〔韓國林學會誌 No. 31, p. 62~77 (1976) (資料)〕

林業에 Markov Chain의 應用*[1]

權　　五　　福*[2]

An Application of Markov Chains in Forestry*[1]

O Bok Kwon*[2]

One of the most important tasks of planned forest management is the determination of the allowable cut. There are therefore many methods of forest regulation which have been applied by the various administrations of Germany, France, and other countries. However, most of the older methods of forest regulation have little or no application in Europe.

In this paper, a new method of forest regulation is introduced. It has been developed mainly by Dr. T. Suzuki who is a professor of Nagoya University.

It is felt that the material covered in this paper is appropriate for use in forest management courses at the senior or first-year-graduate level.

適正伐採量을 決定하는 일은 森林經理의 主要任務라 할 수 있다. 그러므로 이제까지 많은 收穫豫定法이 소개되었다. 그것들 中에는 林業經營에 실제로 채용된 것도 있으나 大部分의 方法들은 채용되지 않고 있다.

여기에서는 減段率法이라는 새로운 收穫豫定法을 소개한다. 이 方法은 理論的으로 興味있고 實用性있는 方法이라고 알려지 있다.

I. 緖　　言

林業이란 林地에 나무를 심고 伐期에 달하면 그것을 伐採하고 다시 造林하는 作業의 反復이다. 이러한 反覆을 통하여 木材가 生産되는데 여러가지 理由에서 每年 伐採되는 收穫은 一定量이 要求된다. 한편 森林은 그것이 存在하고 있는 것 自體가 人間社會에 利益을 가져오기 때문에 一定한 林木蓄積은 늘 林地에 保存되어 있어야 한다.

이 두가지 目的을 同時에 實現시키기 위한 유일한 方法으로 과거에는 각 年齡의 林分을 收穫可能한 年齡 u 年까지 全森林面積의 1/u씩 均等하게 配置하고 이것을 每年 1/u 面積씩 伐採하는 것으로 생각해 왔다. 이와같이 均等한 收穫을 永久히 實現시킬 수 있는 森林을 法正林이라 부르고 林業의 生産計劃은 法正林을 造成하는 것을 그의 目標로 삼고 있었다. 그러나 山林行政의 多年間의 努力에도 불구하고 이 目標는 達成되지못했다. 그래서 法政林에 甚한 批判이 加해졌고 收穫을 調節하는 여러가지 다른 方法들이 계속 發表되었다.

法正林은 理論으로서는 깨끗하고 目標林으로서의 存在價値는 確實히 크다. 그러나 이러한 價値以上의 것을 法政林理論에 期待했던 것이다. 모든 植伐計劃을 法正林에 基礎를 두고 樹立하는 데에는 약간의 문제가 있는 것이다. 왜냐하면 現實林에서 植伐은 法正林에서와 같이 規則的으로 이루어질 수 없기 때문이다. 오히려 不規則하게 나타나는 것이 一般的이다. 예를 들면 伐採의 경우 豫期치 못한 被害等으로 伐期以前에 伐採되는 일이 있는가 하면 사정에 따라서는 伐期를 넘어서 伐採되기도 한다. 伐採가 森林所有者의 自由意思에 의하여 이루어지는 경우 一國의 森林을 생각할 때 더욱 더 不規則하게 伐採된다. 그러므로 因果律的인 혹은 決定論的인 方法으로는 이러한 不規則的인 事象에 關連된 問題를 處理할 수는 없는 일이다. 이러한 事象에 대해서는 처음부터 不規則性을 認定하고 들어가는 즉 確率論에 基礎를 둔 接近法이 오히려 現象을 把握하는데 있어서 더 具體的이다.

이러한 接近法에 減段率法(Gentan Probability Method)이 있다. 이 理論은 鈴木太七(敎授)에 의하여 發展된

*[1] Received for Publication on July. 15, 1976 1976
*[2] 江原大學 Kang Weon National University

것으로 林業의 生産豫測의 方法인 동시에 새로운 收穫豫定法이라고 생각된다. 日本에서는 1962年以後 地域森林計劃에 이 方法이 森林資源推移를 推算하는데 사용되고 있으며 名古屋大學과 東京大學에서는 이 理論展開가 森林經理學의 主要講義內容으로 되어 있다. 여기에 그 理論을 紹介한다. 이 分野 여러분의 批判을 바란다.

Ⅱ. 林令空間

林業이란 林分의 伐採와 植栽의 반복이라고 생각 할 수 있다. 林分構造를 理解하기 위하여, 예를 들면 30年生 林分을 생각해 보기로 한다.

이 林分은 10年後에는 40年生이 될 것이나 그 一部分은 10年以內에 伐採될 수 도 있다. 단, 여기에서는 說明을 簡單히 하기 위하여 伐採後에는 즉시 植栽되는 것으로 가정한다. 이와같이 10年間에는 生長을 계속하는 것, 更新되는 것이 생기여 森林全體는 크게 變한다. 그後 다시 10年을 생각할 때 森林의 內容은 처음의 그것과는 全然 다른 것으로 變할것이다. 모든 森林은 위에서 말한 바와 같이 遷移하는것이 보통이며 이것을 微速度 camera로 撮影한다면 森林이 遷移하는 모양을 명백히 알 수 있을 것이다. 그러나 一般的으로 林業經營을 위한 調査나 計劃은 5年 혹은 10年간격으로 實行되는 것이므로 5年혹은 10年마다의 狀態를 離散的으로 表現하는 것으로서 林業經營業務의 目的은 충분히 달성될 것이다.

한편 어느 時點의 森林狀態는 그 林令構成에 의하여 잘 表現 할 수 있다. 예를 들면 韓國의 森林現況은 林令別面積表에 의하여 大略的인 것을 파악할 수 있는 것이다.

지금 어느 森林의 0令級(未立木地), 1令級, 2令級, ……의 面積을 각각 a_0, a_1, a_2, ……등으로 표시하고이들 數値의 한組를 vector로 취급하기로 하자. 理論的으로는 令級은 可付番無限個가 될 것이나 충분히 큰令級 예를들면 n令級까지 생각한다면 그 以上 生育하는 것은 없다고 보아도 좋다. 또 記述을 간단히 하기 위하여 未立木地 0令級은 없는 것으로 한다. 그러면 이때 林令構成을 表現하는 vector로서 n次元의 vector

$$A=(a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots\cdots,a_n)$$

로 채용할수있다. 이와 같이 vector를 사용하면 위에서 말한 森林의 現在, 10年後, 20年後의 狀態는

$$A_0=(0,0,9,8,0,\cdots),\quad A_1=(3,0,0,7,0,\cdots),$$

$$A_2=(5,3,0,0,0,2,\cdots)$$

등으로 표시할 수 있다.

위 예에서 알 수 있는 바와 같이 이러한 vector는 時間에 따라 變化한다. 그러므로 n次元의 vector 空間 W를 가상하고 그 內部에 現在, 10年後, 20年後를 表示하는 vector A_0, A_1, A_2, 等이 흐르고 있다고 생각할 수 있다. 여기에서 생각하고 있는 林令別面積을 成分으로 하는 n次元 vector A_0, A_1, A_2,…等을 林令 vector라 부르고 林令 vector가 그 內部에서 움직이고 있다고 생각되는 n次元의 vector 空間을 林令空間이라고 부르기로 한다.

Ⅲ. 林分遷移確率

林令 j의 林分을 생각할 때 이것이 一分期 지나면 $j+1$令級이 된다. 그러나 이林分이 그 分期中에 伐採된다면 0令級이 되고 伐採직후 植栽될 때 에는 1令級이 된다. j令級에서 移行될 수 있는 令級은 위에서 말한 세가지 令級外에는 없다. 그러므로 어느 森林의 j令級이 一分期 동안에 어느 令級으로 얼마만치 移行되느냐 하는 것은 그들의 確率

$$P_{j,j+1},\ P_{j,o},\ P_{j,1}$$

등을 사용하여 표시할 수 있다. 여기에서 確率이란 j令級의 面積中에서 $j+1$令級, 0令級, 1令級으로 각각 移行하는 面積比를 말하는 것으로 생각하면 된다.

j令級에서 移行 될 수 있는 令級은 위에서 말한 바와 같이 세令級 外에는 없을 것이나 一般的으로 j令級에서 任意의 k令級에 移行되는 確率을

$$P_{j,k}$$

로 표시하기로 한다. 단 위에서 말한 바와 같이 j令級에서 任意의 k令級에 移行되는 일은 없으므로 $P_{j,k}$의 값은 $k=j+1$, $k=0$, $k=1$ 以外의 경우에는 도두 0이다 이와같은 確率 $P_{j,k}$를 j令級에서 k令級에 移行하는 令級遷移確率이라 부르고 여기에서도 간단히 하기위하여 0令級에 移行되는 경우는 없는 것으로 한다면 現在의 林令 vector $A=(a_1,\ a_2,\cdots,a_n)$와 그 森林의 一分期後의 vector $A'=(a'_1,\ a'_2,\cdots,a'_n)$의 成分사이에는

$$\begin{aligned}
&a_1p_{1,1}+a_2p_{2,1}+\cdots\cdots\cdots+a_np_{n,1}=a'_1\\
&a_1p_{1,2}+a_2p_{2,2}+\cdots\cdots\cdots+a_np_{n,2}=a'_2\\
&a_1p_{1,3}+a_2p_{2,3}+\cdots\cdots\cdots+a_np_{n,3}=a'_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_1p_{1,n}+a_2p_{2,n}+\cdots\cdots\cdots+a_np_{n,n}=a'_n
\end{aligned}$$

의 關係가 成立됨을 알수 있다. 그러므로 令級遷移確率을 成分으로 하는 行列

$$P=\begin{pmatrix}
p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3}\cdots\cdots\cdots p_{1,n}\\
p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3}\cdots\cdots\cdots p_{2,n}\\
p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3}\cdots\cdots\cdots p_{3,n}\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
p_{n,1} & p_{n,2} & p_{n,3}\cdots\cdots\cdots p_{n,n}
\end{pmatrix}$$

를 만들면 이것으로

$$AP=A' \text{ 혹은 } P^TA^T=A'^T$$

즉 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \cdots p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \cdots p_{2,n} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \cdots p_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & p_{n,3} \cdots p_{n,n} \end{pmatrix} = (a'_1, a'_2, \cdots, a'_n)$

혹은

$$\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{2,1} & p_{3,1} \cdots p_{n,1} \\ p_{1,2} & p_{2,2} & p_{3,2} \cdots p_{n,2} \\ p_{1,3} & p_{3,3} & p_{3,3} \cdots p_{n,3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1,n} & p_{2,n} & p_{3,n} \cdots p_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}$$

가 成立된다. 이와같이 令級遷移確率을 成分으로 하는 林令遷移를 表示하는 行列을 林令遷移行列이라 부르기로 한다.

