線型回歸係數의 二變量 t 有意性檢定

金 鋼 均*

1. 線型回歸係數의 有意性檢定

一般線型 回歸模型

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}\beta+\boldsymbol{u} \tag{1.1}$$

$\boldsymbol{Y}$는 $(N\times 1)$의 確率觀測벡타,

$\boldsymbol{X}$는 旣知의 고정된 $(N\times \boldsymbol{k})$行列,

$\text{rank}(\boldsymbol{X})=k\leq N$,

β는 未知의 $(k\times 1)$母數벡타,

$\boldsymbol{u}$는 관측할 수 없는 $(N\times 1)$의 確率벡타

에서 $\boldsymbol{u}$가 다음과 같이 正規分布를 한다면

$$\boldsymbol{u}\sim N[\boldsymbol{o},\sigma^2\cdot \boldsymbol{I}_N] \tag{1.2}$$

$\boldsymbol{o}$은 $(N\times 1)$의 零벡타,

σ^2는 $\sigma>0$인 未知의 母數,

$\boldsymbol{I}_N$은 $(N\times N)$의 單位行列.

回歸係數 β의 一部 또는 全部의 有意性檢定은 다음과 같이 전개된다.

우선 母數 β의 最良線型不偏推定値 $\boldsymbol{b}$는

$$\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \tag{1.3}$$

와 같이 얻어지며 σ^2의 불편추정치 $s^2(s>0)$은

$$s^2=\frac{\boldsymbol{Y}'[\boldsymbol{I}_N-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}']\boldsymbol{Y}}{n} \tag{1.4}$$

로 구하여 진다. 단,

$$n=N-k \tag{1.5}$$

이다. 이 때 (1.3)의 $\boldsymbol{b}$와 (1.4)의 s^2은 서로 獨立的이며 각각

$$\boldsymbol{b}\sim N[\beta,\sigma^2\cdot(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}] \tag{1.6}$$

*韓國科學技術硏究所

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n) \tag{1.7}$$

와 같이 분포를 한다[1]. 여기서 $(X'X)^{-1}$는 旣知의 $(k \times k)$正値行列(positive definite matrix)이므로 그 對角要素 $C_{ii}(i=1, 2, \cdots, k)$는 모두 旣知의 양수이다. 새로운 대각 행렬 D를

$$D_{k\times k}=\begin{pmatrix} C_{11}^{-\frac{1}{2}} & & & O \\ & C_{22}^{-\frac{1}{2}} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & C_{kk}^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

와 같이 정의하여 $\hat{b}_{k\times 1}$, $\hat{\beta}_{k\times 1}$, $E_{k\times k}$를 각각

$$\hat{b}=D\cdot b \tag{1.9}$$

$$\hat{\beta}=D\cdot \beta \tag{1.10}$$

$$E=D\cdot(X'X)^{-1}\cdot D \tag{1.11}$$

로 정의하면 E는 모든 대각요소가 1인 旣知의 正値行列이고 (1.6)으로부터, $\hat{d}$는 다음과 같이 분포하는 것을 알 수 있다.

$$\hat{b} \sim N[\hat{\beta}, \sigma^2\cdot E] \tag{1.12}$$

또 $\hat{b}$는 b만의 함수이므로 s^2과는 독립적이다.

여기서 β의 요소 $\beta_i(i=1, 2, \cdots, k)$에 대한 $\beta_i=0$, $\beta_i \fallingdotseq 0$, $\beta_i>0$, $\beta_i<0$의 假說은 $\hat{\beta}$의 요소 $\hat{\beta}_i$에 대한 $\hat{\beta}_i=0$, $\hat{\beta}_i \fallingdotseq 0$, $\hat{\beta}_i>0$, $\hat{\beta}_i<0$의 假說과 1對 1로 대응되므로 이하에서는 β_i에 대한 上記 4가지 가설의 검정은 $\hat{\beta}_i$에 대한 똑같은 가설의 검정으로 바꾸어 생각하기로 한다

먼저 $\hat{\beta}$의 k개 요소 가운데 임의의 한 요소 $\hat{\beta}_i$에 대한 歸無假說

$$H_0 : \hat{\beta}_i=0 \tag{1.13}$$

의 검정은 (1.12)로부터 $\hat{b}$의 $\hat{\beta}_i$에 대응되는 요소 $\hat{b}_i$가

$$\hat{b}_i \sim N[\hat{\beta}_i, \sigma^2\cdot e_{ii}]=N[\hat{\beta}_i, \sigma^2] \tag{1.14}$$

와 같이[2] 분포를 하고 $\frac{ns^2}{\sigma^2}$가 이와는 독립적으로 (1.7)의 분포를 하므로

$$t_i=\frac{\hat{b}_i/\sigma}{\sqrt{n}\cdot s/\sqrt{n}\cdot\sigma}=\frac{\hat{b}_i}{s} \tag{1.15}$$

가 自由度 n의 中心 혹은 非中心 t分布를 한다는 것을 이용한 t檢定을 하게 된다.

한편 $\hat{\beta}$의 요소 가운데 임의의 m개$(1\leq m\leq k)$의 요소로 된 $\hat{\beta}$의 部分벡타를 $\hat{\beta}_p$, $\hat{b}$의 $\hat{\beta}_p$에 대

1) 여기까지 F.A. Graybill(1961), p.113의 定理 6.1참고.
2) e_{ii}는 행렬 E의 i번째 대각요소이다.

