ki\phi}}A_{k'\phi(i)}\longrightarrow A_{k'j}$라면 $\tilde{T}\in\bar{A}$ 이다.

K에서 A로의 한 定値函手(constant functor)를 $Const\tilde{T}$라 하고 $\mu: k\longrightarrow k'\in K$에 對하여 $(I_k\xrightarrow{\phi}M=I_k\xrightarrow{\phi}I_{k'}\xrightarrow{\psi'}M)$라 하자. 또 $\eta: D\longrightarrow const\tilde{T}$ 라면

$$\begin{tikzcd} A_{ki} \arrow[r] \arrow[d, "f_{ki\phi}"'] & \varinjlim_{i} A_{ki} \arrow[d] \\ A_{\phi(i)} \arrow[r] & \varinjlim_{M\ni i} A_{ki} \end{tikzcd} \qquad (\text{可換})$$

이고

$$\begin{tikzcd} A_{ki} \arrow[r] \arrow[d, "f_{ki\phi}"'] & \varinjlim_{i} A_{ki} \arrow[d, "D(\mu)"] \\ A_{k'\gamma(i)} \arrow[r] \arrow[d, "f_{k'\phi\phi'}"'] & \varinjlim_{j} A_{k'j} \arrow[d, "\eta_{k'}"] \\ A_{\phi\phi(j)} = A_{\phi(i)} \arrow[r] & \varinjlim_{M\ni j} A_{k'j} = \varinjlim_{M\ni j} A_{ki} \end{tikzcd} \qquad (\text{可換})$$

따라서

$$\begin{tikzcd} D(k) \arrow[r, dash, "\eta_k"] \arrow[d, "(D\mu)"'] & \tilde{T} \arrow[d, equal] \\ D(k') \arrow[r, dash, "\eta_{k'}"'] & \tilde{T} \end{tikzcd}$$

즉 η는 自然變換이다.

$$\tilde{X}: N\longrightarrow A(\in\bar{A},)\ \ I_k\xrightarrow{\theta}N=I_k\xrightarrow{\phi}I_{k'}\xrightarrow{\theta'}N$$

에 對하여

$$\begin{tikzcd} D(k) \arrow[d, "D(\mu)"'] \arrow[dr, "\xi_k"] & \\ D(k') \arrow[r, "\xi_{k'}"'] & \tilde{X} \end{tikzcd}$$

(可換)

이라면 $\varinjlim_{M\in i}{}^{i} A_{ki}=\varinjlim_{Ik\subset M}(\varinjlim_{i} A_{ki})$이므로 $\xi_k=\alpha\cdot\eta_k$인 $\alpha\in\bar{A}$가 唯一히存在한다.

즉

$$\begin{tikzcd} A_{ki} \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim_{i} A_{ki} \arrow[r, "\xi_k"] \arrow[d] & \varinjlim_{M\ni i} A_{ki} \arrow[dl, dashed, "\alpha"] \\ A_{\theta(i)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \varinjlim_{N\ni j} A_{kj} & \\ A_{\theta'\phi(i)} & & \end{tikzcd}$$

(可換)

따라서 $\tilde{T}$는 圖式D이 餘極限이다. 雙對的으로 D의 極限을 求할수 있다.

또 $E: \underset{A1}{A} \longrightarrow \underset{SA}{A}$라면 $f: A\longrightarrow B\in A$에 對하여 $E(f)=(l_s, f)$, 但 $1_s: S\longrightarrow S$, $S=\{s\}$이므로 E는 A에서 $\bar{A}$內로의 充滿埋藏函手가 된다.

定理 5. 圈A의 歸納的對象圈$\bar{A}$는 完備圈이고 A는 $\bar{A}$로 充滿埋藏된다.

補助定理 2, $\bar{A}$가 Abel圈이면 그歸納的對象圈$\bar{A}$도 Abel 圈이다[16].

4. Abel圈의 正規完備化

I와 P를 各各 圈A의 모든 同型射를 包含한 部分圈이라하고 I의 射를 **標準單射**(canonical injection), P의 射를 **射影**(projection)이라 한다.

定義 8. 圈A 및 그部分圈I, P,의 順序의 짝 $C=(A, I, P)$가 다음 條件을 滿足 할때 C를 A의 **雙圈**(bicategory)이라 한다.

(1) A의 모든 射 f는 gh로 表示된다. 但 $g\in I$,

(2) 모든 標準單射는 單射이고 모든 射影은 全射이다. [9]

補助定理 3. 圈A에서 全射이고 單射인 射가 恒常同型射일때 A의 雙圈을 唯一히 만들수 있다[7].

圈C의 單射 $i=jk$(但k는 全射)일때 k가 同型射라면 i를 極值的單射 (extremal monomorphism)라 한다. 雙對的으로 極值的全射가 定義된다(extremal epimorphism) [6, pp. 110].

M를 圈C의 모든 單射의 類(class) E를 모든 全射의 類, M°, E°를 各各 C의 모든 極值的單射의 類, 極值的全射의 類라 하자. $M'\subset M$이고 C의한 對象

B의 部分對象A에 對하여 $m: A\longrightarrow B$이 M'의 單射m'로 表現될때(즉 $m=m'p$) A를 M'-部分對象(M'-subobejct)라 한다.

