OR과 最適化
——數理計劃法을 中心으로——

金　滿　植*

1. System과 OR

企業이나 그와의 組織體가 커짐에 따라서 그經營組織이나 管理機能이 細分化되어 온 것은 周知의 事實이다.

이와같은組織, 機能의 分化는 應用科學의 發展過程에도 적지 않은 影響을 주었으며, 科學은 더욱 專門化되고 이의 對象分野도 細分化되였다. 物理學에서 電磁氣學과 電氣工學이 分化되고 電磁氣學에서 通信工學과 電子工學으로, 또한 制御工學과 情報工學으로 時代의 要請에 따라서 專門化되었다.

이와같은 高度의 專門分化의 過程은 元來 構成體本體를 더욱 깊게 파고드는 分析的인 方法이 되어야 함에도 不顧하고 現實로서는 各部分機能을 高度로 發展시켰어도, 各部分의 目標의 統一 또는 各機能間에 均衡을 取한 새로운 組織體를 構成한다는 觀點에서는 等閑視되었다. 따라서 組織體를 構成하는 各部分機能을 全體로서 가장 效率的으로 稼動시킬 수 있는 部分機能의 統合化 即 system的 思考를 基礎로 하는 應用科學이 必要하게 된 것이다. system이라는 觀點에서 意思決定을 하든지 政策이나 計劃을 세운다는 것은 이들의 他部門에의 波及效果나 部門間의 相互關係를 充分히 把握한 다음에 組織全體의 目的에 對하여 效果를 最大로 하는 方法을 選擇하든지 政策이나 計劃을 求하게 된다.

OR의 本質的인 特徵의 하나는 이러한 system의 運用에 關한 여러問題의 最適化(optimization)을 圖謀하는 데 있다고 볼 수 있다. 即 OR에서는 問題에 對한 現在 使用하고 있는 解의 單純한 改良을 하는 것이 아니고, 이 問題의 最適인 解(optimal solution)를 더욱 適切한 解로 求하려고 하는 데 最終的인 目標를 두고 있다. 물론 現實로서는 方法論的인, 또는 解析的인 面에서 最適인 解를 求하지 못하는 경우도 많으나, 恒常 最適解 또는 이에 可能限 近接하려는 努力를 傾注하는 것이 OR的 approach의 基本的 姿勢이다. 따라서 極言하면 OR 그 自身이 最適化의 理論이고 方法이며, 所謂 "最適化" 問題 全體를 劃一的인 數學的 model로서 取扱한다는 것은 大端히 困難한 일이다.

*漢陽大學校工科大學
工業經營學科

2. 數理計劃法의 問題

一般的으로 "最適化" 問題中에서 特히 數學的model로서 가장 簡潔하고 明確한 型式을 取한 問題를 數理計劃法(Mathematical Programming: MP) 問題라고 한다.

이 小論에서 數理計劃法에 屬하는 여러 型式의 問題 및 그의 algorithm를 最適化理論의 一環으로서 全般的으로 考察하여 본다.

最適인 計劃을 作成한다는 問題를 例로 取하여 보면, 最終的으로 決定된 實行計劃은 實際의 活動이나 順序에 맞춰서 여러形式으로 表現된다. 이形式이 作成되는 過程에는 "最適"으로 決定되어야 할 몇個의 基本的인 要素가 存在하여야 할 것이다. 이들要素의 構成은 實際의 system을 目的에 따라 어떻게 modeling 할 것인가에 따라서 다르게 된다. 特히 이들의 構成要素가 數値에 對應하여 決定되는 경우에는 數學的으로는 變數로서 表示된다.

計劃要素를 表示하는 變數의 1雙의 값에 하나의 計劃이 對應하게 되나, 實際의 system은 여러要素에 依하여 規制되므로 計劃이 實行可能하게 되기 위하여는 이들 變數가 取하는 값에도 制限이 있게된다. 이들의 制約이 變數에 關한 制約式으로 表現되며, 實行可能한 計劃의 目的達成의 評價尺度가 이 計劃을 表示하는 變數의 目的函數로서 表現되는 計劃問題를 數理計劃法의 問題라고 불리우며 이 問題를 解析하기 위한 方法 및 理論全體를 數理計劃法이라고 한다.