응되는 부분벡타를 $\hat{\boldsymbol{b}}_p$, $\boldsymbol{E}$행렬에서 $\hat{\beta}_p$에 대응되는 列과 行만으로 구성된$(m\times m)$부분행렬을 $\boldsymbol{E}_p$라 하면 (1.12)로부터

$$\hat{\boldsymbol{b}}_p \sim N[\hat{\beta}_p,\ \sigma^2\cdot \boldsymbol{E}_p] \tag{1.16}$$

이고 $\boldsymbol{b}_p$는 s^2과는 독립이 된다.

$$B_{(1\times 1)}=\hat{\boldsymbol{b}}_p'(\sigma^2\cdot \boldsymbol{E}_p)^{-1}\hat{\boldsymbol{b}}_p=\frac{\hat{\boldsymbol{b}}_p'\boldsymbol{E}_p^{-1}\hat{\boldsymbol{b}}_p}{\sigma^2},\ 0\leqslant B<\infty \tag{1.17}$$

(1.17)의 B는 $\hat{\beta}_p$가 零벡타인지 아닌지에 따라서 자유도 m의 중심 혹은 비중심 χ^2分布를 하고 (1.18)의 F는

$$F=\frac{B/m}{n\cdot s^2/n\cdot\sigma^2}=\frac{\hat{b}_p'E_p^{-1}\hat{b}_p}{m\cdot s^2} \tag{1.18}$$

이므로 자유도 (m,n)의 중심 혹은 비중심 F分布를 한다. 따라서 歸無假說

$$H_o: \hat{\beta}_p=0 \tag{1.19}$$

의 검정 즉 임의의 m개 係數의 同時有意性檢定은 (1.18)의 F값을 가지고 F檢定을 하게 된다. 그런데 이 m개의 계수를 個別的으로 검정하는 t값들로 이루어진 벡타를 $\boldsymbol{t}_{p(m\times 1)}$라고 하면 (1.15)로부터

$$\hat{\boldsymbol{b}}_p=\boldsymbol{t}_p\cdot s \tag{1.20}$$

이 되고 (1.18)에서

$$F=\boldsymbol{t}_p'\boldsymbol{E}_p^{-1}\boldsymbol{t}_p/m \tag{1.21}$$

이 되어서 F검정은 제二次 空間에서 계수의 개별적인 유의성검정에 사용되는 t값들의 棄却域을 설정하는 검정임을 알 수 있다. 이 점에서, m次 空間에서 m개 係數의 同時有意性檢定을 t값들로써 檢定하는 方法대신 m개 계수의 동시유의성을 t값들의 m차 공간에서 F검정과는 다른 기각역을 취하여 검정하는 방법을 생각할 수 있다. 경우에 따라서는 F검정보다도 더 좋은 새로운 검정방법도 찾아낼 수 있다.

여기에서는 $m=2$일 때로 한정하여 2계수의 동시 유의성을 t값들의 2차 평면에서 軸에 평행인 선에 의하여 만든 기각역으로 검정하는 방법인 二變量t檢定에 대하여 고찰하여 보고 F검정과 비교하여 보기로 한다. 2변량 t검정은 단일 계수의 유의성을 검정하는 개별 t검정을 결합한 것과 같은 검정인데 계수의 陽陰여부가 흔히 理論模型으로부터 파악될 수 있는 회귀모형에서는 검토해 볼 만한 가치가 있다.

2. 二變量t檢定

이제 2변량 t검정의 기본이 되는 2변량 t분포와 그 기각역에 관하여 알아보자.

가. 二變量t分布

$\hat{\beta}_1$과 $\hat{\beta}_2$의 두 계수에 대한 검정이라고 생각하면 (1.11)에서 행렬 E는 모든 대각요소가 1인 旣知의 행렬이므로 (1.16)은 旣知의 數 $q(-1<q<+1)$를 가지고 (2.1)과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{pmatrix}\hat{b}_1\\ \hat{b}_2\end{pmatrix}\sim N\left(\begin{pmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\end{pmatrix},\ \sigma^2\cdot\begin{pmatrix}1 & q\\ q & 1\end{pmatrix}\right) \tag{2.1}$$

따라서 $(\hat{b}_1,\hat{b}_2)$의 確率分布函數는

$$P_{b_1b_2}(\hat{b}_1,\hat{b}_2)$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-q^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-q^2)}[(\hat{b}_1-\hat{\beta}_1)^2-2q(\hat{b}_1-\hat{\beta}_1)(\hat{b}_2-\hat{\beta}_2)+(\hat{b}_2-\hat{\beta}_2)^2]\right\},$$
$$-\infty<\hat{b}_1,\ \hat{b}_2<+\infty \tag{2.2}$$

이 되고 (1.7)로부터 $n\cdot s^2$의 확률분포함수는

$$P_{ns^2}(ns^2)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\cdot\sigma^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{(ns^2)^{\frac{n}{2}-1}}{e^{\frac{ns^2}{2\sigma^2}}},\quad o<ns^2<+\infty \tag{2.3}$$

가 되는데 $(\hat{b}_1,\hat{b}_2)$와 ns^2은 독립적이므로 $(\hat{b}_1,\hat{b}_2,ns^2)$의 분포함수는 (2.2)와 (2.3)으로부터 간단히 구할 수 있고 이를 다시 (1.15)에 따라서

$$t_1=\frac{\hat{b}_1}{s},\qquad t_2=\frac{\hat{b}_2}{s} \tag{2.4}$$

에 의하여 置換하여 (t_1,t_2,ns^2)의 분포함수를 얻은 뒤 (t_1,t_2)의 周邊分布函數를 구하면 (t_1, t_2)의 분포함수는

$$\frac{\hat{\beta}_1}{\sigma}=\delta_1,\ \frac{\hat{\beta}_2}{\sigma}=\delta_2 \tag{2.5}$$