林令 vector A'가 그 다음分期에 A''로 移行한다고 가정하고 그 동안의 林令遷移行列을 Q라고 하면

$$A''=A'Q=APQ$$

의 表現이 可能하고 이 두分期 사이의 令級遷移는 行列의 積 PQ로 표시된다. 같은 方法으로 任意分期後의 林令 vector는 처음 林令 vector A에다 順次的으로 $P, Q, R, \cdots\cdots$등의 林令遷移行列의 積을 作用시키면 된다. 여기에서 이들의 行列 $P, Q, R, \cdots\cdots$등은 大略 同一한 것이라고 가정할 수 있다. 만약 $Q, R, \cdots\cdots$등이 現在알고 있는 p와 同一한 것이 아니라 하여도 그것이 어느程度 다른가 하는것은 客觀的으로 評價할수 는 없는 일이다. 그러므로 以下 이들 林令遷移行列은 모두 現在알고 있는 行列 p와 같은 것이라고 가정한다. 이와같이 생각할때 지금부터 L分期 後의 林令 vector $A^{(L)}$는

$$A^{(L)}=AP^{(L)}$$

로 된다.

여기에서 行列 $p^{(L)}$의 (i, j)成分을 $P^{(L)}{}_{i,j}$라고 표시하면

$$P^{(L)}{}_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} P^{(L-1)}{}_{i,k}\ P_{k,j}$$

가 成立한다. 이것은 L分期동안에 i令級에서 j令級으로 移行하는確率은 $(L-1)$分期동안에 i令級에서 任意의 k令級으로 移行하고 그 후 다시 一分期동안에 k令級에서 j令級으로 移行하는 確率과 같다는 것을 말해준다. 이때 途中過程인 k令級으로는 모든 令級을 생각할 수 있으므로 確率은 그들의 合計로 되여있다. 예를들면 $L=2$라고 하면

$$P_{i,j}{}^{(2)}=\sum_{k=1}^{n} P_{i,k}\ P_{k,j}$$

로 되며 이것은 바로 行列 P를 自乘한 P^2의 成分이다.

이와 같이하여 林令 vector A는 林令空間 W의 內部를 林令遷移行列 P에 의하여 AP, AP^2, AP^3,……등과 같이 移動하는 것이지만 그러나 全空間內部에서 自由로히 移動하는 것은 決코아니다. 즉 林令 vector의 成分의 合計는

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=\text{全森林面積}$$

으로 一定하므로 vector A는 이方程式에 대한 超平面 즉一定한 vector

$$e=(1, 1, 1, \cdots\cdots, 1)$$

에 垂直한 超平面上에서만 움직이게된다.

다음에 이와 같이 하여 分期別林令 vector가 豫測되면 이 森林의 平均的인 收穫表를 사용하여 令級別 ha當蓄積 $v_1, v_2, v_3, \cdots\cdots v_n$를 알고

$$a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\cdots\cdots+a_nv_n$$

에 의하여 그 分期의 總森林蓄積을 計算할 수 있다. 이때 그 分期의 收穫量은

$$a_1p_{1,1}v_1+a_2p_{2,1}v_2+a_3p_{3,1}v_3+\cdots\cdots+a_np_{n,1}v_n$$

이다. 환언하면

$$V=(v_1,\ v_2,\ v_3, \cdots\cdots, v_n)$$

와

$$V'=(p_{1,1}v_1,\ p_{2,1}v_2, \cdots\cdots, p_{n,1}v_n)$$

의 vector를 만들어 이것들과 林令 vector A와의 內積을 구하면 그것들이 각각 그 分期의 蓄積과 收穫量이다. 前者의 vector V를 生長 vector, 後者의 V'를 收穫 vector라고 부르기로한다.

이상에서 말한 바와 같이 林令遷移行列과 生長 vector를 알면 現在의 林令配置狀態에서 將來의 森林資源과 森林生産을 理論的으로 豫測할수있다는 것을 알 수 있다.

林令遷移와같이 어느 事象이 어느 狀態에서 다른狀態로 一次變換에 의하여 移行된다고 생각할때 이들의 狀態는 單純 markov chain을 이루고 있다고 말하며 따라서 여기에서 설명한 林令遷移現象은 單純한 markov chain을 이루고 있다고 볼 수 있다.

Ⅳ. 減段率(Gentan Probability)

어느 時點에서 造林된 林分은 年齡이 增加됨에 따라 여러 令級에서 伐採되어간다. 지만 新植된 林分이 있고 그것이 j令級에서 伐採되는 確率을 q_j라고 하자. 그러면 現在 이미 j令級에 달한 林分은 처음 林分에 대하여 $1-q_1-q_2-q_3\cdots\cdots-q_{j-1}$만 남아있는 計算이 되므로 現分期에서 j令級이 伐採될 確率은

$$q_j/(1-q_1-q_2\cdots\cdots-q_{j-1})$$

그리고 다음分期에 $j+1$令級이 伐採 될 確率은

$$q_{j+1}/(1-q_1-q_2-\cdots\cdots-q_{j-1})$$

一般的으로 이것이 제 k分期에 伐採 될 確率은

$$q_{j+k-1}/(1-q_1-q_2-\cdots\cdots-q_{j-1})$$

이다. 이 確率들을 각각 $q_{j,1}$, $q_{j,2}$,……,$q_{j,k}$등으로 표시하기로 한다.

여기에서 定義한 確率 q_j는 j令級의 減段率(Gentan Probability)라 부르고 $q_{j,1}$, $q_{j,2}$……등은 이미 j令級에 달한 林分의 제1分期의 減段率, 제2分期의 減段率이라고 칭하기로 한다. 이와 같이 표시하는 경우 q_j는 $q_{1,j}$라고 말할수도 있다.

여기에서도 간단히 하기 위하여 일단 伐採된 林分은 그 分期동안에 更新되는 것으로 가정한다면 減段率과 林令遷移確率사이에는 다음과 같은 關係가 成立됨을 알 수 있다.

$$q_j=p_{1,2}\cdot p_{2,3}\cdot\cdots\cdots\cdot p_{j-1,j}\cdot p_{j,1}$$

$$p_{j1}=q_{j,1}=q_j/(1-q_1-q_2-\cdots\cdots-q_{j-1})$$

$$1-q_1-q_2-\cdots\cdots-q_j=p_{1,2}\cdot p_{2,3}\cdots\cdots p_{j,j+1}$$

이러한 關係를 이용하면 減段率에서 林令遷移率을 또는 林令遷移確率에서 減段率을 쉽게 계산 할 수 있다. 따라서 전술한 林分遷移의 계산은 減段率을 사용해서 實行할수있음을 알 수 있다. 減段率을 사용할 때의 계산은 다음과 같이 整理해두면 理解하기가쉽다.

表에서 제1列은 제1分期期首의 令級別面積 제 2 列에서부터 右側의 各列은 각각 제 1, 제 2,……, 제 k分期의 令級別伐採面積이고 各列은 위에서 順次的으로 1,2,……令級의 伐採面積을 나타낸다. 여기에서 $u_1, u_2,\cdots\cdots u_k$ 등은 各分期의 伐採面積 合計다. 伐採面이 更新되고 또 다시 伐採되는 소위 林分의 植伐의 構造가 이러한 計算으로 잘 表現된다는 事實을 위 表에서 알수있다.

表 1. 分期別收穫面積

期首	1	2	……	k
				u_k
				$u_{k-1}q_1$
				$u_{k-2}q_2$
		u_2		u_2q_{k-2}
	u_1	u_1q_1		u_1q_{k-1}
a_1	$a_1q_{1,1}$	$a_1q_{1,2}$		$a_1q_{1,k}$
a_2	$a_2q_{2,1}$	$a_2q_{2,2}$		$a_2q_{2,k}$
a_n	$a_nq_{n,1}$	$a_nq_{n,2}$		$a_nq_{n,k}$

또 更新面積 u_1, u_2,……, u_k는 一般的으로

$$u_k=u_{k-1}q_1+u_{k-2}q_2+\cdots\cdots+u_1q_{k-1}+a_1q_{1,k}+a_2q_{2,k}+\cdots$$
$$\cdots+a_nq_{n,k}$$

의 關係가 成立되는 것은 곧 알 수 있다. 이 식의 右邊은 두部分으로 되여있으며 그 한 部分은 $u_1,u_2,\cdots\cdots u_{k-1}$와 $q_1,q_2,\cdots\cdots,q_{k-1}$와의 convolution으로써 更新林分으로부터의 生產을 나타내는 部分이고 다른 또 하나의 部分은 現存 林分으로부터 의 生產을 表示한다. 이 關係를 u_k에 關한 定差方程式으로 생각하면 제 k分期의 伐採面積 u_k를 이것으로 구할수있다. 그리고 將來의 森林收穫의 大略的인것은 이 u_k에 의하여 決定할 수 있다. 이러한 意味에서 이 關係를 林分更新의 基礎方程式이라고 부르기로 한다. 이것은 FELLER가 再生方程式 renewal equation이라고 말한 方程式과 같다. FELLER는 眞空管등 各種部分品의 交替를 取扱하기 위하여 만든 方程式이였으나 지금 여기에서 取扱하는 것도 林分의 更新(再生)에 關한 것이므로 本質的으로 兩者가 同一하게 나타난다는 것은 當然한 일이라하겠다.

