幾何學的 計劃法

姜 錫 昊*

Ⅰ. 序 言

1964년에 Duffin 과 Zener 는 幾何的 計劃法(Geometric Programming)이란 새로운 非線型 計劃法(Nonlinaer Programming)을 開發하였다. 이 새로운 幾何的 計劃法은 特殊한 型態의 非線型 計劃問題에만 적용이 가능하지만 반면 적용이 가능한 문제에 關해서는 매우 强力한 計劃法 중에 하나가 된다. 지금부터 幾何的 計劃法의 原理와 그에 따르는 問題解決 例題를 들면서 적용 가능한 非線型 問題를 分類하겠다.

Ⅱ. 幾何學的 計劃法

1. Posynomials

다음과 같은 임의의 非線型 函數를 생각하겠다.

$$y=C_1X_1^{-4}X_2^{-2}+C_2X_1^3X_2+C_3X_1^{-2}X_2^3 \cdots\cdots (1)$$

이 公式은 Polynomial이 아니다. 왜냐하면 exponent 들이 양수가 아니기 때문이다. 그러나 모든 Coefficient 들이 양수일 경우를 Duffine 과 Zener 가 Posynomials 라고 명명하였다. 이 問題의 解를 求하기 爲하여서는 古典的인 方法으론 y를 편미분하여 零으로 놓으면 N 個의 變數에 對하여 N個의 公式의 群을 이루는데 이 公式들은 역시 복잡한 非線型 問題로 남아있다. 더군다나 이런 과정은 Max나 Min 問題를 爲한 必要條件(necessary conditions)들이 될 뿐이지 充分條件(sufficient conditions)은 더욱 얻기 어려운 것을 알 수 있다. Posynomial을 다시 定義하면

$$y=\sum_{t=1}^{T} c_t \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{tn}} \cdots\cdots (2)$$

N=變數의 個數,

T=term 의 個數,

a_{tn}=정수,

$x_n>0$

$c_t>0$, 가 되며

公式(2)를 다시 정리하면

$$y=\sum_{t=1}^{T} c_t \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{tn}} =\sum_{t=1}^{T} c_t p_t(x) \cdots\cdots (3)$$

$p_t(x)=\prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{tn}}$ 가 된다 $\cdots\cdots$ (4)

K번째 변수에 對하여 편미분하면

$$\frac{\partial y}{\partial x_k}=\sum_{t=1}^{T} c_t\, a_{tk}\, x_k^{a_{tk}-1}\left[\prod_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{N} x_n^{a_{tn}}\right] \cdots\cdots (5)$$

$x_k \neq 0$ 가 된다.

公式 (5)를 0로 놓으면, $x_k \neq 0$이기 때문에 最適値를 爲한 必要條件은,

$$\sum_{t=1}^{K} c_t\, a_{tk} \prod_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{N} x_n^{a_{tn}} = 0 \cdots\cdots (6)$$

이 된다. 이 式들 역시 T個의 變數에 對하여 N個의 公式의 群을 이루며 모두 복잡한 非線型 公式들이 된다.

y^*가 最適値(optimal)이라고 가정하면 各 term 들도 最適値가 되어야 할 것이다. t번째 最適 Weight 는 다음과 같다.

$$W_t^*=\frac{C_t \prod_{n=1}^{N} X_n^{*a_{tn}}}{y^*} \cdots\cdots (7)$$

여기서 다음과 같은 가정을 하자, 만약 우리가 y^*의 정확한 값을 알고, 또 最適 weight를 안다면, X의 最適値를 구할 수 있을 것이다. 그러므로 X의 값을 직접 求하는 方法을 버리고, y^*와 W^*을 求한 後로 미루도록 하자. 여기까지의 式들을 정리하면,

$$\sum_{t=1}^{T} c_t\, a_{tk}\, [P_t(x)]=0 \cdots\cdots (8)$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{T} a_{tk}\, W_t^*\, y^*=0,$$