即,

變　　數 : $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

制 約 式 : $f_i\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqq 0\ \ (i=1, 2, \cdots\cdots, m)$

目的函數 : $f_0\ (x_1, x_2, \cdots, x_n)$

로서 構成되는 計劃問題는 數學的으로

$$f_i\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqq 0\ \ (i=1, 2, \cdots, m) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\text{Min. (or Max)}\ f_0\ (x_1, x_2, \cdots, x_n)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

인 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$를 求하는 條件附極値問題가 된다[1].

MP 問題는 變數나 制約式, 目的函數의 性質이나 對象에 따라서 問題에 몇개의 特性이 있다. 가령

model 特性
- 確定的 : input 에 對하여 output가 완전히 決定됨.
- 確率的 : input 에 對하여 output가 不確定 要因을 包含함
- 靜 的 : 時間的 要素를 包含하지 않음.
- 動 的 : 時間的 要素를 包含함.

變　　數
- 連續値를 取함.
- 離散値만 取함

制 約 式 目的函數
- 函數의 數學的 型式 : 線型 2次式, 分數式, 一般的인 非線型 函數, 分離型, 凸(凹)性이 있는 函數等
- 構造的인 特殊性 : network에 依한 表現의 可能性, 多段的 構造(multi-stage)를 가지는 表現等

等이 問題를 푸는 方法 또는 計算順序에 關聯하여 分類된다. 이들을 概觀하면 目的函數나 制約式이 全部 1次式으로 또 變數가 非陰의 連續値를 取한 線型計劃法(Linear Progrannning: LP) 問題, 目的函數만 2次式으로 表示되는 2次計劃法(Quadratic Programming: QP) 問題, 分數式으로 表示되는 分數計劃法(Fractional Programming: FP) 問題, 變數中에 整數値또는 離散値의 制約이 包含되는 整數計劃法(Integer Programming: IP) 問題, 目的函數나 制約式中에 最少限 1개의 非線型函數를 包含한 非線型計劃法(Non-Linear Programming: NLP) 問題, 特히 最適解를 求하는 데 便利한 解析的인 性質—凸凹性을 가지고 있는 非線型計劃 問題中의 凸(凹)型計劃法(Convex (Concave) Programming)의 問題 等이 있다. 이 外에도 工學的 system設計 問題에서 由來된 幾何的計劃法(Geometric Programming) 問題, 變數나 制約式을 network 에 對應시켜 考察하는 Network 計劃法, 또 逐次決定過程(sequential decision process)이나 多段階決定過程(multi-stage decision process)을 다루는 動的計劃法(Dynamic Proamming: DP) 問題, Markov 計劃法(Markovian Programming)의 問題가 있으며, 確率的 要素가 介在하는 狀況下의 計劃問題로서 確率的計劃法(Stochastic Programming)의 問題도 MP에 屬한다.

2. 1 線型計劃法

變數가 非陰의 連續値를 取하고, 制約式, 目的函數가 1次式의 計劃問題 : $\text{Min}\{c'x \mid Ax \geqq b,\ x \geqq 0\}$를 對象으로 하고 있다. 대단히 效率的인 Simplex 解法이 있으며, 이外의 計劃法問題를 푸는 基本이 되고 있다. 實際問題의 應用例도 많고 가장 實用化되고 있는 計劃法中의 하나이다.

2. 2 線型分數計劃法 (Linear Fractional Programming: LFP)

變數 및 制約式에 對해서는 LP와 同一하나, 目的函數는 2개의 分數函數로서 表示되는 問題를 對象으로 하고 있다. 目的函數로서 利益率, 投資效率, 相對損失等을 取하는 경우는 이와같은 型의 問題로 된다. 目的函數가 1次式以外의 分數函數를 包含시키고 있을 때 分數計劃法이 된다.

2. 3 2次計劃法

變數 및 制約式에 對해서는 LP와 同一하나 目的函數가 2次式이 되는 問題 : $\text{Max}\ \{Cx + \frac{1}{2}x'Qx \mid Ax \leqq b,\ x \geqq 0\}$를 對象으로 하고 있다. 單只 一般的인 2次式에서는 極大(小)値와 最大(小)値가 一致되지 않으므로 普通은 凹(凸)函數가 되겠금 2次項의 係數行列 Q에 定符號의 假定을 한다. 資產選擇問題(property selection)에서 投資收益의 分散은 $\Sigma\sigma_{ij}\ x_i\ x_j$인 2次式으로 表示된다. ($x_i$: 第 i 項目에의 投資額, σ_{ij}는 第i, j 項目으로부터 收益의 共分散) 또 數値計算面에서는 一般的으로 非線型函數를 2次函數로 近似시켜 QP 問題로 푸는 경우等이 主要한 應用例이다[2].