라고 할 때

$$P_{t_1,t_2}(t_1,t_2)$$
$$=C_o\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{r_1+r_2}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+r_1+r_2}{2}+1\right)(\delta_1-q\delta_2)^{r_1}(\delta_2-q\delta_1)^{r_2}t_1^{r_1}t_2^{r_2}}{r_1!r_2!(1-q^2)^{r_1+r_2}\left[1+\frac{t_1^2-2qt_1t_2+t_2^2}{n(1-q^2)}\right]^{\frac{n+r_1+r_2}{2}+1}}, \tag{2.6}$$

$$-\infty<t_1,t_2<+\infty$$

와 같이 된다. 단

$$C_o=\frac{\exp\left[-\dfrac{\delta_1^2-2q\delta_1\delta_2+\delta_2^2}{2(1-q^2)}\right]}{\pi\cdot n\cdot\sqrt{1-q^2}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \tag{2.7}$$

이다. (2.6)과 같은 t_1,t_2의 결합분포를 (2.5)의 δ_1과 δ_2를 非中心母數로 하는 自由度 n의 非中心二變量t分布라고 부르기로 하자. 특히

$$\hat{\beta}_1=\hat{\beta}_2=0 \tag{2.8}$$

이면 (2.6)은

$$P_{t_1,t_2;\beta_1=\beta_2=0}\ (t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-q^2}\left[1+\dfrac{t_1^2-2qt_1t_2+t_2^2}{n(1-q^2)}\right]^{\frac{n}{2}+1}} \tag{2.9}$$

이 되어 자유도 n의 中心二變量t分布가 된다.

또 극한의 경우로 자유도 n이 무한히 커서 $n\to\infty$이면 (1.7)로부터 $s^2\to\sigma^2$로서 s^2은 모수 σ^2으로 된다. 이 때는 (2.4)에서

$$t_1=\frac{\hat{b}_1}{\sigma},\ t_2=\frac{\hat{b}_2}{\sigma}$$

가 되므로 (2.1)로부터

$$\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix}\sim N\left[\begin{pmatrix}\delta_1\\\delta_2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&q\\q&1\end{pmatrix}\right] \tag{2.10}$$

이 된다. 이 경우 (2.8)의 가설하에서는

$$\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix}\sim N\left[\begin{pmatrix}o\\o\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&q\\q&1\end{pmatrix}\right] \tag{2.11}$$

이 된다.

나. 二變量t檢定의 棄却域

여기에서는 스테펜스〔F. E. Steffens(1969)〕를 따라서 몇가지 2변량 t검정의 기각역을 생각하여 보자. 즉 歸無假設

$$H_o:\hat{\beta}_1=\hat{\beta}_2=0 \tag{2.12}$$

에 대응되는 對立假說은 (2.13)과 같이 6가지로 분류할 수 있다.

1) $\hat{\beta}_1\fallingdotseq 0$ 또는 $\hat{\beta}_2\fallingdotseq 0$

2) $\hat{\beta}_1\fallingdotseq 0$ 이며 $\hat{\beta}_2\fallingdotseq 0$

3) $\hat{\beta}_1>0$ 또는 $\hat{\beta}_2>0$

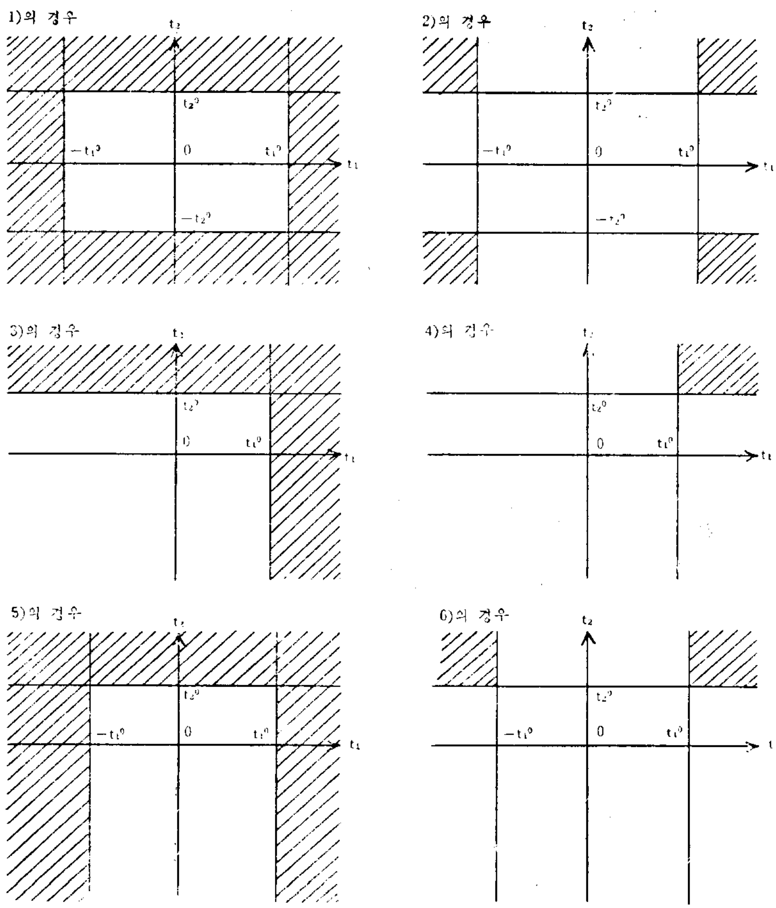
4) $\hat{\beta}_1>0$ 이며 $\hat{\beta}_2>0$