$$\sum_{t=1}^{T} a_{tk}\, w_t^* = 0, \quad if\ y^*\neq 0 \cdots\cdots (9)$$

가 되며, 위의 가정에 依하여

$$\sum_{t=1}^{T} a_{tk}\, w_t^* = 0, \quad y^*\neq 0$$

$$y^*=\sum_{t=1}^{T} c_t\, p_t(x^*) \cdots\cdots (10)$$

$$\sum_{t=1}^{T} w_t^*=1 \cdots\cdots (11)$$

의 제 公式을 얻을 수 있다. T個의 變數들이 $N+1$의 等式을 이루었다. 公式 (11)이 存在하므로,

$$y^*=\prod_{t=1}^{T} (y^*)^{w_t} \cdots\cdots (12)$$

* 서울大學校 工科大學 産業工學科

이 公式 (7)과 (2)를 利用하여,

$$w_t^* = \frac{c_t \prod_{n=1}^{N} x_n^{*a_{tn}}}{y^*} = \frac{c_t p_t(x^*)}{y^*}$$

故로,

$$y^* = \prod_{t=1}^{T} \left[\frac{c_t p_t(x^*)}{w_t} \right]^{w_t}$$

$$= \prod_{t=1}^{T} \left(\frac{c_t}{w_t} \right)^{w_t} \cdot \prod_{t=1}^{T} p_t(x^*)^{w_t} \cdots\cdots (13)$$

가 된다. 公式(13)에서 x^*의 값을 모르므로, $p_t(X^*)$의 값도 알 수 없다. 故로 公式 (13)을 다음과 같이 變形할 수 있다.

$$y^* = \prod_{t=1}^{T} \left(\frac{c_t}{w_t} \right)^{w_t} \left[\prod_{t=1}^{T} \left\{ \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{tn}} \right\}^{w_t} \right] = \prod_{t=1}^{T} \left(\frac{c_t}{w_t} \right)^{w_t} \cdots (14)$$

여기까지의 公式을 총정리하면 다음과 같다.

$$y^* = \prod_{t=1}^{T} \left(\frac{c_t}{w_t} \right)^{w_t} \cdots\cdots (15)$$

$$\sum_{t=1}^{T} a_{tn} w_t = 0, \ n=1, \cdots, N \cdots\cdots (16)$$

$$\sum_{t=1}^{T} w_t = 1 \cdots\cdots (17)$$

公式 (16)은 orthogonality 條件을 表示하며, 公式 (17)은 normality 條件을 表示한다. 最近에는 幾何的 計劃法이 材料管理(material handling)에 많이 利用되고 있다. 이 解法을 더욱 分明히 하기 爲하여 간단한 例題를 들겠다.

〔例 題1〕

(問題)

$$y = 60x_1^{-3} x_2^{-2} + 50 x_1^3 x_2 + 20 x_1^{-3} x_2^3$$

(解法)

公式 (16)에 依하여

$$w_{01} + w_{02} + w_{03} = 1$$

公式 (17)에 依하여

$$-3w_{01} + 3w_{02} - 3w_{03} = 0$$

$$-2 w_{01} + w_{02} + 3w_{03} = 0$$

위의 세 等式으로부터 $w_{01}^* = 0.4$, $w_{02}^* = 0.5$, $w_{03}^* = 0.1$ 을 얻는다.

公式 (15)를 利用하여

$$y^* = \left(\frac{60}{0.4} \right)^{0.4} \left(\frac{50}{0.5} \right)^{0.5} \left(\frac{20}{0.1} \right)^{0.1}$$

$$= 125.8$$

을 얻을 수 있다.

公式 (7)을 利用하여,

$$60x_1^{-3}x_2^{-2} = 0.4(125.8) = 50.32$$

$$20x_1^{-3}x_2^3 = (0.1)\ (125.8) = 12.58$$

위의 두 式에서

$$x_1^* = 1.12$$

$$x_2^* = 0.944$$

를 얻을 수 있다.

2. Degrees of Difficulty

現在까지 terms의 數가 變數의 數 N 보다 하나 많은 경우, 즉 $T-(N+1) \equiv 0$ 경우만을 생각해 왔으나 Dual에서 線型獨立等式들이 $N+1$이고 Dual 變數値는 T를 얻는 경우로 생각을 확장시키기로 하자. 즉 $T-(N+1)$을 Degree of Difficulty(難易度)라고 定義하기로 하자. 이 問題는 더욱 어려운 問題가 되었다. 왜냐하면 $T-(N+1) > 0$은 $N+1$個의 線型等式에서 唯一解(unique solution)들을 얻을 수가 없기 때문이다. 公式 (14)에서 唯一解는 못 구했으나, m의 難易度와 公式 (16)과 (17)에서 m의 Dual 變數値를 求할 수는 있는 것이다. Duffin은 Dual 函數 y^*를 最大化하기 爲한 充分條件으로 다음과 같은 새로운 Dual 函數를 定義하였다.

