Bull. Korean Math. Soc.
Vol. 13, No. 1, 1976

完閉벡터場의 理論에 관한 小考

申 鉉 千

1. 序 論

이 小論에서는 完閉벡터場의 槪念과 그 基本的인 性質들을 소개하고, 이 理論의 應用面과 最近의 成果에 對하여 간단히 言及하기로 한다.

完閉벡터場의 槪念은 원래 J. Leray와 J. Schauder [3]에 기원하는 것으로서, F가 Banach空間사이의 完閉寫像일 때 $x=F(x)$ 꼴의 方程式의 解의 存在와 관련되어 나타난 槪念이다. 이 方程式의 解가 바로 그에 대응하는 完閉벡터場 $f(x)=x-F(x)$의 特異點이 되는 것이다.

이 理論에서 주요한 역할을 하는 개념은 完閉場의 호모토피와 完閉場의 擴張이다. 이들 개념은 다음과 같은 擴張問題를 해결하는 과정에서 일어난 것이다. 즉 "한 Banach 空間의 閉部分集合에서 定義된 特異點없는 完閉벡터場이 주어졌을때 이 場을 그 閉部分集合을 포함하는 集合에서 定義된 特異點 없는 完閉벡터場으로 擴張할 수 있는가?"

그 문제의 해결과정에서 이같은 擴張의 存在는 주어진 特異點없는 完閉벡터場의 호모토피類에 달려있다는 것이 알려짐으로써, 가장 중요한 결과인 호모토피 擴張定理 하나가 얻어지는 것이다. 이들 결과는 方程式 $x=F(x)$ 꼴의 解의 存在와 밀접한 관련이 있으며 後述하는바와 같이 수많은 重要한 應用面을 가진다.

따라서 먼저 위의 호모토피 擴張定理에 이르는 기본적인 이론을 주로 Granas [1], [2]에 따라 해설하기로 한다. Banach 空間의 초보적인 이론에 관한 지식을 가정하기로 하며, 모든 寫像은 連續인 것으로 한다.

2. 特異點없는 完閉벡터場

앞으로 하나의 정해진 Banach 空間을 E로 나타내고, 그것의 한 n次元部分空間을 E_n으로 나타내기로 한다. 또 $P=E-\{O\}$, O는 原點을 나타낸다. 이제 X, Y를 E의 임의의 部分集合이라 하자.

定義. 한 寫像 $f: X\to Y$가, X에서 定義된 한 完閉寫像 $F: X\to E$에 대하여

$$f(x)=x-F(x),\quad x\in X$$

로 주어졌을때, 이 f를 X에서의 한 **完閉벡터場**(compact vector field) 또는 간단히 **完閉場**이라 부른다. 이같은 完閉場 전체의 集合을 $C(Y^X)$로 나타낸다.

그러면 $C(Y^X)$는 X에서 Y로 가는 寫像전체의 集合 Y^X에 포함된다.

定義. 한 完閉벡터場 $f: X \to Y$가 **有限次元**이라 함은, 그 定義에 들어있는 F가 有限次元일 때, 즉 F가 完閉이고 $F(X)$가 E의 어떤 有限次元部分空間 E_n에 포함됨을 말한다. 이들 有限次元完閉場으로 이루어진 $C(Y^X)$의 部分集合을 $C_o(Y^X)$로 나타낸다.

앞으로 $C(Y^X)$를 한 距離空間으로 생각하기로 하며, 그 距離는 흔히 쓰는 다음의 것으로 한다:

$$\rho(f, g) = \sup_{X \in X} \| f(x) - g(x) \|, \quad f, \ g \in C(Y^X).$$

定義. 한 寫像 $f: X \to Y$가, 어떤 完全連續寫像 $F: X \to E$에 대하여 (즉 F가 X의 임의의 有界集合위에서 完閉일때), $f(x) = x - F(x)$ 꼴로 주어질 때 이 f를 X에서의 **完全連續벡터場**이라 부른다.

따라서, 有界인 X에 대하여는 X에서의 完全連續벡터場과 完閉場이라는 두개념은 일치한다.

이들 定義로부터 다음과같은 기본적인 性質들이 얻어진다.

(1). 集合 $C_0(E^X)$는 空間 $C(E^X)$안에서 稠密하다.

이 사실은, 임의의 完閉寫像이 有限次元寫像으로 近似된다는 定理의 결과이다.

(2). X가 E의 閉部分集合이고, $f \in C(E^X)$가 X의 한 完閉場이면, $f(X)$는 E의 한閉部分集合이 된다.