다음에 위 表의左側에있는 제 1分期期首의 令級別面積에서 各分期의 伐採面積을 減하여 다음 表와 같이 配列할 수 있다.

表 2. 分期別保有面積

期首	1	2	……	k
				u_k
				$u_{k-1}q_1$
		u_2		$u_2(1-q_1-\cdots-q_{k-2})$
	u_1	$u_1(1-q_1)$		$u_1(1-q_1-\cdots-q_{k-1})$
a_1	$a_1(1-q_{1,1})$	$a_1(1-q_{1,1}-q_{1,2})$		$a_1(1-q_{1,1}-\cdots-q_{1,k})$
a_2	$a_2(1-q_{2,1})$	$a_2(1-q_{2,1}-q_{2,2})$		$a_2(1-q_{2,1}-\cdots-q_{2,k})$
a_n	$a_n(1-q_{n,1})$	$a_n(1-q_{n,1}-q_{n,2})$		$a_n(1-q_{n,1}-\cdot-q_{n,k})$

이 表의 各列은 前述한 分期別 林令 vector에 지나지 않는다. 이 計算은 前述한 行列에 의한 方法보다 더 具體的이고 實用上 더욱 便利하다. 收穫面積을 표시하는 前者의表를 收穫面積表, 保續되는 林分面積을 表示하는 後者의表를 保續面積表라고 부르기로한다. 各各의 面積에 해당 令級別 ha當 材積을 乘하면 各分期의 收穫材積과 蓄積이 令級別로 計算된다. 이 方法이 減段率에 의한 方法이고 日本의 民有林의 森林計劃에서 採用되고 있다.

V. 減段率의 推定

다음에 減段率을 推定하는 方法에 대하여 생각하기로 한다. 많은 森林所有者가 自己意思에따라 自由롭게 伐採하는경우 減段率은 어느 林分이 植栽되여 伐採될 때까지의 一種의 waiting time의 問題에 歸屬된다. 例를

들면 어느 地方의 赤松林에 대하여 생각하기로 하고 그 地方의 赤松은 胸高直徑이 K_{mm}가 되면 伐採되는 것으로 假定하자. 또 그 地方의 赤松은 1分期동안에 直徑生長이 平均 M_{mm}라고 하자. 그러면 여기에서 짧은 時間 dt 分期를 생각할 때 直徑의 增加는 時間間隔에 比例하여 M_{dt}로 된다. 이러한 假定밑에서 赤松林이 t 分期內에 K_{mm} 以上이 되는 確率은

$$f_k(t)=e^{-Mt}(Mt)^{q}/K!$$

로 表示되는 poison 分布가된다.

왜냐하면 dt가 아주 짧은 時間이라 가정하고 서로 이웃하는 두 時間間隔(o,t)와 $(t,\ t+dt)$를 생각할 때 $K\geqq 1$이라하고 $(0,\ t+dt)$ 時間間隔에 K_{mm}가 되는 것은

i) $(0,t)$에 K_{mm}로 되어 있고 $(t,t+dt)$에는 直徑增加없는경우

ii) (o,t)에 $(K-1)_{mm}$로 되어 있고 $(t,t+dt)$에 1_{mm}增加하는 경우

iii) (o,t)에 $(K-x)_{mm}$로 되어 있고 (이때 $x\geqq 2$)그후 $(t,t+dt)$에 x_{mm} 增加하는 경우

의 세가지 경우다.

이들 각경우에 대하여 確率을 구해보면 i)의 경우 (o,t)사이에 K_{mm}로되는 確率 $f_k(t)$와 $(t,t+dt)$사이에直徑增加가 全然 없는 確率 $1-Mdt$와의 積과 같고 ii)의 경우 $f_{k-1}(t)$와 Mdt의 積이며 iii)의 경우에는 $f_{k-x}(t)$와 $(Mdt)^x$의 積이다. 단 iii)의 경우에는 dt가 아주 작은 때에는 高次의 無限小로 보고 無視할 수 있다. 이것들은 서로 排反事象이므로 $(o,t+dt)$사이에 K_{mm}로 成長할 確率 $f_k(t+dt)$는

$$f_k(t+dt)=f_k(t)(1-Mdt)+f_{k-1}(t)Mdt$$

로 된다. 여기에서 $dt\rightarrow 0$의 極限을 생각하면 $f_k(t)$, $f_{k-1}(t)$에 關한 微分方程式

$$f'_k(t)=-Mf_k(t)+Mf_{k-1}(t) \qquad (K\geqq 1)$$

를 얻는다. $K=0$일 때 에는 ii)와 iii)의 경우가 없어지므로

$$f_o(t+dt)=f_o(t)(1-Mdt)$$

로 되고 그 微分方程式은

$$f'_o(t)=-Mf_o(t)$$

로 되어 初期條件 $f_o(0)=1$로 풀으면

$$f_o(t)=e^{-Mt}$$

이것을 위 方程式에 代入해서 一般的으로

$$f_k(t)=e^{-Mt}(Mt)^k/K!$$

이것은 時刻 t 以前에 K_{mm}로 生長하는 確率이다. 그러므로 正確히 時刻 t에 直徑이 K_{mm}가 되는 確率, 즉 時間$(t,\ t+dt)$에 K_{mm}가 되는 確率은 짧은 時間dt에 直徑이 1_{mm}以上 生長한다는 極히 드문경우를 무시하는것이라면 直徑이 $(o,\ t)$에 $K-1_{mm}$로 生長하고 또다시 時間$(t,\ t+dt)$에 1_{mm}生長하는 確率과 같으므로

$$F_k(t)=f_{k-1}(t)\cdot M$$

다. 林分의 直徑이 K_{mm}가 된다는 것은 그林分이 伐採된다는 뜻이므로 이것은 林分의 壽命을 나타내는 確率이다. 그러므로 林分의 壽命이$(j,\ j+1)$사이에 있을 確率 즉 j令級의 減段率은

$$q_j=\int_j^{j+1}F_k(t)dt$$

로 表示할 수 있다. 이 積分은

$$K=n/2,\quad Mt=\chi^2/2$$

라고 하면 自由度 n의 χ^2分布로 變形시킬 수 있다.

$$q_j=\frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{2Mj}^{2M(j+1)}e^{-\frac{\chi^2}{2}}(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}d\chi^2$$

따라서 그 값은 χ^2分布表를 利用해서 쉽게 구 할 수 있다.

以上의 計算은 Parameter M와 K를 모르면 實際로는 不可能하다. 그러나 위의 假定밑에서 平均伐採令$E(t)$와 伐採令의 分散 $\sigma_t{}^2$는

$$E(t)=K/M,\quad \sigma_t{}^2=K/M^2$$

이므로 伐採統計에서 $E(t)$, $\sigma_t{}^2$를 알게되면 M, 와 K가 推定된다.

즉

$$E(t)=\int_0^\infty tF_k(t)dt=\int_0^\infty\frac{(Mt)_k e^{-Mt}}{(k-1)!}dt$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^\infty\frac{x^k e^{-x}}{(k-1)i}d\chi=\frac{1}{M}\frac{\Gamma(k+1)}{(k-1)!}$$

k가 整數라면

$$E(t)=K/M$$

그리고

$$E(t^2)=\int_0^\infty t^2F_k(t)dt=\frac{1}{M(k-1)!}\int_0^\infty(Mt)^{k+1}e^{-Mt}$$

$$dt=\frac{K(k+1)}{M^2}$$

따라서

$$\sigma^2(t)=E(t^2)-E(t)^2=\frac{K}{M^2}$$

가 얻어진다.

Ⅵ. 減段率의 計算

앞節에서 알 수 있는바와 같이 減段率이란 伐採面積의 全森林面積에 대한 百分率이다. 여기에서 段이란 段步(300坪)를 말하는것으로 面積의 뜻이다. 그러므로 減段率은 面積이 減少하는 比率이라는 意味이고 따라서

減面率이라할 수도 있겠다. 그러면 여기에서는 減段率을 計算하는 例를 들어보기로한다.

1. 過去의 伐採傾向을 나타내는 令級別伐採面積이 伐採統計에서 다음과 같다고 가정하자.

表 3. 令級別伐採面積

(單位 : ha)

令 級(t_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15 以上	計
伐 採 面 積(n_i)	—	—	4	30	35	93	113	196	125	186	34	30	4	4	37	891

이 表에서 平均伐採令($\bar{t}$)와 伐採令分散(σ^2)을 計算한다.

우선 平均伐採令은

$\bar{t}=\dfrac{\Sigma t_i n_i}{N}$ 여기에서 $N=\Sigma n_i$

$\bar{t}=\{(4\times3)+(30\times4)+(35\times5)+\cdots\cdots$
$+(37\times15)\}/891=85.4$

伐採令分散은

$$\sigma^2=\frac{\Sigma n_i t_i^2}{N}-(\bar{t})^2$$

$\sigma^2=(4\times3^2+30\times4^2+\cdots+37\times15^2)/891-85.4^2=5.37$

2. χ^2分布表에서 減段曲線을 그리기 위하여 M와 k를 다음式으로 計算한다.

$$M=\frac{\bar{t}}{\sigma^2}\,,\quad k=\frac{\bar{t}^2}{\sigma^2}$$

따라서 이 計算例에서는

$$M=\frac{8.54}{5.37}\fallingdotseq1.59$$

$$k=\frac{8.54^2}{5.37}\fallingdotseq13.58$$

3. χ^2 分布表를 준비한다.