$$y^* = (w_1, w_2, \cdots, w_m) = \prod_{t=1}^{T} \left(\frac{c_t}{w_t} \right)^{w_t} \cdots\cdots (18)$$

$$\sum_{t=1}^{T} w_t = 1 \cdots\cdots (19)$$

$$\sum_{t=1}^{T} a_{tn} w_t = 0, \ n=1, 2, \cdots, N \cdots\cdots (20)$$

〔例題 2〕

$$\text{Min: } y = \frac{40}{x_1 x_2 x_3} + 20x_1x_2 + 10x_1x_3 + 40x_2x_3 + 5x_1$$

$T=5$, $N=3$,

$T-(N+1)=1$,

難易度는 1이기 때문에,

$$-w_{01} + w_{02} + w_{03} + w_{05} = 0$$

$$-w_{01} + w_{02} + w_{04} = 0$$

$$-w_{01} + w_{03} + w_{04}$$

$$w_{01} + w_{02} + w_{03} + w_{04} + w_{05} = 1$$

에서 唯一解를 求할 수 없다.

$y(\vec{x}) > y^* = d^* \geq d(\vec{w})$의 關係에서 우리는 目的函數의 下限線을 求할 수가 있는 것이다.

$$110 \geq y^* \geq 100$$

$$w_{01} + w_{02} + w_{03} + w_{04} = 1 - w_{05}$$

$$-w_{01} + w_{02} + w_{03} = -w_{05}$$

$$-w_{01} + w_{02} + w_{04} = 0$$

$$-w_{01} + w_{03} + w_{04} = 0$$

이 式들을 풀면,

$$w_{01} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} w_{05}$$

$$w_{02} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5} w_{05}$$

$$w_{03} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5} w_{05}$$

$$w_{04} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} w_{05}$$

위의 關係式에서

$$0 \leq w_{05} \leq \frac{1}{3}, \quad 0 \leq w_{03} \leq \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{3} \leq w_{01} \leq \frac{2}{5},$$

$$\frac{1}{5} \leq w_{04} \leq \frac{1}{3}, \quad 0 \leq w_{02} \leq \frac{1}{5}$$

을 얻을 수 있다.

$$d(w)=\left(\frac{40}{w_{01}}\right)^{w_{01}}\left(\frac{20}{w_{02}}\right)^{w_{02}}\left(\frac{10}{w_{03}}\right)^{w_{03}}\left(\frac{40}{w_{04}}\right)^{w_{04}}\left(\frac{5}{w_{05}}\right)^{w_{05}}$$

$$=\left[\frac{40}{\frac{2}{5}-\frac{1}{5}w_{05}}\right]^{\frac{2}{5}-\frac{1}{5}w_{05}},\cdots,\left[\frac{5}{w_{05}}\right]^{w_{05}}$$

$$ln[d(w)]=\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}w_{05}\right)\left\{ln(40)-ln\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}w_{05}\right)\right\}$$
$$+,\ \cdots,\ +w_{05}\{ln5-ln\, w_{05}\}$$

$$\frac{\partial(ln\{d(w_5)\}}{\partial w_{05}}=\frac{(2-w_{05})^{\frac{1}{5}}(1-3w_{05})^{6/5}}{w_{05}(1+2\, w_{05})^{2/5}}$$
$$=5(200)^{2/5}\ (50)^{3/5}$$

$\Rightarrow w_{05}{}^*=0.071$

$w_{01}{}^*=0.3858$

$w_{02}{}^*=0.1574$

$w_{03}{}^*=0.1574$

$w_{04}{}^*=0.2284$

$\Rightarrow x_1{}^*=1.543 \quad x_2{}^*=1.120$

$x_3{}^*=0.554$

$d^*(x)=y^*(x)=108.7$

$110\geq y^*\geq 100$ 을 만족시키고 있다.