證明. $f(X)$의 한 點列을 $\{y_n\}$, $y_n = f(x_n)$, $x_n \in X$, $y_n = x_n - F(x_n)$이라 두고 $\lim_{n \to \infty} y_n = y_o$이라 가정하자. F가完閉이므로, $F(x_n)$이 어떤點 y_1으로 收斂한다고 가정할 수 있다. 따라서 $\lim_{n \to \infty} x_n = y_0 + y_1$이 되고, f의 連續性으로부터 $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(y_0 + y_1)$, 즉 $y_0 = f(y_0 + y_1) \in f(X)$가 된다.

(3) f가 X에서의 1對1完閉場이고 X가 閉集合이면, f는 兩連續이 되며 f^{-1}는 $f(X)$에서의 完閉場이 된다.

定義. E의 두 集合 X와 Y가 **狹義의 同相**이라 함은, 어떤 位相同型 $h \in C(E^X)$이 존재하여 $Y = h(X)$가 되는 경우를 말한다.

定義. $f \in C(E^X)$가 X에서의 한 完閉場일때, f가 한點 $x_0 \in X$를 原點으로 보내면, x_0을 f의 한 **特異點**이라 부른다. 따라서 特異點없는 完閉場전체의 集合은 바로 $C(P^X)$자신이다.

(4) f가 E의 한 閉集合 X에서 定義된 完閉場일때 f의 特異點 전체의 集合은 完閉이다.

이것은 f의 特異點 전체의 集合이, f에 대응하는 完閉寫像 F의 値域에 포함된다는데서 얻어진다.

(5) f가 E의 閉集合 X에서 定義된 特異點없는 完閉場이고 $0<\varepsilon<\rho(f(X),0)$이라하자. g가 Y에서의 完閉場으로서 $\rho(f,g)<\varepsilon$인 것이면, g도 特異點을 가지지 않는다.

(6) X가 E의 閉集合이면 有限次元完閉場의 集合 $C_0(P^X)$는 $C(P^X)$의 稠密部分集合이 된다.

3. 完閉場의 호모토피擴張定理

定義. 두 完閉벡터場 $f, g\epsilon C(Y^X)$가 호모토피的이라 함은, f와 g 사이의 호모토피 $h\epsilon Y^{X\times I}$로서 다음과 같이 나타나는 것이 존재하는 경우를 말한다.

$$h(x,t)=x-H(x,t),$$

여기에서 $H: X\times I\rightarrow Y$는 完閉寫像이다. f와 g가 호모토피的인것을 $f\simeq g$라 나타낸다. 위에서, $f(x)=x-F(x)$, $g(x)=x-G(x)$일 때, $H(x,0)=F(x)$, $H(x,1)=G(x)$, $x\epsilon X$로 나타난다.

위의 $\simeq$는 분명히 空間 $C(Y^X)$에서의 한 同値關係이며, 따라서 이 空間을 同値類로 나눈다.

다음 성질들도 기본적이다.

(7) $X_0\subset X$이고 $f, g\epsilon C(Y^X)$ 일 때, $C(Y^X)$안에서 $f\simeq g$이면, $C(Y^{X_0})$안에서 $f|_{X_0}\simeq g|_{X_0}$이다.

(8) $Y=E$일 때 X에서의 임의의 두 完閉場 f와 g는 $C(E^X)$에서 호모토피的이다. 이것은 寫像 $h: X\times I\rightarrow E$를

$$h(x,t)=tf(x)+(1-t)g(x)=x-[tF(x)+(1-t)G(x)]$$

라 정함으로써 얻어진다.

앞으로 特異點없는 完閉場, 즉 $Y=P$일 때에 한하여 호모토피의 개념을 생각하기로 한다.

(9) f, g가 X에서의 特異點없는 完閉場이고

$$f(x)=x-F(x),\quad g(x)=x-G(x)$$

이며, 다음 同値인 조건들중 하나가 성립한다고 가정하자.

(i) 임의의 $x\epsilon X$에 대하여, 벡터 $f(x)$와 $g(x)$는 역방향이 아니다.

(ii) 임의의 $x\epsilon X$에 대하여, 原點이 線分 $[f(x), g(x)]$ 위에 있지 않다.

(iii) 임의의 $x\epsilon X$에 대하여 點 x가 線分$[F(x), G(x)]$ 위에 있지 않다.

그러면 두 백터場 f와 g는 $C(P^X)$에서 호모토피的이다.