$\boldsymbol{C}$의 充滿部分圈$\boldsymbol{A}$의 對象들로된 모든積(product)XA_i, ($A_i\in\boldsymbol{A}$)를 對象으로 한 $\boldsymbol{C}$의 充滿部分圈을 $\boldsymbol{Pr}(A)$로 表示하고, $\boldsymbol{A}$의 對象들의 모든 部分對象으로 된 $\boldsymbol{C}$의 充滿部分圈을 $\boldsymbol{Sb}(A)$로 또 $\boldsymbol{A}$의 對象들의 모든 M'-部分對象으로된 $\boldsymbol{C}$의 充滿部分圈을 M'-$Sb(\boldsymbol{A})$로 表示한다.

補助定理 4. $\boldsymbol{A}$를 完備圈$\boldsymbol{C}$의 小充滿部分圈이라하고 (M, E)를 $\boldsymbol{C}$上의 雙圈의 構造라할때 $M^\circ-Sb(Pr(\boldsymbol{A}))$는 $\boldsymbol{A}$의 正規完備化이다[11].

定理 6. 完備Abel圈는 小充滿部分圈의 正規完備化를 갖는다.

證明 $\boldsymbol{C}$를 完備Abel圈이라하고 $\boldsymbol{A}$를 $\boldsymbol{C}$의 小充滿部分圈이라 할때 모든 全單射는 恒常 同型射가 된다(cf. [6. pp 97]).

M, E를 各各 $\boldsymbol{C}$의 標準單射類, 射影類로 하면 補助定理3에 依하여 $(\boldsymbol{C}, M, E)$는 雙圈이 된다. 補助定理4에 依하여 $\boldsymbol{A}$의 正規完備化가 存在한다.

例 1. 定理4와 補助定理2에 依하여 小Abel圈$\boldsymbol{A}$의 歸納的對象圈$\bar{\boldsymbol{A}}$는 完備Abel圈이고 $\boldsymbol{A}$를 $\bar{\boldsymbol{A}}$의 充滿部分圈으로 생각하면 定理6과 補助定理4에 依하여 $\boldsymbol{A}$의 對象들의 모든 積을 對象으로 하는 $\bar{\boldsymbol{A}}$의 充滿部分圈에서 $\bar{\boldsymbol{A}}$의 極値的單射로 表現되는 모든 M°-對象으로된 充滿部分圈이 $\boldsymbol{A}$의 正規完備化이다.

例 2. 小Abel圈$\boldsymbol{A}$에서 모든 Abel群의 圈$\boldsymbol{Ab}$까지의 加法的函手의 圈$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{Ab}]$는 完備Abel圈이고(cf. [3, pp. 110]), $H: \underset{\underset{A}{\Psi}}{\boldsymbol{A}^{*}} \longrightarrow \underset{\underset{h_A}{\Psi}}{[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{Ab}]}$, (但 $h_A=Hom(,A),)$는 充滿埋藏函手이다(cf. [3, pp. 115]).

$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{Ab}]$에서 모든 單射(全射)는 極値的單射(全射)(cf. [6, pp. 111])이므로 $H(\boldsymbol{A}^{*})$를 $\boldsymbol{A}$와 같이 생각할때 補助定理4에 依하여 $\boldsymbol{A}$의 對象들의 모든 積들로된 $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{Ab}]$의 充滿部分圈$\boldsymbol{Pr}(\boldsymbol{A})$가 $\boldsymbol{A}$의 正規完備化임을 알수있다.

參 考 文 獻

[1] I. Bucur. and A. Deleanu, *Introduction to the theory of categories and functors*, John wiley, New York 1968.

[2] C. Ehresmann, *Complétion des catégories ordonnées*, C.R. Acad. Sci, Paris, **257** (1963) 4110–4113.

[3] P. Freyd, *Abelian categories*, Harper, & Row New York, 1966.

[4] P. Gabriel and F. Ulmer, *Lokal präsentierbar Kategorien*, Lecture Notesin math. **221** (Springer) 1971.

[5] P.J. Freyd and G.M. Kelly; *Categories of continuous fuuctors I*, J. Pure Appl. Algebra. **2** (1972) 169–191.

[6] H. Herrlich and G. E. Strecker: *An introduction to category theory,* Allyn and Bacon, Boston, 1973.

[7] J. R. Isbell, *Structure of categories,* Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 619–655.

[8] ______, *Normal Completions of categories,* Lecture Notes in Math. **47**, (Springer) 1967

[9] ______, *Some remarkes concerning categories and subspaces,* Canad J. Math. **IX**, No 4, (1957) 563–597.

[10] ______ *Subobjects, adequacy, completenees and categories of algebra,* Rozprawy. Mat. **XXXVI** (1964) 1–32.

[11] J. F. Kennison; *Normal completion of small categories,* Canad, J. Math, **XXI** (1969) 196–201.

[12] ______, *On limit-preserving functors,* Ill. J. Math. **12** (1968) 616–619.

[13] J. Lambek, *Completions of categories,* Lecture Notes in Math. **24** (Springer) 1966.

[14] B. Mitchell, *Theory of categories,* Academic New York, 1965.

[15] A. Grothendieck *Technique de descente et theore mes déxistence en géometrie algebrique,* (Extraits du seminaire Bourbaki), Paris n°**190** (1959–1960,) 1–29.

[16] H. B. Stauffer, *The completion of abelian* category, Trans. Amer. Math. Soc. **170**, 1972, 403–414.

〔本硏究는 1975年度 產學協同財團의 支援에 依함〕

仁荷大學校