3. General Signomial

前節까지는 Posynomial 일 경우만을 다루는 計劃法만을 取扱하였지만 General Signomial 에서 Coefficients 가 陰數인 경우와 또는 不等式의 制限公式 등으로 前節의 Posynomials 의 Coefficients 가 陽數여야만 된다는 制限條件을 대폭 완화하여 一般化한 幾何的 計劃法으로 발달시켰다.

Generalized Signomial $Y(x)$를 定義하면 다음과 같다.

$$Y(x)=\sum_{t=1}^{Tm} c_{mt}\,\sigma_{mt}\prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{mtr}} \cdots\cdots (21)$$

$m=0,\ 1,\ 2\ \cdots,\ M$

$\sigma_{mt}\ =\pm 1,$

$c_{mt}\ >0,$

m 은 等式의 順序이며,

t 는 term 의 順序이며,

n 는 變數의 番號를 表示한다.

幾何的 計劃法의 Primal 問題는 N個의 變數를 갖는 目的函數 $Y(x)=Y_0$ 를 最小化(minimize)시키며 M個의 不等制限條件(inequality constraints)

$Y_m\leq\sigma_m,\quad m=\pm 1,\cdots,\ M$

$\sigma_m\pm 1$

들과 $x_n>0,\ n=1,\ 2,\ \cdots,\ N$를 만족시켜야 하는 반면, Dual 問題는 T個의 變數를 가진 다음과 같은 條件들을 갖는다.

Generalized normality 條件으로

$$z(w_i)=\sum_{t=1}^{T_0}\sigma_{0t}\ w_{0t}=\sigma \cdots\cdots (23)$$

$i=1,\ 2,\ \cdots,\ T$

$\sigma=\pm 1$

와 N個의 Orthogonality 條件들로

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{t=1}^{T_m}\sigma_{mt}\ a_{mtn}\, w_{mt}\ =\ 0 \cdots\cdots (24)$$

$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N$

이 必要하며, Dual 變數는

$w_{mt}\geq 0,\ \ m=0,\ 1,\ \cdots,\ M$

$t=1,\ 2,\ \cdots,\ T_m$

와 M個의 線型不等制限條

$$w_{m0}=\sigma_m\ \overset{T_m}{\underset{t=1}{\pi}}\ \sigma_{mt}\ \ w_{mt}\geq 0 \cdots\cdots (25)$$

$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ M$

$$T=\sum_{m=0}^{M}T_m \cdots\cdots (26)$$

들이 要求되며, 公式 (23), (24), (25), (26)으로부터 다음과 같은 Dual 函數를 誘導할 수 있다.

$$d^*(w)=\sigma\left\{\prod_{m=0}^{M}\prod_{t=1}^{T_m}\left(\frac{c_{mt}\ w_{mo}}{w_{mt}}\right)^{\sigma_{mt}\ w_{mt}}\right\}^{\sigma} \cdots\cdots (27)$$

$\sigma=\pm 1$

$w_{00}=1$

σ 의 sign 은 $Y(x)$의 sign 과 같다. 다음과 같은 普遍的 公式

$$\lim_{w_{mt}\to 0}\left(\frac{c_{mt}\, w_{mo}}{w_{mt}}\right)^{\sigma_{mt}\ w_{mt}}\equiv 1 \cdots\cdots (28)$$

에서 重要한 事實을 理解할 수 있다. 即, Primal 函數 $Y^*(x)$가 最小値가 存在하면, Dual 變數 Wi 는 全體의 最大値(global maximum)는 $Y^*(x)=d^*(w)$의 關係를 갖는다. 一但, 最適 Dual 變數 wi^* 들을 T個 알면, Primal 變數들을 다음 公式에서 쉽게 理解할 수 있다.

$$c_{0t}\prod_{n=1}^{N}x_n^{a_{0tn}}=w_{0t}\,\sigma Y^*(x)=w_{0t}\ \sigma\ d^*(w) \cdots\cdots (29)$$

$t=1,\ 2,\ \cdots,\ T_0$

$$c_{mt}\prod_{n=1}^{N}x_n^{a_{mtn}}=\frac{w_{mt}}{w_{m0}}, \cdots\cdots (30)$$

$t=1,\ 2,\ \cdots,\ T_m$

$m=1,\ 2,\ \cdots,\ M$

公式 (29), (30)은 非線型 일지라도, 단지 한 term에서만 非線型을 이루므로, 公式들을 logarithms 시켜 $log\ xi,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$의 線型公式群을 만들어 풀 수 있다.