2. 4 非線型計劃法

制約式, 目的函數中의 어느쪽에든지 最少限 1개의 非線型函數를 包含한 計劃 問題를 對象으로 하고 있다. 一般的인 型은 (1), (2)로서 주어진다. 特히 變數에 對한 條件을 따로 設定하지 않는 限, 變數는 連續値로서 取扱된다[3].

2. 5 凸(凹)型計劃法

NLP 의 一種이나 極小(大)値 (局部的)와 最小(大)値(全域)가 一致되는 性質을 가진 制約式이나 目的函數로 構成되는 問題를 對象으로 한다. 普通은 式 (1), (2)의 問題에서 $f_i(x)$: 凸型函數, $f_0(x)$: 凸(凹)型函數로 取扱한다. LP 나 QP 도 이問題의 特殊한 경우라고 생각된다. 또한 NLP 問題도 理論的으로 取扱되는 것은 大部分 凸(凹)型計劃法의 問題에 限定된

다. 別途로 凸(凹)性의 개념을 弱하게한 擬凸(凹) (pseudo-convex (concave)) 또 더욱 弱하게 한 準凸(凹) (quasi-convex (concave))의 槪念도 있으나, 이들에 對應하여 各各 擬凸(凹)型計劃法[4], 準凸(凹) 型計劃法[5]의 問題가 定義된다. 特히 後者는 經濟學에 많이 應用된다.

2. 6 整數計劃法

變數의 1部(mixed IP) 또는 全部(full IP)에 對하여 取할 수 있는 값이 整數値(離散値)에 限定되는 計劃法의 問題를 對象으로 하고있다[6]. 特히 LP 問題에서 變數에 整數値條件을 붙인 것을 整數線型計劃法 (Integer Linear Programming: ILP), 整數値로서 0 또는 1 의 값만 取하는 變數의 IP 問題를 0-1 型 變數計劃法이라 稱한다. 整數値條件은 單純히 變數에 小數點以下의 數를 가지고 있지 않다는 最小單位나 單純한 數値的인 意味뿐만 아니라, 現象의 數式化라는 面에서 重要한 意味를 갖고 있다. 즉 다른 計劃法問題로서 表現할 수 없는 "어느쪽인가 한쪽의 政策方針을 選擇하라"라고 하는 "either-or" 條件은 整數値條件(0 or 1)과 같은 表現이다. 따라서 前述한 "投資한다"든가 "投資안한다"를 表示하는 경우와 같이 變數에 記號的인 意味를 가진 數値를 取하는 model 도 對象으로 할 수 있다. 固定費의 問題(費用函數 $C(x)$가 $x>0$ 이면 $C(x)=ax+b(b\neq0)$, $x=0$ 면 $C(x)=0$ 가 되는 경우), 非 凸(凹)函數의 問題, 順序問題等에는 이와같은 "either-or"의 條件이 包含되므로 IP問題로서 表示할 수 있다. 가령 固定費問題에서 $C(x)=ax+by$, $0\leqq x\leqq Uy$, $y=0$ or 1 U: 대단히 큰數, 로서 表示할 수 있다.

2. 7 Network 計劃法

network 의 結合點이나 arc 에 對應하는 變數나 制約條件이 定해져 있는 計劃問題이다. 가령 arc에 對한 定義로서 函數에는 容量函數, 距離函數(所要時間을 包含) 變數로서 flow 나 論理變數 (arc 의 使用如否), 또 結合點에는 特性値로서 容量이나 消費되는 flow 의 必要量, 變數로서 時刻이나 論理變數等이 定義된다.

network 는 現實問題의 表現方法이며, 이와 같은 表現으로서 Hitchcock-Koopmans 輸送型問題 (結合點에 生産地, 消費地, arc 輸送路), 割當問題(作業이나 사람에 結合點, 사람과 作業의 對應關係에 arc), 最短經路問題(都市에 結合點, 經路에 arc), CPM(結合點에 作業의 開始, 完了時點 arc에 作業), 倉庫問題, 入札問題等을 들 수 있다[7]. 이 計劃法은 構造上의 特殊性과 이를 利用한 效率的인 解法이 있다는 것이 特徵이며, 問題의 型으로서는 LP 等의 다른計劃法에 所屬시킬 수도 있다.