5) $\hat{\beta}_1\fallingdotseq 0$ 또는 $\hat{\beta}_2>0$

6) $\hat{\beta}_1\fallingdotseq 0$ 이며 $\hat{\beta}_2>0$

F 檢定을 사용하는 때의 대립가설은 1)의 경우이며 그밖의 5가지 가설은 1)의 가설보다 $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$의 가능평면을 더 좁게 취하고 있다. $\hat{\beta}_1$과 $\hat{\beta}_2$가 서로 바뀌고 $>$부호가 $<$부호로 바뀐 경우는 (2.1)을 알맞게 바꾸어서 처리할 수 있으므로 같은 경우로 생각한다. 이러한 대립가설 각각에 대한 (2.12)와 같은 가설의 검정에 타당한 기각역은 <그림 2.1>과 같이 생각할 수 있는데 이것은 개별 t검정의 양측검정과 단측검정의 기각역을 "또는" 혹은 "이며"로 결합한 것과 같다. 이런 점에서 2변량 t검정은 개별 t검정을 대립가설에 따라서 알맞게 결합한 검정이라고도 생각할 수 있다. 다만 임의의 α수준 동시검정을 위하여서는 그림에서 $t_1{}^0$와 $t_2{}^0$를 어떻게 정할 것인가가 문제가 된다. $t_1{}^0$와 $t_2{}^0$의 값이 같도록 하거나 또는

<그림 1> 변량 t검정의 기각역(빗금부분)



개별 t검정을 결합한다고 생각할 때 개별 t검정의 검정수준이 같도록 하여서 결합한 후의 동시검정 수준이 α가 되도록 하는 방법등을 생각할 수 있다. 1), 2), 3), 4)의 경우에는 두 방법이 결국 같은 것이 된다. 이 밖에 다른 방법도 생각할 수 있고 논의의 여지도 있지만 여기에서는 t_1^0와 t_2^0를 같도록 하는 방법만을 사용하기로 한다.

t_1^0와 t_2^0를 같게하면 1), 2), 3), 4)의 검정은 다음과 같이도 할 수 있다. 다음에서 α는 임의의 동시검정수준이다.

1)의 검정은

$$v=\mathrm{Max}(|t_1|,\ |t_2|)$$

로 v를 정의하여 (2. 9)의 분포로부터 v의 분포함수 $P_v(v)$, $0\leqslant v<\infty$를 구한 뒤

$$\int_{v_0}^{\infty} P_v(v)dv=\alpha$$

인 v_0보다 큰 v의 구간을 기각역으로 하는 검정과 같다. 이 검정은 Studentized Maximum Modulus (Maxmod) 검정법이라고 한다.

2)의 검정은 (2. 9)의 분포로부터

$$w=\mathrm{Min}(|t_1|,|t_2|)$$

인 w의 분포를 구하여 w의 累積確率이 $(1-\alpha)$인 점 w_0보다 큰 w의 구간을 기각역으로 하는 검정과 같은데 이 검정을 Studentized Minimum Modulus (Minmod) 검정이라고 한다.

3)의 검정은 (2. 9)의 분포로부터

$$v'=\mathrm{Max}(t_1,t_2)$$

인 v'의 누적확률이 $(1-\alpha)$인 점 v_0'보다 큰 v'의 구간을 기각역으로 하는 검정과 같은데 이 검정은 Maxmod검정의 한 편석만을 기각역으로 취하므로 單側 Maxmod檢定이라고 할 수 있다.

4)의 검정은 (2. 9)의 분포로부터

$$w'=\mathrm{Min}(t_1,t_2)$$

인 w'의 누적확률이 $(1-\alpha)$인 점 w_0'보다 큰 w'의 구간을 기각역으로 하는 검정과 같은데 이 검정은 Minmod검정의 한 편석만을 기각역으로 취하므로 單側 Minmod檢定이라고 할 수 있다.

검정방법과 자유도 n, q값과 검정수준 α에 따른 실제 검정의 臨界值(critical value)의 계산과 수표에 관하여는 던과 매시 〔O.J. Dunn and F.J. Massey (1965)〕, 굽타 〔S.S. Gupta (1963～2)〕가 문헌을 정리하고 있고 정확한 임계치를 모를 때는 「본페로니」 不等式 (Bonferroni inequality)[1]을 사용하여 근사치를 이용할 수도 있다.

---

1) R.G. Miller (1966), p.8 참고.

3. 二變量t檢定과 F檢定의 檢定力比較

2변량 t검정을 F검정과 비교하기 위하여 검정력을 대비하여 보자. 먼저 (2.1)의 q값이 0인 특별한 경우[1]에 대하여 비교하고 다음에 q값의 변동에 따른 검정력의 변화를 고찰하기로 하자.

가. $q=0$일 때

스테펜스는 $q=0$일 때 몇가지 2변량 t검정의 임계치표를 만들고[2] 나아가서 그 표를 이용한 2변량 t검정의 검정력을 계산하기도 하였다[3]. 그는 자유도 n이 1, 2, 5, 10, 20, 50, ∞의 7가지 경우에 대하여 (2.5)의 δ_1과 δ_2가 몇가지 값을 취할 때 $\alpha=0.05$ 수준의 Maxmod와 Minmod검정의 검정력을 계산하였다. 자유도 n이 10, 20일 때 스테펜스가 계산한

