

“分布荷重을 받는 矩形板의 彈性解析”

張 錫 潤\*

Analysis of Rectangular Plates under Distributed Loads of Various Intensity  
with Interior Supports at Arbitrary Positions

by  
CHANG, SUK YOON

Abstract

Some methods of analysis of rectangular plates under distributed load of various intensity with interior supports are presented herein. Analysis of many structures such as bottom, side shell, and deck plate of ship hull and flat slab, with or without internal supports, Floor systems of bridges, including orthotropic bridges is a problem of plate with elastic supports or continuous edges.

When the four edges of rectangular plate is simply supported, the double Fourier series solution developed by Navier can represent an exact result of this problem.

If two opposite edges are simply supported, Levy's method is available to give an "exact" solution.

When the loading condition and supporting condition of a plate does not fall into these cases, no simple analytic method seems to be feasible.

Analysis of a simply supported rectangular plate under irregularly distributed loads of various intensity with internal supports is carried out by applying Navier solution well as the "Principle of Superposition."

Finite difference technique is used to solve plates under irregularly distributed loads of various intensity with internal supports and with various boundary conditions.

When finite difference technique is applied to the Lagrange's plate bending equation, any of fourth order derivative term in this equation produces at least five pivotal points leading to some troubles when the resulting linear algebraic equations are to be solved. This problem was solved by reducing the order of the derivatives to two: the fourth order partial differential equation with one dependent variable, namely deflection, is changed to an equivalent pair of second order partial differential equations with two dependent variables. Finite difference technique is then applied to transform these equations to a set of simultaneous linear algebraic equations.

Principle of Superposition is then applied to handle the problems caused by concentrated loads and interior supports.

This method can be used for the cases of plates under irregularly distributed loads of various intensity with arbitrary conditions such as elastic supports, or continuous edges with or without interior supports, and this method can also be used to solve the influence values of deflection, moment and etc. at arbitrary position of plates under the live load.

接受日字, 1976年 2月 10日

\* 正會員 韓國科學技術研究所附設 船舶研究所

### 1. 서론

구조기술자가 설계하는 대부분의 구조물은 판(plate)이 아닌 입체구조물이다. 대부분 문제를 간소화하여 1차원의 문제로 해석하고 있으나 그 결과는 불합리하거나 정당화되지 못하고 있다. 특히 선체구조의 경우 bottom, deck, sidshell, plate, 건축물의 경우 flat slab, 교량의 deck system, orthotropic bridge의 deck등은 연속이 되면 탄성지지된 판의 문제이다.

내부지지점을 갖는 판의 경우 편의상 몇개의 strip으로 나누어 해석하고 있으나 지지점의 형태가 임의의 크기이고 배열이 임의일 경우 이런 개념은 적용될 수 없다. 이런 문제 해석에는 중첩의 원리(Principle of Superposition)가 적용될 수 있는데 경계조건은 단순지지일 수도 있고 임의의 조건일 수도 있다.

판인 경우 경계조건이 단순지지이면 Navier solution, 대응하는 두 변이 고정, 다른 두 변이 단순지지이면 Levy solution등으로 정확하게 해결할 수 있으며 기타 여러사람에 의하여 연구되어 왔으나 외부 경계가 탄성 지지 또는 연속일 때는 간단한 해석적인 방법으로는 해결하기 곤란하다. 이런 문제를 비교적 간단하게 공학적인 목적을 위한 충분한 정확성을 잃지 않고 해결할 수 있는 방법으로 finite difference method가 있다.

본 연구에서는 4각형 형태의 임의의 하중조건과 임의의 경계조건을 가진 판을 해석하기 위한 방법을 개발하였다. 임의의 내부지지점을 갖고 임의의 하중을 받을 경우 외부 경계가 단순지지일 때는 정확한 이론에 의하여 값을 얻었다. 판의 경계조건이 임의일 경우의 방법도 제시하고 예로서 단순지지인 경우를 구체적으로 발표하였다.