2. 8 動的計劃法(Dynamic Programming: DP)

多段階라는 構造上의 特徵이 있는 計劃問題를 對象으로 하고 있으나, 特히 表現方法에 顯著한 特徵이 있다. 이表現方法은 Bellman 의 最適性原理 (principle of optimality)로 부터 만들어지나, 最適性의 原理를 應用하는 數理計劃法의 分野全體를 말한다고 하여도 좋다. 가령 LPmodel $\text{Min}\ \{\Sigma C_n x_n \mid \Sigma a_j x_j=b,\ x_i\geqq 0\}$를 DP model 로 表現하면 f_n (b를 目的函數의 最小値라고 하면

$$f_n(b)=\underset{x_n\in R_n}{\text{Min}}\ \{C_n x_n+f_{n-1}\ (b-a_n x_n)\}$$

로 된다.

2. 9 Markov 計劃法(Markovian Programming)

狀態의 遷移가 Markov 過程에 따르며, 政策에 따라서 相異한 遷移確率을 가지는 경우의 最適政策을 求하는 問題를 對象으로 하고 있다. 決定이 多段階的이라는 點에서는 DPmodel 이 되며, Markov 過程의 定常性을 取하면 LPmodel 로서도 數式化된다. 가령 $P_{ij}{}^{(k)}$를 政策 k 일때의 狀態 i 로 부터 j 에의 遷移確率, $C_{ij}{}^{(k)}$를 이때의 收益, $V_N(i)$를 狀態 i 로 부터 出發하여 N 期間에 얻는 最大平均收益이라고 하면

$$V_N(i)=\underset{k\in Policy}{\text{Max}}\ \{\Sigma C_{ij}{}^{(k)}P_{ij}+\sum_j P_{ij}{}^{(k)}V_{N-1}(j)\}$$

인 DPmodel 로서 數式化된다[9].

2. 10 幾何的計劃法(Geometric Programming)

非線型計劃法의 特殊形이며, 工學的인 設計問題로부터 始作되었다. 目的函數 및 制約式은 全部 正多項式(posinomial)라고 불리워지는 函數로만 表現된다. 正多項式이란 $\Sigma C_i \Pi x_k{}^{aik}$, $C_i\geqq 0$의 形을 가진 函數이며, 가령 x_k 가 길이(設計問題)라고 하면 $\Pi x_k{}^{aik}$ 項은 面積이나 體積, x_k 를 部品의 故障確率이라고 하면 冗長 system 의 故障率로서 表現할 수 있다. $g_i(x)$를 正多項式이라고 할 때 本計劃法 問題는 一般的으로

$$\text{Max}\ g_0(x)$$
$$g_i(x)\leqq 1\quad (i=1,2,\cdots,m)$$

이 形으로 表現된다[10].

2. 11 確率的 計劃法(Stochastic Programming)

確率事象이 狀況下에서의 計劃問題를 對象으로 하고 있으며, 따라서 不確定한 狀態를 取扱하고 決定自身의 評價도 不確定하다. 特히 不確定下의 線型計劃問題에는 2個의 型으로 大別된다. 하나는 一定한

危險率로서 일어날 수 있는 全事象에 對하여 實行可能한 政策을 調査하여 이中에서 하나의 最適政策을 決定하는 方法이고, 또 하나의 型은 實行可能性을 無視하여 于先 第1回의 決定을 하고 이 結果를 考察하면서 第2回의 決定을 하는 方法이다[11].

3. 數理計劃法의 Algorithm.