<표 3.1> $q=0$일때 $\alpha=0.05$수준 F, Maxmod, Minmod 검정의 검정력

자유도 / 검정법 / 임계치		10			20		
		F	Maxmod	Minmod	F	Maxmod	Minmod
δ_1	δ_2	4.1028	2.6091	1.3734	3.4928	2.4109	1.2905
0	1	0.25^{-}	0.1111	0.0887	2.29^{-}	0.1204	0.0920
0	2	0.31	0.3318	0.1564	0.36	0.3746	0.1657
0	3	0.63	0.6589	0.1915	0.71	0.7237	0.2033
0	4	0.874	0.8965	0.1989	0.924	0.9356	0.2109
1	1	0.25^{-}	0.1657	0.1624	0.29^{-}	0.1840	0.1724
1	2	0.39	0.3669	0.2954	0.45	0.4162	0.3153
1	3	0.83	0.6727	0.3676	0.76	0.7398	0.3900
1	4	0.890	0.8994	0.3838	0.937	0.9388	0.4056
2	2	0.58	0.5057	0.5530	0.65	0.5745	0.5849
2	3	0.80	0.7331	0.6993	0.86	0.8047	0.7288
2	4	0.936	0.9139	0.7336	0.964	0.9524	0.7594
3	3	0.91	0.8450	0.8921	0.95	0.9060	0.9116
3	4	0.976	0.9453	0.9388	0.99^{+}	0.9757	0.9510
4	4	0.99^{+}	0.9783	0.9890	0.99^{+}	0.9932	0.9924

1) $q=0$이면 (2.1)에서 $\hat{b}_1$과 $\hat{b}_2$가 서로 독립적인 분포를 한다.
2) F.E. Steffens(1969)참고
3) F.E. Steffens(1970)참고

Maxmod, Minmod검정의 검정력과 F검정의 검정력을 정리한 것이 <표 3.1>이다. F검정의 검정력은 피어슨과 하틀리[E.S. Pearson and H.O. Hartley(1951)]의 도표에서 눈금을 읽은 것인데 +부호는 그 값 이상을, −부호는 그 값 이하를 표시한다.

<표 3.1>에서 보면 자유도 n이 10과 20일 때 $\delta_1=0$이면 Maxmod검정의 검정력은 F검정의 검정력보다 약간 높지만 그 밖의 경우에는 F검정의 검정력이 Maxmod검정의 검정력보다 약간 높다. Minmod검정의 검정력은 δ_1 또는 δ_2가 0이나 1처럼 아주 작을 때는 F나 Maxmod검정에 비하여 아주 낮고 δ_1과 δ_2가 커질수록 F나 Maxmod검정과 비슷하여 진다. 스테펜스는 Minmod검정이 자유도 n이 아주 작고 δ_1과 δ_2가 비슷하게 크면 검정력이 F나 Maxmod검정보다 높다는 것을 지적하고 있다. 예를 들면 자유도 $n=2$, $\alpha=0.05$수준일 때 $\delta_1=\delta_2=5$이면 Minmod, Maxmod, F검정의 검정력은 각각 0.9212, 0.6234, 0.9170이다.

<표 3.2>는 大標本일 때 검정력을 비교하기 위하여 자유도 $n\to\infty$일 때 스테펜스가 작성한 검정표를 이용하여 $\alpha=0.05$ 수준의 4가지 2변량 t검정과 F검정의 검정력을 계산한 것이다. F검정의 검정력은 피어슨과 하틀리의 도표로부터 구하였고 2변량 t검정의 검정력은 (2.10)의 분포를 이용하므로 켄달과 스튜아트[M.G. Kendall and A, Stuart(1969)]의 정규분포표를 사용하여 계산하였다.

<표 3.2>에서 보면 Maxmod검정의 검정력은 δ_1과 δ_2가 각각 1, 3일 때를 제외하면 전반적으로 F검정의 검정력보다는 낮지만 무시할 수 있는 정도의 차이밖에 없다. Minmod검정의 검정력은 전반적으로 F나 Maxmod검정보다 낮은데 δ_1 또는 δ_2가 0이나 1처럼 작을 때는 상당한 차이를 낳고 δ_1과 δ_2가 같이 커갈수록 그 차이가 작아진다. 단측 Maxmod검정의 검정력은 δ_1과 δ_2가 다 陰數일 때는 아주 낮고 δ_1과 δ_2가 커질수록 커지는데 δ_1과 δ_2가 같이 클 때에는 F, Maxmod검정과 비슷하지만 δ_1이나 δ_2 가운데 하나만 크고 다른 하나는 작을 때는 F, Maxmod검정보다도 높다. 단측 Minmod검정의 검정력은 δ_1과 δ_2가 다 陽數가 아닐 때는 아주 낮고 δ_1과 δ_2가 다 양수일 때는 Minmod검정보다는 높지만 전반적으로 F검정보다는 낮다. F검정과의 차이는 δ_1과 δ_2가 같이 클 경우는 작고 그렇지 않을 경우는 크다.

이상과같이 (2.13)에서 보면 Maxmod검정을 제외한 나머지 2변량 t검정은 $\hat{\beta}_1$과 $\hat{\beta}_2$의 평면을 2차평면의 일부로 제한하고 있다는 사실에 유의하여야 한다. 예를 들면 Minmod 검정은 $\hat{\beta}_1$나 $\hat{\beta}_2$가 어느 하나만은 0일 수 없으며 단측 Maxmod검정은 $\hat{\beta}_1$과 $\hat{\beta}_2$가 동시에 음수일 수는 없다는 것을 전제로 한다. <표 3.1>과 <표 3.2>에서 Maxmod검정 이외의 2변량 t검정의 검정력은 그 검정이 전제로 하는 $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ 영역밖의 $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$[1)]에 대하여는 대단히 낮다. 이것은 그 때는 귀무가설을 긍정하게 될 확률이 높다는 것을 의미하며 곧 귀무가설이 틀림에도 불구하고 귀무가설을 받아드리는 誤判을 의미한다. 따라서 2변량 t검정은 각 검정이 전제로 하는 $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$에 관한 가정이 틀림없이 참(眞)일 때에만 사용하여야 한다는 것을

1) $\sigma>0$으로부터 $\hat{\beta}_i=0$, $\hat{\beta}_i>0$, $\hat{\beta}_i<0$은 각각 $\delta_i=0$, $\delta_i>0$, $\delta_i<0$과 1對1로 대응된다.