證明. 이들 세 條件이 同値임은 自明하다. f와 g 사이의 호모토피 h는 다음

식으로 정의 된다.

$$h(x,t)=tf(x)+(1-t)g(x)=\mathbf{x}-[tF(x)+(1-t)G(x)].$$

(10) f와 g가 X에서 特異點없는 完閉場이고

$$f(x)=x-F(x),\ \ g(x)=x-G(x),$$

모든 $x\epsilon X$에 대하여 $\|f(x)-g(x)\|\leq\|f(x)\|$라 하면 f와 g는 $C(P^X)$안에서 호모토피的이다.

證明. 주어진 不等式은 $\|F(x)-G(x)\|\leq\|x-F(x)\|$와 동치이며, 이것이 (9)의 (iii)을 만족한다.

(11) X가 E의 閉集合이고, $f\epsilon C(P^X)$가 X에서의 特異點없는 完閉場이라 하자. 이제 $0<\varepsilon<\rho(f(X),\ 0)$이면, $\rho(f,g)<0$인 $g\epsilon C(P^X)$는 f와 호모토피的이다.

(12) 임의의 完閉場 $f\epsilon C(P^X)$는 어떤 有限次元백터場 $g\epsilon C_0(P^X)$와 $C(P^X)$안에서 호모토피的이다.

(13) $X=B(x_0,\ \nu)$이 E의 한 閉球일때 임의의 特異點없는 完閉場 f와 g는 $C(P^X)$에서 호모토피的이다.

이것의 證明은 좀 기나 역시 初等的이며, 위의 (12)와 Tietze 擴張定理의 결과로서 얻어진다.

定義. 이제 $X,\ Y\subset E,\ X_0\subset X$라 하고, $f\epsilon C(Y^{X_0})$가 X_0에서의 한 完閉백터場이라 하자. 한 寫像 $\bar{f}: X\rightarrow Y$가 f의 X위로의 한 擴張이라 함은

(i) $\bar{f}$가 X에서 정의된 한 完閉백터場일때, 즉 $\bar{f}\epsilon C(Y^X)$:

(ii) $\bar{f}$가 寫像 f의 한 擴張일 때, 즉 $f\subset\bar{f}$인 것을 말한다.

(14) X_0가 X의 한閉部分集合이고 $Y=E$일 때 임의의 한 完閉場 $f\epsilon C(E^{X_0})$는 X위의 한 完閉場 $\bar{f}\epsilon C(E^X)$로 擴張한다.

이것은 잘 알려져 있는 完閉寫像의 擴張定理로부터 곧 얻어진다.

이제 (14)에서와 같이, X_0에서 정의된 特異點없는 完閉場을 X에서 정의된 特異點없는 完閉場으로 擴張하는 문제를 생각하자. 여기에서 이같은 擴張의 存在는 주어진 完閉場의 호모토피類에 달려있음을 보여주는 것이 다음의 중요한 定理이다.

호모토피擴張定理. X_0가 $X\subset E$의 한 閉部分集合이고, $f_0, g_0\epsilon C(P^{X_0})$가 X_0에서 정의된 호모토피的인 特異點없는 完閉백터場이라 하자. 이제 f_0의 X위로의 한 擴張 $f\epsilon C(P^X)$가 존재한다면, g_0의 X위로의 擴張 $g\epsilon C(P^X)$가 존재하여 f와 g가 $C(P^X)$에서 호모토피的이 되도록 된다.

證明. 特異點없는 두 完閉場

$$f_0(x)=x-F_0(x),\qquad F_0: X_0\rightarrow E$$

$$g_0(x) = x - G_0(x), \qquad G_0 : X_0 \to E$$

의 호모토피的이라 함은, 다음 조건을 만족하는 한 完閉寫像 $H_0 : X_0 \times I \to E$가 존재 한다는 것이다:

$$x \neq H_0(x, t), \quad x \in X_0, \quad t \in I;$$

$$H_0(x, 0) = F_0(x), \quad H_0(x, 1) = G_0(x), \quad x \in X_0$$

가정으로 부터 f_0의 X위로의 擴張 $f \in C(P^X)$가 존재하고, 따라서 $F_0 \subset F$이다. 여기에서 $F : X \to E$는 完閉寫像이다.