實用的인 立場에서는 各數理計劃法의 評價는 最適解 또는 近似解를 求하는 具體的인 計算方法(Algorithm)의 効率面에서 따질 때가 많다. 極限値問題를 풀기 위한 數學的 또는 數値的方法으로서 微分學이 應用되고 있는 것은 周知하는 바이나, 이方法의 本質的인 特徵은 函數의 局所的인 性質을 對象으로 하고 있는 點이며 局所的인 性質을 基礎로 하여 全域的인 結果를 求할 수 있는 問題에 對하여서는 대단히 有効하다. 數理計劃法의 algorithm의 大部分은 Simplex法, 線型化近似法, 傾斜法, SUMT法 等과 같이 이러한 種類의 問題를 對象으로 하고 있으나, 그렇지 않은 경우에는 可能한 全體의 解를 列擧해 나가는 列擧法(enumeration method)의 形을 取한다. 前者에 屬하는 問題는 函數의 凸(凹)性의 槪念에 의하여 數學的으로 特徵지울 수 있다. (凸(凹)型 計劃法)

$f(x)$가 凸閉集合 D(n次元)上의 凸(凹)函數이면 D에 있어서의 $f(x)$의 極小(大)値 (局所的)와 最小(大)値 (全域的)는 항상 一致하므로 $f(x)$의 局所的인 性質을 調査함으로서 最小(大)値를 求할 수 있다. 特히 $f(x)$가 1回 連續微分可能한 函數일 때는 D上에서 $\frac{\partial f}{\partial x_j}=0$를 滿足하는 點 x^0는 $f(x)$의 最小(大)値가 된다는 것은 잘 알려진 事實이다. 條件附極値問題에서는 $\frac{\partial f}{\partial x_j}=0$인 點은 반드시 D上에 있다고 斷定할 수는 없다. 制約條件이 等式일 때의 Lagrange乘數法은 不等式條件 또는 變數에 非陰條件이 있는 경우에는 Kuhn-Tucker定理로 擴張되며, 數理計劃法中에서 가장 重要하고 基本的인 定理이다[12)13)]. Kuhn-Tucker의 定理는 다음 形式으로 주어진다.

問題(1)~(2)에서 各 $f_i(x)$가 $x_j(j=1,2,\ldots n)$에 關하여 連續的偏微分 可能이며 $R=\{x|f_i(x)\leqq 0,$ $i=1,2,\ldots,m\}$의 境界가 適當하며 $L(x,u)\equiv f_0(x)+\sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$라고 한다. 이때

1) x^*가 最適解이면

$$\frac{\partial L(x^*,u^*)}{\partial x_j}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\frac{\partial L(x^*,u^*)}{\partial u_i}\leqq 0,\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x^*,u^*)}{\partial u_i}u_i^*=0 \ \cdots\cdots\ (4)$$

을 滿足하는 $u^*\geqq 0$가 存在한다.

2) 만일 $f_i(x)$가 全部 凸函數이면 윗 條件은 x^*가 最適解가 되기 위한 充分條件도 된다. 또한 問題 (1)~(2)이 變數 x에 非陰條件이 있는 경우에는 式(3)은

$$\frac{\partial L(x^*,\mu^*)}{\partial x_j}\geqq 0,\ \sum_{j=1}^m \frac{\partial L(x^*,\mu^*)}{\partial x_j}x_j^*=0$$

$x^*\geqq 0$ 이 된다.

이定理를 LP問題에 適用하면 最適解의 必要하고도 充分한 條件을 나타내는 雙對問題가 誘導된다. 또 一般的인 凸(凹)型計劃法問題의 algorithm에 있어서의 最適性의 判定은 이 定理에 基礎를 두고 있다.

LP問題를 풀기위한 Simplex法은 最適解가 制約領域(凸多面體)의 端點에 있다는 事實을 利用하여 푸는 一種의 傾斜法(gradient method)이며, LP解法에 關하여 이 方法보다 優秀한 方法은 現在로서 아직 없다. 그러나 LP問題에서도 Network 計劃法에 屬하는 特殊한 構造를 가지는 問題는 Simplex法을 基礎로 하여 特殊化한 効率的인 方法에 의하여 풀려지고 있다. 가령 輸送型問題에 對한 MODI法, 最大流量問題, 割當問題, CPM에 對한 特殊方法 等이 이에 屬한다[14].