<표 3.2> $q=0$일때 $\alpha=0.05$수준 5가지 검정의 검정력 자유도 $n\to\infty$

검정법 / 임계치 δ_1	δ_2	F	Maxmod	Minmod	단 측 Maxmod	단 측 Minmod
		2.9957	2.2365	1.2170	1.9545	0.7601
−2	−2	0.72	0.6478	0.6144	0.0001	0.000008
−2	−1	0.51	0.4711	0.3350	0.0016	0.0001
−2	0	0.41	0.4216	0.1753	0.0253	0.0007
−2	1	0.51	0.4711	0.3350	0.1699	0.0017
−2	2	0.72	0.6478	0.6144	0.5181	0.0026
−2	3	0.912	0.8679	0.7546	0.8521	0.0029
−2	4	0.985	0.9769	0.7817	0.9796	0.0029
−1	−1	0.34^-	0.2057	0.1827	0.0031	0.0015
−1	0	0.34^-	0.1313	0.0956	0.0268	0.0088
−1	1	0.34^-	0.2057	0.1827	0.1712	0.0233
−1	2	0.51	0.4711	0.3350	0.5189	0.0350
−1	3	0.69	0.8016	0.4115	0.8523	0.0371
−1	4	0.966	0.9653	0.4263	0.9796	0.0392
0	0	0.05	0.0500	0.0500	0.0500	0.0500
0	1	0.34^-	0.1313	0.0956	0.1909	0.1330
0	2	0.41	0.4216	0.1753	0.5303	0.1996
0	3	0.780	0.7831	0.2153	0.8558	0.2208
0	4	0.957	0.9621	0.2230	0.9801	0.2235
1	1	0.34^-	0.2057	0.1827	0.3109	0.3538
1	2	0.51	0.4711	0.3350	0.6000	0.5309
1	3	0.69	0.8016	0.4115	0.8772	0.5874
1	4	0.966	0.9653	0.4263	0.9831	0.5944
2	2	0.72	0.6478	0.6144	0.7678	0.7944
2	3	0.912	0.8679	0.7546	0.9287	0.8813
2	4	0.985	0.9769	0.7817	0.9902	0.8920
3	3	0.974	0.9505	0.9268	0.9781	0.9752
3	4	0.99^+	0.9913	0.9601	0.9970	0.9869
4	4	0.99^+	0.9985	0.9946	0.9996	0.9938

주의하여야 한다.

나. q 값의 變動에 따른 檢定力

크리스텐센[L.R. Christenen(1973)]은 q값의 변동에 따른 F검정과 Maxmod검정의 검정력을 비교하였는데 Maxmod검정의 임계치를 본페로니의 부등식으로부터 구한 근사치를 사용하였기 때문에 자신이 지적한 대로 Maxmod검정의 검정력이 실제보다는 낮게 되므로 정확한 비교는 되지 못하였다. 그의 비교에 의하면 전반적으로 F검정의 검정력이 Maxmod검정보다 높고 q값이 $+1$에 가까우면 상당히 큰 차이가 나는 것으로 되어 있다.

여기서는 복잡한 계산을 피하기 위하여 자유도 $n \to \infty$인 대표본일 때만 생각하기로 하고 2변량 정규분포를 이용하여 검정력을 계산해서 비교한다. 임계치가 Maxmod와 단측 Maxmod검정을 위하여서만 구하여져 있기 때문에 이 두 검정과 F검정만을 비교하고 q의 값은 -0.5, 0.0, 0.3, 0.5, 0.8의 5가지를 취하였다. q값이 0일 때는 <표 3.2>의 임계치를 이용하였고 q값이 양수일 때는 Maxmod검정은 던과 매시[O.J. Dunn and F.J. Massey (1965)]의 계산을, 단측 Maxmod검정의 임계치는 굽타[S.S. Gupta (1963—1)]의 계산을 이용하였다. $q=-0.5$일 때는 Maxmod검정의 임계치는 $q=0.5$일 때와 같고 단측 Maxmod검정의 임계치는 더넷과 소벨[C.W. Dunnett and M. Sobel (1954)]의 계산을 이용하였다. δ_1과 δ_2의 값은 -1.5, 0.0, 1.5, 2.5의 4가지로만 한정하였다. F검정의 검정력은 피어슨과 하틀리의 도표를 읽었고 Maxmod, 단측 Maxmod검정의 검정력은 0.1의 간격으로 5점—Legendre-Gauss공식에 의하여 직접 계산하였다[1]. 결과를 켄달과 스튜아트 정규분포표와 비교한 결과 0.0001미만의 차이밖에는 없었으므로 검정력을 비교하는 데는 충분히 정확한 계산이라고 판단된다. 더 많은 q값과 δ_i값에 대한 계산이 필요하지만 이상의 계산을 정리한 <표 3.3>으로부터 대표본일 때 3가지 검정의 검정력을 어느 정도 비교하여 볼 수 있다.

<표 3.3>에서 보면 q가 0일 때 F검정의 검정력은 δ_1과 δ_2의 절대치가 커질수록 높아지고 Maxmod검정의 검정력은 F검정보다는 조금 낮다. 단측 Maxmod검정의 검정력은 δ_1과 δ_2가 서로 다른 부호일 때는 F검정보다는 낮지만 그 밖의 경우는 높다. 특히 δ_1과 δ_2중 하나가 0일 때는 상당히 높다. 이상은 앞에서 지적한 것과 일치한다.