自由度 $n=30$ 의 χ^2 分布表는 제 4 表와 같다.

表 4. χ^2 分 布 表

n	.99	.98	.95	.90	.80	.70	.50	.30	.20	.10	.05	.02	.01	.001
1	.03157	.03628	.00393	.0158	.0642	.148	.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10.827
2	.0201	.0404	.103	.211	.446	.713	1.380	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210	13.815
3	.115	.185	.352	.584	1.005	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9,837	11.341	16.268
4	.297	.429	.711	1.064	1.649	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277	18.465
5	.554	.752	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086	20.517
6	.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.003	16.812	22.457
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475	24.322
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.595	5.527	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090	26.125
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	6.393	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666	27.877
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209	29.588
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725	31.264
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	9.034	11.340	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217	32.909
13	4.107	4.765	5.892	7.042	8.634	9.926	12.340	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688	34.528
14	4.662	5.368	6.571	7.790	9.467	10.821	13.339	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141	36.123
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	11.721	14.339	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578	37.697
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	12.624	15.338	18.418	20.405	23.542	26.290	29.633	32.000	39.252
17	6.408	7.225	8.672	10.085	12.002	13.531	16.338	19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409	40.709
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	14.440	17.338	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805	42.312
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	15.352	18.338	21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191	43.820
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	16.266	19.337	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566	45.315
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	17.182	20.337	23.858	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932	46.797
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	18.101	21.337	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289	48.268
23	10.196	11.293	13.091	14.848	7.187	19.021	22.337	26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638	49.728
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	19.943	23.337	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980	51.179
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	20.867	24.337	28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314	52.620

26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	21.742	25.336	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642	54.052
27	12.879	14.125	16.184	18.114	20.703	22.719	26.336	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963	55.476
28	13.565	14.847	16.728	18.939	21.588	23.647	27.336	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278	56.893
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	24.577	28.336	32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588	58.302
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	25.508	29.336	33.530	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892	59.703

自由度 $n>30$에 대해서는 다음의 近似式으로 計算한다.

$$\chi^2_\alpha=\frac{1}{2}(y_\alpha+\sqrt{2n-1})^2$$

여기에서

α는 0.99, 0.95, 0.90, 0.70, 0.50, 0.30, 0.10, 0.05, 0.01

y_α는 -2.3263, -1.3449, -1.2816, -0.5244, 0.0000, 0.5244, 1.2816, 1.6449, 2.3263

自由度 $n\geqq 30$에 대하여 위 近似式으로 計算한 數値는 다음 表와 같다.

表 5. χ^2分 布 表

n	0.99	0.95	0.90	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	0.01	0.005
30	15.0	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	50.9	53.7
40	22.2	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	63.7	66.8
50	29.7	34.3	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	76.2	79.5
60	37.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	88.4	92.0
70	45.4	51.7	55.3	61.7	69.3	99.6	85.5	90.5	100.4	104.2
80	53.5	60.4	64.3	71.9	79.3	88.1	96.6	191.9	112.3	116.3
90	61.8	69.1	73.3	80.6	89.3	98.6	107.6	113.1	124.1	128.3
100	70.1	77.9	82.4	90.1	99.3	109.1	118.5	124.3	135.8	140.2

$n=100$일때 $\alpha=0.95$에 대해서는

$\sqrt{2n-1}=\sqrt{200-1}=\sqrt{199}=14.1067$

$$x^2=\frac{1}{2}(-1.6449+14.1067)^2=\frac{1}{2}\cdot 155.29646$$

$$=77.64823\fallingdotseq 77.9$$

$n=100$일때 $\alpha=0.05$에 대해서는

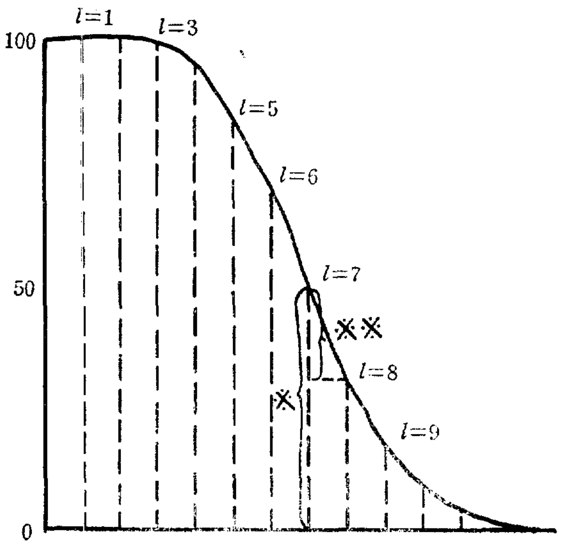


圖 1. 減段曲線軸

$$X^2=\frac{1}{2}(1.6449+14.1067)^2=\frac{1}{2}\cdot 248,11290\fallingdotseq 124.3$$

4. 自由度 $n=2k$의 χ^2分布表를 사용하여 減段曲線을 그린다.

이 計算例에서는 自由度 $n=2k=13.58\times 2=27.16=27$ ($2k$는 整數로 한다)의 χ^2分布表를 사용한다. 이 曲線은 다음 그림과 같이 x軸에 林令 l, y軸에

$$\frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_l^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}(X^2)^{\frac{n}{2}-1}dx^2$$

를 취하여 plot한 것이다.

그리는 方法은 이 計算例에서는 自由度 $n=2k=27$이므로 χ^2分布表에서 $n=27$의 數値들을 사용하며 有意水準 0.99의 數値는 12.879이므로 y座標 0.99 x座標 12.879에 우선 plot한다. 다음에는 0.98의 경우 14.125이므로 y座標 0.98 x座標 14.15의곳에 plot한다. 以下 같은 方法으로 plot하여 曲線을 適合시키면 減段曲線을 얻는다.

5. 이 그라프의 x軸上에 $2M$의 間隔으로 點을 내린다. 이 計算例에서는 $M=1.59$이므로 $1.59\times 2=3.18$間隔으로 點을 나리고 그 點들에서 각각 x軸에 垂線을 그리어 減段曲線과의 交點을 $l=1$, $l=2$, ……로 한다.

그러면 이 交點들의 y座標가 각 令級의 保存率이 되

는것이다. 그리고 이 交點들의 y座標의 差가 각 令級의 減段率이다. 예를 들면 그림에서 ※ 와 ※※가 각각 7令級의 保存率 과 減段率이다. 그라프에서 각 令級의 保存率 과 減段率을 구하면 다음 表와 같다.

表 6. 令級別 減段率 (%)

令 級	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15以上	計
保 存 率	100	100	100	100	99	95	86	71	52	35	23	14	7	3	1	
減 段 率	0	0	0	1	4	9	15	19	17	12	9	7	4	2	1	100

그런데 이때 주의할것은 각令級의 減段率合計는 100%가 되도록 修正해야한다. 그리고 j令級의 保存率$p(j)$와 減段率 $q(j)$사이에는 다음과 같은 關係가 있다는것을 알아두면 計算이 편하다.

$$p(j)=q(j)+p(j+1)$$

$$q(j)=p(j)-p(j+1)$$

Ⅶ. 減段率에 의한 伐採材積計算

앞에서 計算된 保存率 과 減段率을 사용하여 伐採行列式에 의하여 主伐面積, 更新面積, 主伐材積, 期首面積 및 蓄積, 間伐材積을 각각 分期別로 計算한다. 그計算結果는 表 8에 整理되어있다. 以下 이 表를 中心으로 설명하겠다. 日本에서는 皆伐作業을 行하고 있는 森林中에서 林種轉換을 實施하고 있는 森林 以外의 民有林에 대해서는 減段率로 伐採量을 계산한다.

1. 主伐面積

1) 제 1分期期首面積

森林調査의 結果에서 皆伐作業을 實施하는 森林面積이 다음 表와 같다고하자.

表 7. 第1分期期首面積 (ha)

令 級	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15以上	計
面 積	2511	3019	683	486	485	343	386	286	283	164	37	19	10	8	7	8726

이 面積을 表 8의 第 1分期期首面積蓄積의 欄에 記入한다.

2) 換算面積

이것은 計算을 便하게 하기 위하여 구하는 것으로 다음 式에 의한다.

$$換算面積=\frac{a(j)}{1-q(1)-q(2)\cdots q(j-1)}$$

여기에서

$a(j)=j$ 令級의 第 1分期期首面積

$q(j)=j$ 令級의 減段率

本計算例에서는 $q(1)=q(2)=q(3)=0$, $q(4)=1\%$, $q(5)=4\%$, $q(6)=9\%$ 이므로 例를 들면 6令級의 換算面積은

$$\frac{343}{1-0-0-0-1\%-4\%}=361$$

로 計算된다.

그런데 上式에서 分母는 j令級의 保存率과 같다. 따라서 實際計算에서는 j令級의 期首面積을 j令級保存率로 除하면 計算이 簡便함을 알 수 있다. 즉 各令級의 換算面積은

1令級……2,511/1.00=2,511

2令級……3,018/1.00=3.019

3令級……683/1.00=683

4令級……486/1.00=486

5令級……485/0.99=490

6令級……343/0.95=361

이며 이것은 計算表의 A欄에 記入한다.

여기에서 計算된 換算面積은 減段率에 의하여 계속적으로 伐採된 경우 當初의 造林面積을 말한다.