傾斜法[15]은 制約領域內의 點에서 그點의 目的函數의 傾斜(gradient)를 調査하여 항상 目的函數가 減少(增大)하는 方向으로 追求해 가는 方法이다. 한번 進行하는 step幅의 取하는 方法에 따라서 a) 大 step 傾斜法과 b)小 step 傾斜法으로 分類되며, a)의 方法에서는 다음點이 可能解가 되는 範圍에서 目的函數値가 가장 減少(增大)하는 데까지 一時에 進行하는데에 對하여 b)의 方法은 可能解나 目的函數의 增減에 不顧하고 一定한 小幅만 進行해 나간다. Rosen의 射影傾斜法(gradient projection method)[16], Frisch의 Multiplex 法, Zoutendijk의 許容方向法(method of feasible direction)[17]은 大Step傾斜法에 屬하는 方法이나, 어느 方法에서나 實際的으로는 制約式이 1次이며 目的函數만이 非線型函數일 때에 有效한 方法이라고 생각된다. Rosen의 方法과 Frisch의 方法은 近似하나 前者는 點에 있어서의 傾斜를 항상 그 點이 包含되어있는 超平面의 共通部分에 射影하여 進行하는 方向을 決定하는데 비하여 後者는 우선 처음에 超平面에 垂直인 方向에 進行하는 方向을 求하고 이와같은 方向을 求하지 못할 때에는 境界에 따라서 進行한다. 即 前者는 Simplex法과 같이 領域의 周圍를 돌아 進行하나 後者는 于先 內部를 追求하는 方法을 取하고 있다. 兩者는 다같이 進行方向을 一定한 方式에 의하여 決定하는데에 對하여 Zoutendijk 方法에서는 가장 有效한 方向을 方向探索問題로 풀어 求해

나가는 點이 다르다.

step 傾斜法에는 古典的인 微分傾斜法도 包含되나, 가장 實用的인 方法은 MAP 法[18] (Method of Approximation Programming)이다. 이方法은 a)의 方法과는 對照的으로 制約式에 非線型函數가 있어도 制約式의 數가 많지않은 小型最適化問題를 푸는데 대단히 有效하며, 技術計算이나 process 制御關係의 問題解法으로서 많이 利用된다. 非線型函數를 制約領域內의 點으로 Taylor 展開하여 變數의 上, 下限을 붙여 LP 問題로서 푸나, 現在까지는 最適解에 반드시 收束하는지 如否는 理論的으로 證明되지 않는다고 한다.

逐次內點法은 制約領域의 內點系列의 收束法으로서 最適解를 求하려는 方法이며, SUMT 法[19] (Sequential Unconstrained Minimization Technique)와 Huard 의 中心法[20] (method of center)이 있다. 前者는 制約式이 없는 函數의 極値를 反復하여 最適解를 求하는 方法이며, 가령 問題 (1)～(2)는 $U(x, r) = f_0(x) + S_{(r)}\ I_{(x)}$인 函數의 最小値를 求하는 問題로 變更시킬 수 있다. 여기서 $I(x)$는 $R^\circ = \{x \mid g_i(x) < 0\}$에서 連續이며, $\{x^k\}$가 R°의 境界에서 收束하는 點列이면 $\lim I(x^k) = +\infty$, $S(r)$는 $r_i > r_{i+1} > 0$ 면 $S_{(ri)} > S_{(ri+1)} > 0$ 이고 또한 $\lim r_i = 0$ 면 $\lim S_{(ri)} = 0$ 인性質을 가진 任意函數이다. 普通은 $S_{(r)} = r$, $I_{(x)} = -\frac{1}{\sum g_{i(x)}}$ 또는 $-\sum ln\{-g_{i(x)}\}$로 한다. parameter $r = r_i$에 對한 $U(x, r_i)$의 最小値 $\{x(r_i)\}$는 $r_i > r_{i+1} \to 0$ 라고 놓을 때 最適解로 收束된다는 것이 證明되어 있다.

LFP 의 問題는 一般的으로는 凸(凹)型計劃法의 問題와는 다르나, 極小(大)値와 最小(大)値가 一致된다든가 最適解가 端點解로 된다는 面에서는 같다고 볼 수 있다. 解法으로서는 變數變換으로 2개의 LP 問題 (目的函數의 符號가 定해 있을 때는 1개의 LP 問題)로서 푸는 方法 Gomory 나 Dorn 에 依한 Simplex 法的解法이 있다.