δ_1과 δ_2중 하나만 0이면 Maxmod와 단측 Maxmod검정의 검정력은 q값의 변동에 불구하고 거의 변화가 없는 반면에 F검정의 검정력은 q값의 절대치가 커질수록 커져서, q값의 절대치가 작을 때는 단측 Maxmod검정의 검정력이 가장 높지만 q값의 절대치가 커지면 F검정이 높아진다.

1) 콤퓨터는 CDC,CYBER-73-18을 사용하였고 프로그램은 MSL(Math Science Libraries)의 Subroutine의 GMI를 이용하였다.

<표 3.3> $\alpha=0.05$ 수준 F, Maxmod, 단측 Maxmod검정의 검정력, 자유도 $n\to\infty$

q / 검정법		−0.5			0.0			0.3			0.5			0.8		
		F	Maxmod	단측 Maxmod	F	Maxmod	단측 Maxmod	F	Maxmod	단측 Maxmod	F	Maxmod	단측 Maxmod	F	Maxmod	단측 Maxmod
δ_1	δ_2	3.00	2.21	1.96	3.00	2.24	1.95	3.00	2.23	1.94	3.00	2.21	1.92	3.00	2.15	1.85
0.0	0.0	0.05	0.0503	0.0500	0.05	0.0494	0.0505	0.05	0.0496	0.0498	0.05	0.0503	0.0496	0.05	0.0503	0.0497
1.5	−1.5	0.34	0.3653	0.3231	0.45	0.4066	0.3266	0.63	0.4371	0.3301	0.77	0.4623	0.3373	0.99+	0.5138	0.3632
1.5	0.0	0.34	0.2558	0.3470	0.34−	0.2490	0.3436	0.34−	0.2511	0.3392	0.34−	0.2558	0.3429	0.61	0.2739	0.3637
1.5	1.5	0.77	0.4623	0.6035	0.45	0.4066	0.5463	0.36	0.3810	0.5102	0.34−	0.3653	0.4885	0.34−	0.3404	0.4594
1.5	2.5	0.960	0.7703	0.8685	0.76	0.6939	0.8038	0.65	0.6638	0.7714	0.62	0.6497	0.7552	0.66	0.6434	0.7486
2.5	−1.5	0.62	0.6497	0.7057	0.76	0.6939	0.7089	0.880	0.7346	0.7124	0.960	0.7703	0.7191	0.99+	0.8480	0.7422
2.5	0.0	0.75	0.6264	0.7244	0.61	0.6125	0.7163	0.65	0.6173	0.7136	0.75	0.6264	0.7197	0.971	0.6525	0.7423
2.5	2.5	0.99+	0.9252	0.9688	0.900	0.8421	0.9152	0.805	0.7998	0.8805	0.75	0.7734	0.8575	0.66	0.7332	0.8246

δ_1과 δ_2중 어느 하나도 0이 아닐 때는 3가지 검정의 검정력이 공통적으로 q가 -1쪽에서 $+1$쪽으로 커질수록, δ_1과 δ_2가 다 양수이면 작아지고 δ_1과 δ_2가 서로 다른 부호이면 커지는데 그 증감정도는 F검정이 가장 크고 다음이 Maxmod검정이며 단측 Maxmod검정은 가장 작다. 따라서 q가 $+1$에 가까이 되면, 검정력은 δ_1과 δ_2가 다 양수일 때 단측 Maxmod, Maxmod, F검정의 순서로 높고 δ_1과 δ_2가 서로 다른 부호이면 그 반대의 순서가 된다. 한편 q가 -0.5일 때는 q가 0일 때의 영향이 많아서 δ_1과 δ_2가 양수이면 F, 단측 Maxmod, Maxmod의 순서로 높지만 δ_1과 δ_2가 서로 다른 부호이면 그 순서가 분명하지 않다.

q가 $+1$에 가깝고 δ_1과 δ_2가 다 양수일 때는 크리스텐센의 비교와 상치되는 결과가 나오는데 이것은 크리스텐센의 비교가 본페로니의 근사치를 사용한 때문이라고 생각된다. 던과 매시[O.J. Dunn and F.J. Massey (1965)]가 계산한 수표에서 보면 q가 $+1$에 가까울수록 임계치의 정확한 값과 본페로니의 근사치는 차이가 커진다.

이상을 정리한 것이 <표 3.4>인데 표에서 F, Maxmod, 단측 Maxmod는 각각 F, Maxmod, 단측 Maxmod검정의 검정력을 말한다.

<표 3.4> q, δ_i변동에 따른 검정력의 비교, 자유도 $n\to\infty$

δ_i \ q	-0.5	0	$\to+1$
$\delta_1>0, \delta_2>0$	F>단측Max>Max	단측Max>F>Max	단측Max>Max>F
$\delta_1 . \delta_2<0$	불 분 명	F>Max, 단측Max	F>Max>단측Max
$\delta_1 . \delta_2=0$, $\delta_1+\delta_2>0$	F 단측Max>Max	단측Max>Max>F	F>단측Max>Max

4. 結　論

지금까지 2개 계수의 동시유의성 검정에 한정하여 2변량 t검정을 고찰하고 F검정과 비교하기 위하여 대표본일 때 몇가지 경우에 대하여 검정력을 계산하였다. 그 결과로 대표본일 때에 한정하여 다음의 몇가지를 지적할 수 있다.

첫째, q가 0에 가까울 때는 Maxmod 검정의 검정력은 F검정보다 낮지만 그 차이는 무시하여도 좋을 정도이므로 Maxmod검정은 F검정에 대체될 수 있다. 이때 Maxmod검정은 다른 2변량 t검정과는 달리 검정계수 공간의 제한을 전제하지 않고 또 F검정과는 달리 유의수준만 조정하면 개별 t검정의 판단과 일치한다는 장점을 지닌다[1].