이제

$$T_0 = (X_0 \times I) \cup (X \times \{0\})$$

라 두고 寫像 $H_0' : T_0 \to E$를 다음과 같이 정의하자:

$$H_0'(x, 0) = F(x), \quad (x \in X_0, \ t = 0 \text{ 일 때}),$$

$$H_0'(x, t) = H_0(x, t) \quad (x \in X_0, t \in I \text{일 때}).$$

그러면 H_0'은 T_0위에서 完閉이며, 따라서 完閉寫像의 擴張定理로부터 그의 $X \times I$위로의 完閉擴張 $H' : X \times I \to E$가 존재하게 된다. 이제

$$X_1 = \{x \in X \mid \text{어떤 } t\text{에 관하여 } x - H'(x, t) = 0\} \subset X$$

라 두면, X_1과 X_0은 X의 서로素인 閉集合이 되며, 따라서 Urysohn의 擴張定理로 부터, 한 連續實函數 $\lambda : X \to I$로서 X_1 위에서는 0, X_0 위에서는 1인것이 存在한다. 이제

$$H(x, t) = H'(x, \lambda(x) t), \quad x \in X, \quad t \in I$$

로 定義되는 寫像 $H : X \times I \to E$는 $X \times I$에서의 完閉寫像이며 $x \in X$, $0 \leq t \leq 1$에 대하여 $H(x, t) \neq x$가 된다. 따라서 X에서

$$g(x) = x - G(x), \quad G(x) = H(x, 1)$$

로 정의되는 寫像 g를 생각하면, g는 g_0의 X위로의 擴張이 되며, 마찬가지로 $x \in X$ 일때 $H(x, 0) = F(x)$가 된다. 定義로부터 $H(x, 1) = G(x)$이므로 $f(x) = x - F(x)$와 $g(x) = x - G(x)$는 $C(p^X)$에서 호모토피的이 된다.

4. 應用面과 現況

위에서는 特異點없는 完閉벡터場의 기본적인 理論을 例示하였으나 이 이론은 실제로 解析學 및 位相數學의 여러 分野에 적용되어 수많은 定理들을 包括하게 되고 또 새로운 결과를 많이 얻었다. 이들에 대한 文獻을 일일히 列擧할 수는 없으므로 이 理論의 결과로 얻어지는 結論들만을 들어보기로 한다.

(1) Schauder의 固定點定理

(2) Borsuk-Ulam의 對稱點定理의 Banach 空間으로의 擴張

(3) 線型方程式論에서의 Fredholm의 Alternative

(4) Rothe 의 固定點定理

(5) Krasnoselskii 의 固定點定理

(6) Altman 의 固定點定理

(7) 이들 固定點定理의 微分方程式論에의 應用

(8) Birkoff-Kellog 의 定理

(9) Banach 空間에서의 共通部分定理, 非連結性에 관한 定理 등.

最近의 結果로서는 多價寫像의 位相數學의 발전에 영향을 받은 것으로서 Ma [4], [5]는 多價寫像(또는 集合値函數)에 관한 完閉 백터場의 개념을 확립하여 이 理論을 進步시켰다.

그 내용을 略述하면 局所볼록空間에서 定義된 集合値完閉백터場으로 傳來의 寫像度理論을 擴張하여 여러가지 括目할만한 成果들을 얻었다. 그 안에서 特記할만한것으로서는

(10) Dugundji 의 擴張定理의 一般化

(11) 集合値完閉場의 寫像度理論

(12) Hopf 의 距離化局所볼록空間에관한 定理의 一般化

(13) 固定點理論에의 適用

(14) Borsuk 의 Sweeping 定理의 一般化

(15) Borsuk-Ulam 의 定理의 一般化

(16) Brouwer 의 領域不變定理의 一般化 등이 보인다.

끝으로 이들에 관한 文獻으로는 [4]의 參考文獻을 보면 자세하다.

參 考 文 獻

[1] A. Granas; *Homotopy extension theorem in Banach spaces and some of its applications to the theory of non-linear equations*, Bull. Acad. Polon. Sci. **7** (1959), 387~394.

[2] A. Granas; *Sur la notion de degré topologique pour une certaine class de transformations multivalentes dans les espaces de Banach*, Bull. Acad. polon. Sci. **7**(1959) 191

[3] J. Leray, J. Schauder; *Topologie et équations fonctionelles*, Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. **51**(1934), pp. 45~78.

[4] T-W Ma, *Topological degrees of set-valued compact field in locally convex spaces*, Rozprawy Mat. **92**(1972), 1~41.

[5] T-W Ma, *Degree theory for set-valued compact perturbations*, Bull. Acad. Polon. Sci. **20**(1972), 169~175.

서울大學校