ILP 問題의 解法으로서는 Gomory의 Cutting Plane 法과 列擧法의 2개로 大別되나, 現在까지는 實用的인 面에서 풀 수 있는 決定的인 解法은 없다. Gomory 方法은 變數가 整數値가 되는 LP 問題에 函數制約式을 附加시켜가며 풀어나가는 方法이다. 몇個의 數値實驗結果 좋은 結果는 얻지못하고 있다.

非凸(凹)型問題의 解法으로서 列擧法은 計算方法에 따라서 可能解를 列擧해 나가는 方法이나, 많은 種類의 解法이 이에 屬할 수 있다. 가령 DP問題의 一般解法도 効率的인 列擧法의 一種이라고 볼 수 있다. 特히 0—1型 ILP 問題에 對해서는 그의 性質上 列擧法에 屬하는 algorithm 은 大端히 많고 Land -Doig 方法, Glover 의 MD 法, Balas 의 Additive 法 等이 이에 屬한다.

列擧法에 屬하는 解法中에서 Branch and Bound Method[21] (分岐點 또는 俗稱 B&B 法)은 離散型問題를 取扱할 때 効率的인 方法이다. B&B法의 具體的인 計算順序는 對象으로하는 問題에 따라서 다르기는 하나 一般的으로 2개의 操作:1) 가지分類(branching) 2) 下(上)限界를 求함(bounding)으로 成立된다. 이 가지(枝)를 分類하여 즉 어느變數를 하나의 값에 固定시킬 때마다 가지를 進行시키며, 下(上)値를 求해 나가므로 하나의 可能解를 얻을 때 이것의 最適解 如否를 檢討해 나가게 된다.

B&B 法에 의하여 풀려진 問題는 많으며 巡回 salesman 問題, plant 配置問題, 準備費用을 考慮에 넣은 非凸型生產費用函數의 生產計劃問題等을 들 수 있다.

以上은 數理計劃法의 여러型의 問題를 풀기 위한 algorithm 의 大略을 論述하였으나 數理計劃法 全體가 풀린다는 數理的 保障은 없으며, 이分野의 論理的 考察, 硏究가 많히 期待된다.

數理計劃法은 單純히 問題의 定式化나 定性的인 性質만 檢討하는 理論이 아니고, 最適化 또는 近似解를 求해나가는 具體的 計算順序까지도 마련하고 發展해 나가야하는 特徵을 가지고 있음을 銘心하여야 한다.

以上의 小論으로서 今後 最適化理論을 硏究하고 整理해 나가는 讀者의 一助가 되면 多幸으로 생각한다.

參 考 文 獻

(1)(3)(6)(8)(11)(15) Hardley, G "Nonlinerar and Dynamic Programming" Addison-Wesley Pub. Co., London 1970.

(2) Beale, E.M.L "Numerical Methods" Ⅶ in 〔Ⅰ〕1967

(4) Kortanek, K.O. & Evans, J.P "Pseudo Concave Programming and Lagrange Regularity" Opns. Res., 15. 1967

(5) Arrow, K.J & Enthoven, A.C "Quasi-Concave Programming" Econometrica, 29, 1961

(7)(14) Ford,L.R "Flows in Networks" Princeton

Univ. Press. Princeton, 1962

(9) Howard, R.A. "Dynamic Programming and Markov Process" The M.I.T Press, Massachusetts, 1972

(10) Duffin, R.J "Geometric Programming Theory and Application" McGraw-Hill, New York 1963

(12) Abodie, J "Nonlinear Programming" North-Holland, Amsterdam, 1967

(13) Kuhn, H.W. & Tucker, A.W "Non-linear Programming" Sump. Math. Stat. Probability, Univ. of Calif. Press. Calif 1951

(16) Rosen, J.B "The Gradient Projection Method for Nonlinear- Programming" Part I Jour. SIAM,8, 1960

(17) Zoutendijik, G "Method of Feasible Directions" Elsever Pub. Amsterdam, 1960

(18) Griffith, R.E. & Stewart, R.A. "A Non-linear Programming Technique for the Optimization of Continuous Processing System" Mgmt. Sci. 7, 1961

(19) Fiacco, A.V. "Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained MinimizationTechnique" Wiley, Newyork, 1968

(20) Huard, P "Resolution of Mathematical Programm ing with Nolinear Constraints by the Method of Centers" Ⅷ in〔I〕

(21) Lawler, E.L. and Wood, D.E. "Branch & Bound Method" Opns. Res. 14, 1966