3) 第1分期의 主伐面積과 更新面積

第1分期의 主伐面積은 各令級의 換算面積에 各各의 減段率을 곱하므로서 얻어진다. 즉

1令級……2,511×0%=0

2令級……3,019×0%=0

3令級……683×0%=0

4令級……486×1%=4.86≒5

5令級……490×4%=19.60≒20

6令級……361×9%=32.49≒33

등이다. 이것들의 合計 393을 記入한다. 이것이 第1分期의 主伐面積에 해당한다. 그런데 普通 伐採跡地의 更新에는 어느 一定한 期間이 必要하다. 지금 그 期間 즉 更新期間을 2年이라고하면 第Ⅰ分期의 主伐에따르는 更新은 다음과 같다.

第Ⅰ分期동안에 更新될 面積은 主伐面積의 3/5이므로 $393\frac{3}{5}=236$,

表 8. 計 算 表

(單位：面積 ha. 蓄積 1000m³)

令級	換算面積	第1分期期首面積蓄積	分期別立木伐採量(面積，材積)								令級	分期別期首森林資源(面積，蓄積)								
			I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)	(G)	(H)	(I)	(J) 662		(K)	(L)	(M)	(N)	(O)	(P)	(Q)	(R)	(S)
										↓										
									484	1864										1864
							500 234	332	1476										1476	1476 (27)
						900 184	↓	1059										1059	1059 (19)	1059 (52)
					1500 163	↓	1231										1231	1231 (22)	1231 (60)	1231 (106)
				⑱1800 157	↓	1435				14 (1)						1435	1435 (26)	1435 (70)	1435 (125)	1421 (176)
			⑧2300 840 200	↓	1939				19 (2)	78 (11)					1939	1939 (35)	1939 (95)	1939 (167)	1920 (238)	1842 (297)
			↓	⑲2201				㉑22 (2)	88 (13)	198 (35)				㉜2201	2201 (40)	2201 (108)	2201 (189)	2179 (270)	2091 (337)	1893 (360)
			⑨3576	⑩			⑳36 (4)	㉒143 (20)	322 (57)	536 (109)			㉛3576	㉝3576 (64)	3576 (175)	3576 (308)	3540 (439)	3397 (547)	3075 (584)	2539 (554)
1	2511	2511	①	⑪		25 (3)	100 (14)	226 (40)	377 (77)	477 (110)	1	㉓2511	㉗2511 (45)	2511 (123)	2511 (216)	2486 (308)	2386 (384)	2160 (410)	1783 (389)	1306 (316)
2	3019	3019 (54)	②	⑫	30 (3)	121 (17)	272 (48)	453 (92)	574 (132)	513 (130)	2	㉔3019 (54)	㉘3019 (148)	3019 (260)	2998 (371)	2868 (462)	2596 (493)	2143 (467)	1569 (380)	1056 (280)
3	683	683 (33)	③	⑬ 7 (1)	27 (4)	61 (11)	102 (21)	130 (30)	116 (29)	82 (23)	3	㉕683 (33)	㉙683 (59)	676 (84)	649 (104)	588 (112)	486 (106)	356 (86)	240 (64)	158 (45)
4	486	486 (42)	④ 5 (1)	⑭ 19 (3)	44 (8)	73 (15)	92 (21)	83 (21)	58 (16)	44 (13)	4	㉖ 486 (42)	㉚ 481 (60)	462 (74)	418 (79)	345 (75)	253 (61)	170 (45)	112 (32)	68 (21)
5	490	485 (60)	⑤20 (3)	⑮44 (8)	74 (15)	93 (21)	83 (21)	59 (16)	44 (13)	34 (11)	5	485 (60)	465 (75)	421 (80)	347 (76)	254 (61)	171 (45)	112 (32)	68 (21)	34 (11)

表 8. 計 算 表

令級	換算面積	第1分期期首面積蓄積	分期別立本伐採量(面積, 材積) I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)	(G)	(H)	(I)	(J)
6	361	343 (55)	⑥33 (6)	⑯54 (11)	69 (16)	61 (15)	43 (12)	32 (9)	25 (8)	14 (4)
7	449	386 (73)	67 (14)	85 (20)	76 (19)	54 (15)	40 (12)	31 (10)	18 (6)	9 (3)
8	403	286 (62)	76 (17)	69 (18)	48 (13)	36 (11)	28 (9)	16 (5)	8 (3)	4 (1)
9	544	283 (68)	93 (24)	65 (18)	49 (14)	38 (12)	22 (7)	11 (4)	5 (2)	
10	469	164 (43)	56 (15)	42 (12)	33 (10)	19 (6)	9 (3)	5 (2)		
11	161	37 (11)	15 (4)	11 (3)	6 (2)	3 (1)	2 (1)			
12	136	19 (6)	10 (3)	5 (2)	3 (1)	1 (0)				
13	143	10 (3)	6 (2)	3 (1)	1 (0)					
14	267	8 (3)	5 (2)	3 (1)						
15以上	700	7 (2)	7 (2)							
計 主伐			⑦ 〈393〉 236 (93)	⑰ 〈407〉 244 (98)	〈460〉 276 (105)	〈585〉 351 (127)	〈829〉 497 (173)	〈1211〉 727 (251)	〈1654〉 992 (358)	〈2003〉 1202 (451)
計 間伐			(8)	(11)	(33)	(30)	(62)	(44)	(53)	(34)
合計		8727 (515)	236 (101)	244 (109)	276 (138)	351 (157)	497 (235)	727 (295)	992 (412)	1202 (485)

令級	分期別期首森林資源(面積, 蓄積) I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
	(K)	(L)	(M)	(N)	(O)	(P)	(Q)	(R)	(S)
6	343 (55)	306 (59)	256 (56)	187 (45)	126 (33)	83 (24)	51 (15)	26 (8)	12 (4)
7	386 (73)	319 (70)	234 (57)	158 (42)	104 (30)	64 (19)	33 (10)	15 (5)	6 (2)
8	286 (62)	210 (51)	141 (37)	93 (27)	57 (17)	29 (9)	13 (4)	5 (2)	1 (0)
9	283 (68)	190 (50)	125 (36)	76 (23)	38 (12)	16 (5)	5 (2)	0	
10	164 (43)	108 (31)	66 (20)	33 (10)	14 (4)	5 (2)	0		
11	37 (11)	22 (7)	11 (3)	5 (2)	2 (1)	0			
12	19 (6)	9 (3)	4 (1)	1 (0)	0				
13	10 (3)	4 (1)	1 (0)	0					
14	8 (3)	3 (1)	0						
15以上	7 (2)	0							
計	㉞ 8727 (515)	㉟ 11910 (660)	㊱ 13704 (895)	15183 (1210)	16033 (1566)	16435 (1897)	16283 (2147)	16105 (2262)	15966 (2251)

次期移越更新面積：157→163→184→234→332→484→662→801→

第Ⅱ分期에 移越될 更新面積은 主伐面積의 2/5이므로 $393\times\frac{2}{5}=157$(欄外에 記入)

다음에 當分期의 擴大造林(林種轉換및 未立木地造林)의 計劃量을 ⑧欄에 記入한다. 지금 擴大造林計劃이 表 9와 같다고 하자. 그리고 第Ⅰ分期期首에 前分期에서

表 9. 擴大造林計劃面積

(ha)

分 期	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	計
林種轉換	2300	1800	1500	900	500	7000
未立木地造林	840	—	—	—	—	840

移越된 更新面積(第Ⅰ分期期首에 人工更新해야 할 伐採跡地)이 200ha 라고한다. 그러면 ⑧欄에는 2300, 840, 그리고 200을 記入한다. 이 세 數値와 第Ⅰ分期에 發生된 主伐面積에서 第Ⅰ分期에 更新될 面積 236과의 合計 3576을 ⑨欄에 記入한다. 이것이 第Ⅰ分期에 更新될 全體面積이다.

4) 第Ⅱ分期以後의 主伐面積과 更新面積

우선 第Ⅱ分期에 대한것을 보면 各林分은 第Ⅰ分期에서 5年을 經過한 것이므로 A欄의 換算面積은 Ⅰ令級 進級한 것으로 보고 各各의 減段率를 곱해서 구한다.

즉 主伐面積은

1令級……$3576\times0\%=0$

2令級……$2511\times0\%=0$

3令級……$3019\times0\%=0$

4令級……$683\times1\%\doteqdot7$

등 과 같이 計算하고 ⑩＋⑪＋⑫＋⑬＋……＋⑰＝407을 主伐面積合計로 한다.

⑰欄의 407은 當分期에 更新될 面積 $407\times\frac{3}{5}=244$와 第Ⅱ分期에 移越될 面積 $407\times\frac{2}{5}=163$으로 區分된다.

다음에 當分期에 更新될 全面積은 ⑱欄의 林種轉換面積 1800, 第Ⅰ分期에서 移越된 更新面積 157 그리고 위에서 說明한 244와의 合計 2201이다. 이것은 ⑲欄에 記入한다.

第Ⅲ分期以後의 것에 대해서도 같은 方法으로 計算할 수 있고 따라서 ⓒ～①列이 完成되는 것이다. 여기에서 ⑨, ⑲등 斜線方向의 系列은 各分期別 更新面積을 意味하고 ④, ⑬등 斜線方向의 系列은 4令級의 主伐面積을 表示한다. ⑨, ⑲의 系列과 ④, ⑬의 系列 사이의 空欄은 表 6에서 $q(1)=q(2)=q(3)=0$이기 때문이다. ⑳, ㉒欄에서부터 위 部分의 數値들은 ⑨, ⑲ 등의 更新林分이 4, 5, ……令級에 達해서 伐採되는 面積을 表示한다. 즉 ⑳은 $3576\times q(4)=36$. ㉑은 $2270\times q(4)=22$, ㉒는 $3576\times q(5)=144$, 以下 같은 方法으로 計算하여 ⑳, ㉒線上의 各欄이 채워진다.

以上의 計算으로 分期別 主伐面積과 更新面積이 구해진다.