〔例題 3〕

(問題) Max $z=5x_1{}^2-x_2{}^2x^3$

$s.\ t.\quad 5x_1x_2{}^{-1}-3x_2{}^{-1}x_3{}^2\leq 2$

(解法)

適正 基本式으로 于先 고친다.

Min : $\check{Z}=-5x_1{}^2+x_2{}^2x_3$

$$s.t. \ \frac{5}{2} x_1 x_2^{-1} - \frac{3}{2} x_2^{-1} x_3^2 \leq 1$$

이 基本式에서 다음 數値들을 얻을 수 있다.

$\sigma_{01} = -1,\quad \sigma_{02} = 1,\quad \sigma_0 = 1$

$\sigma_{11} = 1,\quad \sigma_{12} = -1,\quad \sigma_1 = 1$

$a_{011} = 2,\quad a_{012} = 0,\quad a_{013} = 0$

$a_{021} = 0,\quad a_{022} = 2,\quad a_{023} = 1$

$a_{111} = 1,\quad a_{112} = -1,\quad a_{113} = 0$

$a_{121} = 0,\quad a_{122} = -1,\quad a_{123} = 2$

Orthogonality, Normality 條件

$-w_{01} + w_{02} = \sigma_0 = 1$

$-2w_{01} + w_{11} = 0$

$2w_{02} - w_{11} + w_{12} = 0$

$w_{02} - 2w_{12} = 0$

위의 式에서

$w_{01} = -5,\quad w_{02} = -4$

$w_{11} = -10,\quad w_{12} = -2$

을 얻으므로, $\sigma_0 = -1$로 놓고 다시 풀면

$w_{01}^* = 5,\quad w_{02}^* = 4,$

$w_{11}^* = 10,\quad w_{12}^* = 2$

定義에서 $w_{00}^* = 1$이며,

$w_{01}^* = \sigma_1 [\sigma_{11} w_{11} + \sigma_{12} w_{12}]$

$= 1[1\ (10) + (-1)\ (2)]$

$w_{10}^* = 8$

만약 w_{10}^*가 陰數이면, 뭔가 잘못된 것임을 알 수 있다.

$$d^*\langle w \rangle = -1 \left[\left(\frac{(5)(1)}{5} \right)^{-5} \left(\frac{1 \cdot 1}{4} \right)^4 \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{8}{10} \right)^{10} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{2} \right)^{-2} \right]^{-1} = -9, 0$$

위의 값으로부터

$5x_1^2 = w_{01}^* \sigma d^* \langle w \rangle$

$= (5)(-1)(-9)$

$x_1^* = 3$

$$\frac{w_{11}^*}{w_{10}^*} = \frac{10}{8}$$

$$\frac{10}{8} = \left(\frac{5}{2} \right) (x_1)(x_2)^{-1}$$

$x_2^* = 6$

$(x_2)^2 (x_3) = (6)^2 x_3 = (4)(9)$

$x_3^* = 1$

을 얻을 수 있다.

Ⅲ. 結　　論

이상 展開한 幾何的計劃法은 特殊非線型 問題에 적용 可能한 것을 알았으나, 어떠한 問題가 이런 類型을 갖고 있을 것인지 궁금하다. 여러가지 分野에서 이런 類型問題가 發生할 것이지만, 産業工學 分野에서 材料管理(Material Handling)分野에서 그 例를 많이 발견할 수 있다. 例題 2의 式은 各 變數를 상자의 各 邊으로 생각하면 y가 상자의 총 費用으로 생각할 수 있어서, 最低費用을 求하는 問題인 것을 알 수 있다. 即 非線型 問題가 幾何的 計劃法의 類型을 갖추면, 어떤方法 보다도 能率的으로 最適解를 求할 수 있는 非線型計劃法이다.

References

1. Duffin, R.J., E.L. Peterson, and C. Zener, Geometric Programming Theory and aphlication, John Wiley & Sons, 1967.
2. Duffin, R.J., and E.L. Peterson, "Duality Theory for geometric Programming", SIAM. J. On Applied Mathematics, Vol. 14 (1966) pp.1307～1349
3. Pillip, Don, Geometric Programming, 1976
4. Taha H.H., Operation Resarch, McMillan Co. 1971