1) (1.21)로 부터 F검정은 유의수준을 조정하여도 개별 t검정과는 판단이 일치되지 않을 수 있다는 것을 알 수 있다.

둘째, q가 0에 가까울 때 검정계수 가운데 적어도 하나는 상당히 큰 양수이면 단측 Maxmod검정이 높은 검정력을 보인다.

셋째, q가 0일 때 Minmod와 단측 Minmod검정은 대표본에서는 F검정보다 상당히 열등한 검정이다.

넷째, F, Maxmod, 단측 Maxmod검정의 q값 변동을 비교하면 F검정의 검정력은 전반적으로 높으나 다른 두 검정의 검정력은 계수의 부호 또는 크기에 따라서 변화가 심해서 F검정보다 혹은 높고 혹은 낮다. 따라서 F검정이 안정적인 검정이지만 q와 계수의 부호, 크기에 따라서 특별히 검정력이 높은 검정을 하고자 할 때는 Maxmod 또는 단측 Maxmod검정을 주의깊게 선택하여 더 좋은 검정을 할 수 있다. 이 점은 다른 2변량 t검정에 관하여 검정력을 계산해 보면 더 좋은 방법을 찾을 수도 있음을 암시한다.

물론 이상의 지적들은 소표본을 포함해서 충분한 검정력 계산에 의하여 수정되고 보완되어야 한다. 한편 2변량 t검정은 다음과 같은 문제점을 가지고 있다.

첫째, 실제검정방법으로 사용되기 위하여는 모든 q값과 자유도 n에 대한 임계치표가 준비되어야 하고 그러기 위하여는 많은 계산이 필요하다. 독립변수 행렬을 직교변환에 의하여 q값이 0이 되도록 변환시킬 수는 있지만 Maxmod검정을 제외한 다른 2변량 t검정이 전제로 하는 계수 공간의 제약 때문에 직교변환은 2변량 t검정의 장점을 살리지 못하게 되므로 역시 모든 q값에 대한 임계치표가 필요하다. 완전한 임계치표는 준비되지 않더라도 근사적 임계치와 그에 따른 검정수준의 변동폭은 계산되어야 한다.

둘째, <그림 2.1>에서 t_1^0와 t_2^0를 결정하는 기준 문제가 검토되어야 한다. 일반적으로는 개별검정의 검정수준 혹은 임계치가 같도록 하는 것을 생각하지만 기준을 달리하여 검정력을 높일 여지도 있으므로 이 문제는 앞으로의 연구과제가 된다.

셋째, 3개 이상 계수의 동시검정으로 일반화할 때 F검정은 자유도만 조정하여 하나의 통계량(statistic)에 의하여 검정하지만 다변량 t검정은 3개 이상의 통계량이 필요하고 또 3개 이상의 q값에 대한 임계치표가 필요하게 되어 검정계수의 수가 많아질수록 문제가 복잡하여 진다.

넷째, 계수공간을 제한하는 2변량 t검정은 계수가 전제로 하는 영역밖에 있을 때는 오판하게 하므로 경우에 따라서는 검정력을 높이는 대신에 오판의 위험부담이 있다.

參 考 文 獻

[1] Christensen, L.R. (1973), "Simultaneous Statistical Inference in the Normal Multiple Linear Regression Model," *J.A.S.A.*,[1] 68(1973) 457-461.

[2] Dunn, O.J. and Massey, F.J.(1965), "Estimation of Multiple Contrasts Using t-Distributions," *J.A.S.A.*, 60(1965) 573-83.

[3] Dunnett, C.W. and Sobel, M. (1954), "A Bivariate Generalization of Student's t-Distribution with Tables for Certain Special Cases," *Biometrika*, 41(1954) 1953-69.

[4] Graybill, F.A. (1961), *An Introduction to Linear Statistical Models*. Vol. 1, New York: McGraw-Hill Book Co., 1961.

[5] Gupta, S.S. (1963-1), "Probability Integral of the Multivariate Normal and Multivariate t," *A.M.S*,[2] 34(1963-1) 792-828.

[6] _______(1963-2), "Bibliography on the Multivariate Normal Integrals and Related Topics," *A.M.S.*, 34(1963-2) 829-38.

[7] Kendall, M.G. and Stuart, A.(1999), *The Advanced Theory of Statistics*, Vol.1, 3rd ed., New York: Hafner Publishing Co, 1969.

[8] Miller, R.G.(1966), *Simultaneous Statistical Inference*, New York: McGraw-Hill Book Co, 1966.

[9] Pearson, E.S. and Hartley, H.O.(1951), "Charts of the Power Function for Analysis of Variance Tests, Derived from the Noncentral F Distribution," *Biometrika*, 38(1951) 11-130.

[10] Steffens, F.E. (1969), "Critical Values for Bivariate Student t-Tests," *J.A.S.A.*, 64(1969) 637-46.

[11] _______(1970), "Power of Bivariate Studentized Maximun Modulus Tests," *J.A.S.A.*, 65(1970) 1639-1644.

1) *J.A.S.A.*; *Journal of the American Statistical Association*,
2) *A.M.S.*; *The Annal of Mathematical Statistics*.

SUMMARY

On Bivariate-t Significance Tests of Linear Regression Coefficients

Kim, Kang Kyun*

To test simultaneous significance of more than two linear regression coefficients, we can consider multivariate-t tests with critical regions in t-space instead of F-tests where t-values are t-statistics of significance tests of one coefficient.

In this paper bivariate-t distributions and bivariate-t tests of two coefficients such as maxmod, minmod, one-tailed maxmod and one-tailed minmod tests are studied. Through the calculation of powers of test, it is learned that in some cases bivariate-t tests are more powerful than F-tests.

*Korea Institute of Science and Technology.