2. 主伐材積

主伐材積은 各分期의 令級別伐採面積에 ha當 伐採立木材積을 곱해서 얻어진다. 이 때 伐採는 各分野의 中間에서 伐採되는 것을 前提로 한다. 따라서 ha當 伐採立木材積은 分期期初의 ha當 立木材積에 5/2年 즉 2.5年分의 生長量을 加算한 것이다. 지금 이와 같이 하여 얻어진 ha當 伐採立木材積은 表 10과 같다고 假定하고

表 10. ha 當伐採立木材積

令 級	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15 以上
材 積	—	34	68	105	143	176	204	230	254	276	294	310	320	327	332

主伐材積을 計算해보면 表 8에서 例를 들면 4令級의 系列은 ④～⑬의 斜線方向이므로 이 令級의 主伐材積은 $105^3m\times5=525m^3\doteqdot1000m^3$, $105m^3\times7=735m^3\doteqdot1000m^3$, 以下 같은 方法으로 4令級의 各分期別主伐材積을 計算한다.

5令級도 같은 方法으로 $143m^3\times20=2860m^3\doteqdot3000m^3$, $143m^3\times19=2717m^3\doteqdot3000m^3$ 등으로 計算된다. 이와 같이 하여 구해진 主伐材積이 表 8의 ⓒ～①欄의 괄호안의 數値다.

3. 分期別令級別 期首面積

다음에는 期首面積을 分期別로 구하여 分期別 期首蓄積을 計算하고 森林資源의 推移를 豫測한다.

表 8에서 우선 第1分期首의 面積은 當然한 일로서 Ⓑ欄의 各令級別面積을 그대로 Ⓚ欄에 記入하면된다.

第Ⅱ分期以後에 있어서는 前分期의 期首面積에서 그동안의 主伐面積을 減하므로서 얻어진다. 즉 第Ⅱ分期에 대해서는

1令級欄……㉓～①……$2511-9=2511$……㉗

2令級欄……㉔～2 ……$3019-0=3019$……㉘

3令級欄……㉕～③……$683-0=683$………㉙

4令級欄……㉖～④……$486-5=481$………㉚

以下 같은 方法으로 各令級의 殘存面積을 구한다. 그리고 ㉛欄에는 第Ⅰ分期의 造林面積 즉 ⑨欄의 3576을 移記한다. 이와 같이하여 第Ⅱ分期의 期首面積이 모다 구해진다. 第Ⅲ分期以後에 대해서도 같은 方法으로 구한다.

各令級의 系列은 分期가 移動함에 따라 1令級씩 進級하므로 例를 들면 1令級은 ㉓～㉜의 斜線方向의 各欄이고 2令級은 ㉔～㉗의 斜線方向의 各欄이다.

그리고 計欄은 다음과 같이 檢算할 수 있다. 즉 各分期의 期首面積은 그 前分期의 期首面積과 그 前分期의 擴大立木地面積의 合計이므로 例를 들면 第Ⅱ分期에서 ㉟欄은 ㉞와 ⑧의 合計에서 第Ⅰ分期로 부터 移越된 更新面積을 減한 數值와 一致할 것이다. 즉 8727+(2300+840+200)−157=11910=㉟라하여 檢算할 수 있다.

4. 分期別 令級別期首蓄積

期首蓄積은 위에서 구한 各期首面積에 該當令級의 ha當 材積을 곱해서 얻어진다. 表8의 K～S의 괄호안의 數值는 ha當 材積이 表 11과 같다고 보고 計算된 것이다.

表 11. ha當立木材積

令 級	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15以上
材 積	−	18	49	86	124	161	190	218	242	265	286	302	317	320	322

5. 分期別 間伐面積과 間伐材積

우선 間伐對象令級의 期首面積에 그 令級의 間伐對象面積率을 곱해서 間伐面積을 구한다. 다음에 이 間伐面積에다. 그 令級의 單位面積當 伐採立木材積과 間伐率을 곱하여 間伐材積으로 한다.

지금 間伐은 4令級과 6令級의 林分에 대해서만 實施하는 것으로 하고 間伐對象 面積率은 4令級이 70% 6令級이 60% 그리고 間伐率이 各各 16%, 10%라고보고 計算하면 다음과 같이 된다.

4令級은

第Ⅰ分期……$486\times70\%\times86\times16\%\fallingdotseq5000\text{m}^3$

第Ⅱ分期……$685\times70\%\times86\times16\%\fallingdotseq7000\text{m}^3$

第Ⅲ分期……$3019\times70\%\times86\times16\%\fallingdotseq29000\text{m}^3$

6令級은

第Ⅰ分期……$343\times60\%\times161\times10\%\fallingdotseq3000\text{m}^3$

第Ⅱ分期……$465\times60\%\times161\times10\%\fallingdotseq4000\text{m}^3$

第Ⅲ分期……$462\times60\%\times161\times10\%\fallingdotseq4000\text{m}^3$

以下 같은 方法으로 計算하여 各令級의 間伐材積을 分期別로 合計하여 그것을 表 8의 ⓒ～ⓘ의 合計의 間伐欄에 記入한다. 이것과 이미 計算된 主伐材積을 合計하면 各分期別 總伐採材積이된다.

Ⅷ. 林令遷移의 極限

林令空間W에서 생각한 林令 vector A에 같은 林令遷移行列 P를 反覆作用시킬때 그 n分期後의 林令 vector $A_{(n)}$는

$$A_{(m)}=AP^n$$

로 된다. 여기에서는 $n\to\infty$로 했을 때의 極限狀態를 생각해 보기로 한다. 다시 말하면 行列p^n의 n가 ∞일때의 極限이 在在하느냐 않느냐 하는 것이 여기에서 究明하고저하는 문제다.

一般的으로 어느 空間W의 點 A가 線形作用素P의 反覆P^n를 받고있을때 AP^n의 行動에대한 理論을ergode 理論이라 한다. 特殊한 것이기는하나 우리들은 지금 一種의 ergode 理論을 研究하려하는 것이다.

그러나 前述한 바와 같이 減段率이란 槪念을 利用해도 林令空間論과 마찬가지로 林令遷移를 說明할 수는 있다. 여기에서는 우선 減段率을 利用해서 林令空間의 ergode性을 조사해 보기로 한다. 이 때에 基礎가 되는 것은 林分更新의 基礎方程式이다.

1. 整數値를 갖는 變數와 母函數

離散的인 確率變數 특히 整數値 $K=0,1,2,\cdots\cdots$등을 갖는 그러한 確率變數를 생각하기로 한다. 이러한 確率變數研究에는 母函數를 사용하면 대단히 便利하다. 母函數란 微分方程式이나 積分方程式의 解法에 사용되는 演算子法에 對應하는 方法이라 할 수 있다.

우선 定義부터말하면

$a_0, a_1, a_2, a_3,\cdots\cdots$를 變數列이라고할 때

$$A(s)=a_0+a_1S^1+a_2S^2+a_3S^3+\cdots\cdots$$

를 數列$\{a_j\}$의 母函數라고 한다. 여기에서 變數 S는 그 自體가 形式的인 것이다. 그리고 $A(s)$는 그것이 收斂할 수 있는 區間 $-S_0<S<S_0$에서만 생각할 수 있다. 예를들면 모든 a_j에 대하여 $a_j=1$이라면 $A(s)=\frac{1}{(1-s)}$ 數列$(0,0,1,1,1.\cdots\cdots\cdots)$의 母函數는 $S^2/(1-S)$, 數列 $a_j=1/j!$는 e^s라는 母函數를 갖는다.

다음에 X를 $0,1,2,\cdots\cdots$등의 數値를 갖는 確率變數라고 할 때

$$P\{x=j\}=P_j,\ P\{x>j\}=q_j$$

라고 쓰기로 한다. 그러면

$$q_k=P_{k+1}+P_{k+2}+\cdots\cdots,\quad k\geqq0$$

로 되는 것은 明白하며 이때 數列$\{P_j\}$와 $\{Q_k\}$의 母函數는

$$P(s(=P_0+P_1S^1+P_2S^2+P_3S^3+\cdots\cdots$$

$$Q(s)=q_0+q_1S^1+q_2S^2+q_3S^3+\cdots\cdots\cdots$$

이다. $P(1)=1$이므로 $P(s)$에 대한 級數는 적어도 $-1\leqq S\leqq1$에서 絶對收斂한다. $Q(s)$의 係數는 1보다 작으

므로 $Q(s)$는 적어도 開區間 $-1<S<1$에서 收斂한다. 그리고 $P(s)$와 $Q(s)$는 $-1<S<1$에 대하여

$$Q(s)=(1-P(s))/(1-s)$$

의 關係가 成立함을 알 수 있다. 왜냐하면 $n\geqq1$일 때 $(1-S)\cdot Q(S)$에서 S^n의 係數는 $q_n-g_{n-1}=-P_n$이며 $n=0$일때 $q_0=P_1+P_2+\cdots\cdots\cdots=1-P_0$이다. 그러므로 $(1-s)\cdot Q(s)=1-P(s)$가 되는 것이다.

다음에 確率 P_k의 母函數 $P(s)=\sum_{k=0}^{\infty}P_kS^k$의 導函數

$$P'(s)=\sum_{k=1}^{\infty}kP_kS^{k-1}$$

에 대하여 조사해보기로한다.

이 級數도 적어도 $-1<s<1$에서 收斂한다. $S=1$에 대해서는 右邊은 形式的으로 $\sum kP_k=E(x)$가 된다. 이 期待値가 存在하므로 導函數$P'(s)$는 閉區間 $-1\leqq S\leqq1$에서 항상 連續이다.

$E(x)$에 대해서는 다음식이 成立한다.

$$E(x)=\sum_{j=1}^{\infty}jP_j=P'(1)$$

이것을 다시 한번 微分하면

$$E(x(x-1))=\Sigma k(k-1)P_k=P''(1)$$

를 얻을수 있다. 따라서 確率變數 X의 分散을 구하기 위하여 $E(x)-E^2(x)$를 加해주면 다음식이 나타난다.

$$Var(x)=P''(1)+P'(1)-(P'(1))^2$$

이와 같이하여 確率變數의 積率을 계산할 수 있기 때문에 $P(s)$를 積分母函數라 부르는 것이다.

2. Convolution과 母函數

X와 Y를 確率分布 $P\{X=j\}=a_j$, $P\{Y=j\}=bj$가 되는 음수가아닌 整數値를 갖는 獨立的인 確率變數라고 하자. 事象$(X=j,\ Y=k)$는 確率 a_jb_k를 갖는다. 그러면 $S=X+Y$는 새로운 確率變數이고 事象 $S=r$는 다음과 같은 서로 排反되는 事象

$(X=0,\ Y=r)$, $(X=1,\ Y=r-1)$,

$(X=2,\ Y=r-2),\cdots\cdots$, $(X=r,\ Y=0)$

들의 合倂事象이다. 그러므로 分布 $C_r=P\{S=r\}$는 다음식으로 표시된다.

$$C_r=a_0b_r+a_1b_{r-1}+a_2b_{r-2}+\cdots\cdots+a_{r-1}b_1+a_rb_0$$

두 數列 $\{a_k\}$와 $\{b_k\}$에서 새로운 數列$\{C_k\}$를 유도하는 위의 계산은 빈번히 나타난다.

지금 $\{a_k\}$와 $\{b_k\}$를 任意의 두 數列이라하자(반드시 確率分布가될 必要는없다). 이때 數列 $\{C_k\}$는 $\{a_k\}$와 $\{b_k\}$의 Convolution이라 부르고

$$\{C_k\}=\{a_k\}※\{b_k\}$$

로 표시된다.

예를 들면 $k\geqq0$인 모든 k에 대하여 $a_k=b_k=1$이면 $C_k=k+1$이되고 $a_k=k$, $b_k=1$일때에는 $C_k=1+2+\cdots\cdots+k(k+1)/2$로 된다. 또 萬若에 $a_0+a_1=\frac{1}{2}$이고 $k\geqq2$일 때 $a_k=0$라면 $C_k(b_k+b_{k-1})/2$로 된다.

數列 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$는 母函數로써 $A(s)=\Sigma a_kS^k$와 $B(s)=\Sigma b_kS^k$를 갖는다. 積 $A(s)B(s)$는 $A(s)$와 $B(s)$에 대한 冪級數를 項別로 곱해서 얻어진다. S의 같은 冪의 項을 모으면 $A(s)\ B(s)$를 展開했을 때의 S^r의 係數 C_r가

$$C_r=a_0b_r+a_1b_{r-1}+a_2b_{r-2}+\cdots\cdots+a_{r-1}b_1+a_rb_0$$

에 의하여 얻어진다는 것을 알수 있다. 따라서 다음과 같은 定理가 나타난다.

$\{a_k\}$, $\{b_k\}$가 母函數 $A(s)$와 $B(s)$를 가지는 數列이고 $\{C_k\}$가 그것들의 convolution이라고 한다면 母函數 $C(s)=\Sigma C_kS^k$는

$$C(s)=A(s)B(s)$$

로 된다.

지금 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $\{c_k\}$, $\{d_k\}\cdots\cdots$를 任意의 數列이라고 하자. 그러면 Convolution $\{a_k\}※\{b_k\}$를 만들고 이 새로운 數列과 $\{c_k\}$와의 Convolution을 만들 수 있겠다. $\{a_k\}※\{b_k\}※\{c_k\}※\{d_k\}$의 母函數는 $A(s)\ B(s)\ C(s)\ D(s)$이며 이러한 사실은 Convolution을 만드는 順序는 어떠하든 상관없다는 것을 말해준다. 예를들면 $\{a_k\}※\{b_k\}※\{c_k\}=\{c_k\}※\{b_k\}※\{a_k\}$등이다. 그러므로 Convolution이란 結合法則, 交換法則을 滿足시키는 계산이다. 특히 興味있는 사실은 같은 數列의 Convolution이면서 그것들은

$$\{a_j\}^2=\{a_j\}※\{a_j\},\quad \{a_j\}^3=\{a_j\}^2※\{a_j\}$$

로 정의할 수 있다는 것이다.

3. 林分更新의 基礎方程式

앞에서말한 母函數의 方法을 써서 林分更新의 基礎方程式을 다루어보기를 한다. 基礎方程式은 第 k 分期의 更新面積 U_k를 나타내는 差分方程式으로

$$U_k=b_k+U_{k-1}q_1+U_{k-2}q_2+\cdots\cdots+U_1q_{k-1}$$

이다. 여기에서 $b_k=a_1q_1\cdot k+a_2p_2\cdot k+\cdots\cdots+a_nq_n\cdot k$는 처음 林令配置에 의하여 定해진 旣知函數다. 右邊은 確實히 Convolution의 모양을 하고 있다. 이들 $\{u_k\}$, $\{b_k\}$, $\{q_k\}$의 母函數를 각각 $U(s)$, $B(s)$, 그리고 $Q(s)$라고 한다. 위 方程式에서 母函數를 얻으려면 兩邊에 S^k을 乘하고 k에 대하여 合計하면 된다.

$$\bar{U}(s)=B(s)+\bar{U}(s)Q(s)$$

단 여기에서 $U_o=q_o=0$로 했다. 이것으로부터

$$\bar{U}(s)=\frac{B(s)}{1-Q(s)}$$

를 얻을수 있다. 이것은 各分期에 있어서 更新面積을 나타내는 數列 $\{U_k\}$의 母函數이므로 萬若에 右邊을 S의 冪級數로 展開할 수 있다면 S^k項의 係數로써 U_k의 값을 실제로 구할 수 있을 것이다. 여기에서 母函數

$Q(s)$, $B(s)$는 S의 多項式이므로 母函數 $U(s)$는 S의 有理式이다. 간단히 하기 위하여 分母를 $A(s)$라하고 이것의 次數는 分子 $B(s)$의 次數보다 적지않다고 가정한다.

$$U(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$$

그리고 分母 $A(s)=0$가 m個의 相異한 根(實根 또는 虛根) $S_1, S_2, S_3, \cdots\cdots, S_m$를 가지고 있다고 한다면

$$A(s)=(s-s_1)(s-s_2)\cdots\cdots(s-s_m)$$

로 되어 $U(s)$는 部分分數를 分解된다.

$$U(s)=\frac{\delta_1}{s_1-s}+\frac{\delta_2}{s_2-s}+\cdots\cdots+\frac{\delta_m}{s_m-s}$$

여기에서 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \cdots\cdots, \varrho_m$는 定數들이다. 예를들면 δ_1를 구하기 위해서는 위 式에다 s_1-s를 곱하고 $s\to s_1$로 하면 $(s_1-s)U(s)$는 δ_1에 接近한다. 그러나 한편으로는

$$(s_1-s)U(s)=\frac{-B(s)}{(s-s_2)(s-s_3)\cdots(s-s_m)}$$

로되여 $s\to s_1$일때 分子는 $-B(s_1)$ 分母는 $(s_1-s_1)(s_1-s_3)\cdots\cdots(s_1-s_m)$로 되는데 이것은 $A'(s_1)$이므로

$$\delta_1=-\beta(s_1)/A'(s_1)$$

같은 方法으로

$$\delta_k=-\beta)/A'(s_k)$$

가 成立된다. 이와같이 하여 部分分數로 分解되면 $U(s)$의 冪級數展開는 容易하다. 예를들면

$$\frac{1}{s_k-s}=\frac{1}{s_k}\cdot\frac{1}{1-\frac{s}{s_k}}$$

라고 하고 $|s|<|s_k|$에 대하여 右邊을 展開하면

$$\frac{1}{1-\frac{s}{s_k}}=1+\frac{s}{s_k}+\left(\frac{s}{s_k}\right)^2+\cdots\cdots\cdots$$

이것들을 사용하면 $U(s)$의 s^k項의 係數 U_k는

$$\bar{U}_k=\frac{\delta_1}{S_1^{k+1}}+\frac{\delta_2}{S_2^{k+1}}+\cdots\cdots+\frac{\delta_m}{S_m^{k+1}}$$

로 된다.

이와같이 하여 U_k를 구할 수는 있으나 모든根 $S_1, S_2, S_3, \cdots\cdots, S_m$에 대하여 실제로 위의 계산을 한다는 것은 大端히 복잡하다. k가 작을때에는 直接 減段率계산을 實行하는 편이 더욱 강편하다. 그러나 k가 커서 減段率 계산을 實行할 수 없을 때에는 反對로 위의 계산이 必要하게되는데 그러한 경우 위의 證價式中 하나의 項만으로 充分히 滿足할만한 近似值를 얻을수 있겠다. 지금 S_1을 다른 모든 根보다도 絕對値가 작은根이라하자. k가 充分히 크면 그제 1項 δ_1/S_1^{k+1}만이 支配的이고 其他의 項은 無視해도 무방하다. 즉 $k\to\infty$일 때 $U_k\to\delta_1/S_1^{k+1}$로서 充分한 近似값이되는 것이다.

Ⅸ. 林令遷移의 極限과 廣義의 法正林

1. 極限에서의 更新面積

앞에서 말한 方法을 採用하면 $k\leftarrow\infty$일때 즉 極限에서의 更新面積이 一定値에 接近한다는 것을 證明할 수 있다.

우선 減段率 q_1, q_2, q_3, …… 가 周期的이 아닐때 更新面積 U_k는 一定値 B/Z에 接近한다는 것을 살펴보기로 한다. 여기에서 $B=\Sigma b_j$로서 全森林面積이고 $Z=\Sigma_j q_j$는 平均伐採令이다.

$$U(s)=\frac{B(s)}{1-Q(s)}=\frac{B(s)}{A(s)}$$

의 分母 $A(s)$는 m次의 多項式

$$A(s)=1-q_1 5-q_2 s^2-\cdots\cdots-q_m s^m$$

라고 하자. m를 充分히 크게 잡고 모든 林分이 m令級까지에는 伐採된다고 가정하면

$$q_1+p_2+\cdots\cdots+q_m=1$$

이므로 $A(s)=0$는 $S=1$이란 根을 갖는다. 그러나 $A(s)=0$는 絕對値가 1보다 적은根을 가질수는 없다. 왜냐하면

$$|A(s)|=|1-q_1 s-q_2 s^2-q_3 s^3-\cdots\cdots-q_m s^m|$$
$$\geqq 1-q_1|s|-q_2|s|^2-\cdots\cdots-q_m|s|^m$$
$$=1-\{q_1|s|+q_2|s|^2+\cdots\cdots+q_m|s|^m\}$$

여기에서 $|s|<1$라고 하면

$$>1-\{q_1+q_2+\cdots\cdots+q_m\}=0$$

로되여 이것이 0와 같게 될수는 없기 때문이다.

問題는 $|s|=1$의 根이 $s=1$ 以外에 또 있느냐 없느냐 하는 것인데 그러한 根은 $s=1$ 以外에는 없다는 사실은 以下의 證明에서 알수 있다. 즉

$$|1-q_1|s|-q_2|s|_2-\cdots\cdots-q_m|s|^m|\geqq 1-(q_1|s|+\cdots\cdots+q_m|s|)$$

라는 等不等式에 $s=1$을 代入하면 兩邊이 모다 0이되므로

$$|1-q_1|s|-\cdots\cdots-q_m|s|^m|=1-(q_1|s|+\cdots+q_m|s|^m)$$

가 成立한다. 그리고 그러기 위해서는 $q_1|s|, q_2|s|^2, q_3|s|^3, \cdots, q_m|s|^m$등이 모다 같은 偏角을 가지고 있어야 한다. 그것은

$$|a-b|=|a|-|b|$$
$$|a+b|=|a|+|b|$$

등의 算式이 成立하려면 a와 b가 같은 方向을 가질 때에 限하기 때문이다.

그러면 $q_1\neq 0$일때 $\arg S=2k\pi$이므로 $\arg S^2=4k\pi$, $\arg S^3=6k\pi\cdots\cdots$이고 結局 $S=1$의 根만 있게 된다. 그리고 $q_1=q_2,=q_3=\cdots=q_{l-1}=0$이고 $q_l\neq 0$이라면 $\arg S^l=2k\pi$이므로 $s=1$ 以外에 $|s|=1$의 根이 있다면 그것은 1

의 l 乘根이다. 그렇다면 S^{l+1}, $S^{l+2}\cdots S^{2l-1}$ 등의 偏角은 決코 2π의 整數倍로 될 수 없으므로 q_{l+1}, q_{l+2}, $\cdots$, q_{2l-1} 등의 係數는 모다 0이야한다. 같은 理由로 q_{2l+1}, q_{2l+2}, ……, q_{3l-1}등도 모다 0이다. 이와 같이하여 結局 q_l, q_{2l}, q_{3l}, ……등의 減段率以外는 모다 0이되는 것이다. 그러나 이때에는 減段率 q_j가 周期 l를 갖는 結果가 됨으로 假定에 모순된다. 그러므로

$$A(s)=1-qs-q_2s^2-\cdots\cdots-q_ms^m$$

는 $s=1$以外에는 絕對値 1의 根을 갖지않는다는 事實을 證明했다.

끝으로 $s=1$이란 根은 單根이라는 것을 證明하자.

그것은

$$-A'(s)=q_1+2q_2s+3q_2s^2+\cdots\cdots+mq_ms^{m-1}$$

이 $s=1$ 이란 根을 가지고 있지 않다는 點에서 알수 있다. $A'(1)$은 絕對로 0이될수 없다. 왜냐하면

$$-A'(1)=q_1+2q_2+\cdots\cdots+mq_m=Z\neq 0$$

이기 때문이다.

그러므로 앞節의 結果를 사용하면 $k\to\infty$일때

$$U_k\to\frac{\delta_1}{k+6}=\delta_1$$

가 成立한다. 따라서

$$\delta=-\frac{B(1)}{A'(1)}=\frac{b^1+b_2+\cdots}{q_1+2q_2+\cdots+mq_m}=\frac{\Sigma b_j}{Z}$$

結局

$$U_k\to\frac{\Sigma b_j}{Z}$$

가 證明됐다.

이와같이 $k\to\infty$일때 伐採面積 U_k가 一定値로되면 그 후의 令級配置는

$$U_k,\ U_k(1-q_1),\ U_k(1-q_1-q_2),\ \cdots\cdots$$

로 된다. 이것은 令級配置가 減段曲線과 닮은 狀態가 된다는 것을 意味한다.

2. 廣義의 法正狀態

이제까지의 結果를 綜合하면 林令空間W의 任意林令 vector A는 그 林令遷移行列 P의 固有値 1에 屬하는 固有 vector $\bar{A}$에 收斂한다는 것이다. 그外에 다른 固有 vector $\bar{A}'$가 있다면 그것은 $\bar{A}$의 Scalar倍다. 그런데 이들 林令 vector의 Norm는 全森林面積과 같으므로 $\bar{A}=\bar{A}'$가 된다. 즉 極限에 있어서 林令 vector는 다만 한가지로 決定된다는 것이다. 이러한 事實을 더 實感있게 說明하면 다음과 같다.

즉 林令空間에는 어느 흐름이 있다. 그리고 그 空間內에있는 모든 點들은 그 흐름을 타고 움직이는데 그 흐름은 空間內에서 소용돌이 치고 終局에는 一點 $\bar{A}$에서 流出된다고 생각한다. 그러면 林令空間의 어느點에서 出發한다하드라도 結局$\bar{A}$에서 流出될 것만은 확실하고 어떠한 理由로 어느點의 移行이 流線의 途中에서 다른 流線에 移動되는 경우라하여도 結局은 $\bar{A}$에 到着하게 된다. 이러한 意味에서 $\bar{A}$는 安定된 極限狀態라한수 있다.(圖 2)

이러한 極限狀態에서 一定한 林令配置가 保持되는 理由는 圖 3에서 理解할 수 있다. 그리고 이러한 法正狀態는 實現可能한 安定된 것이고 決코 假想的인것은 아니다.

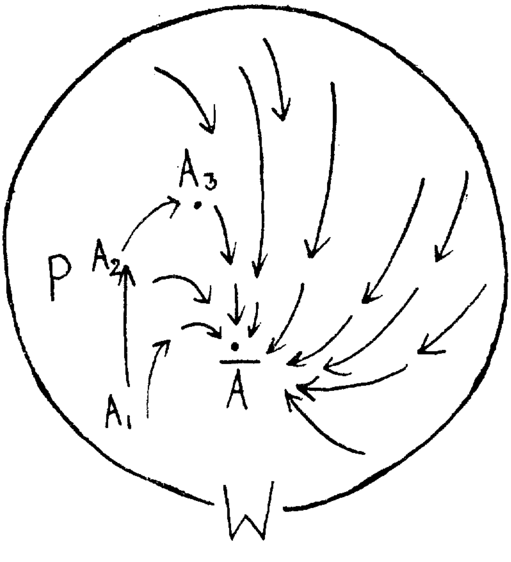
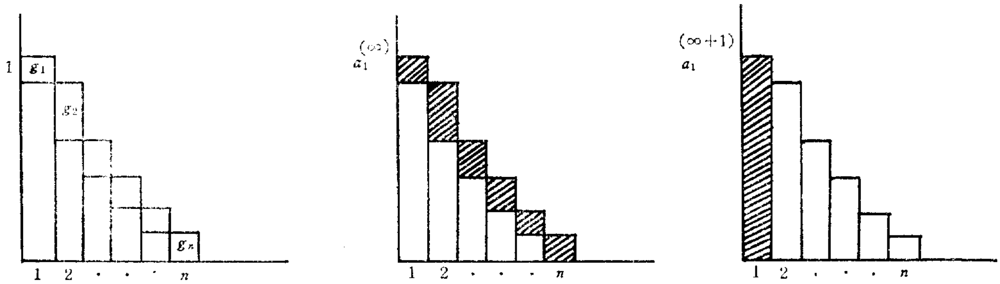


圖 2. 林令空間



減段曲線　　∞일 때의 令級配置　　∞+1일 때의 令級配置

圖 3. 減段曲線과 極限의 令級配置

X. 結　言

減段率法의 大略的인 理論과 實際로 計算하는 方法을 소개했다. 以上에서 알 수 있는 바와 같이 過去의 收穫豫定法들은 單一生產體의 最適生產計劃法이라 말 할 수 있고 이方法은 많은 經營體를 包含하는 民有林의 生產豫測에 適用되는 方法이라 할 수 있다. 그리고 여기에서 말하는 廣義의 法正狀態는 過去의 法正林模型을 現實的인 모양으로 再生, 擴張시킨것이라 생각된다. 特히 指摘하고싶은것은 森林의 움직임을 遷移確率의 方法으로 觀察할때 다른 많은 理論과 實用的인 方法이 나타날 可能性이 있다고 보는것이다.

參 考 文 獻

1. Kreyszig, E., 1972, Advanced Engineering Mathematics. John Wiley & Sons, Inc. 218-284.
2. Feller, W., 1967, An Introduction to Probability Theory and Its Applications. John Wiley & Sons, Inc. p. 509,
3. Suzuki, T., 1961, Oc the Predication of Wood Production (1). J. sci. & Tech. Report (45). 113, 4. Suzuki, T., 1963, On the Prediction of Wood Production(2). J. Sci .& Tech. Report(53).