### 2. 이론의 전개

응력이 탄성한계내에서 작용하는 한 중첩의 원리(Principle of superposition)와 변위의 적합성(Compatibility)이 이용된다. 고려되고 있는 판에 중간지지점이 있는 경우를 고려하자. 지지점이 없을 때  $k$ 점의 처짐을  $W_{k,0}$  집중하중만이 작용하고 중간지지점이 없을 때  $k$ 점의 처짐을  $W_{k,i}$ , 지지점에 집중하중만이 작용할 때의  $k$ 점의 처짐을  $W_{k,j}$ 라 할 때 板의 임의점  $k$ 에서의 처짐을  $W_k$ 라 정의하면

$$W_k = W_{k,0} + \sum_{i=1}^{N_s} W_{k,i} + \sum_{j=1}^{N_r} W_{k,j} \tag{2-1}$$

단위하중이  $i$ 점  $(x_i, y_i)$  또는  $j$ 점  $(x_j, y_j)$ 에 작용할 때의  $k$ 점  $(x_k, y_k)$ 에서의 처짐을  $a_{k,j}$ ,  $b_{k,i}$ 라 하면

$$a_{k,j} = \frac{W_{k,j}}{R_j}, \quad b_{k,i} = \frac{W_{k,i}}{P_i} \tag{2-2}$$

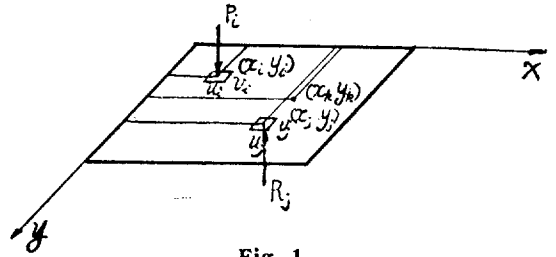


Fig. 1.

이 고 (2-1)식은 다음과 같이 된다.

$$W_k = W_{k,0} + P_1 b_{k,1} + \dots + P_{N_s} b_{k,N_s} + R_1 a_{k,1} + \dots + R_{N_r} a_{k,N_r} \tag{2-3}$$

따라서 모든 점을 고려하면

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_k \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{1,0} \\ \vdots \\ W_{k,0} \\ \vdots \\ W_{N,0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,N_s} \\ \vdots & & \vdots \\ \dots & b_{k,i} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N,1} & \dots & b_{N,N_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_{N_s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,N_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \dots & a_{k,j} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \dots & a_{N,N_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_{N_r} \end{pmatrix} \tag{2-4}$$

여기서

$W$ : 실제변위를 나타내는 column vector

$W_0$ : 중간지지점이 없는 상태에서 주어진 하중에 의하여 지지점위치에 발생하는 변위를 나타내는 vector

$A$ : 단위집중반력이  $j$ 점에 작용할 때  $k$ 점에서의 처짐 즉 influence coefficients를 나타내는 matrix

$B$ : 단위집중하중이  $i$ 점에 작용할 때  $k$ 점에서의 처짐 즉 influence coefficients를 나타내는 matrix

$P$ : 집중하중 vector

$R$ : 중간지지점에서의 반력 vector

라 정의하면 (2-4)식은 간단하게

$$W = W_0 + BP + AR \tag{2-5}$$

로 표시될 수 있다. 여기서

$$W = \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_k \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix}, \quad W_0 = \begin{pmatrix} W_{1,0} \\ \vdots \\ W_{k,0} \\ \vdots \\ W_{N,0} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,N_s} \\ \vdots & & \vdots \\ \dots & b_{k,i} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N,1} & \dots & b_{N,N_s} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,N_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \dots & a_{k,j} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \dots & a_{N,N_r} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_{N_s} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_{N_r} \end{pmatrix}$$

이 식으로부터

$$TW = W - W_0 - BP = AR$$

라 정의하면

$$R = A^{-1}TW \tag{2-6}$$

### 3. Navier Solution을 이용할 수 있는 경우의 해석

矩形板의 외부 경계조건이 단순지지상태일 경우는 Navier solution을 간단히 이용할 수 있다. 평면좌표계 (x,y)로 표시된 矩形박판의 미소변형이론에 의한 Lagrange의 편미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = q/D \quad (3-1)$$

여기서

W : 板의 처짐

q : 板에 수직으로 작용하는 하중

D : 板의 휨강성

x 및 y 방향으로의 치수가 각각 a,b 인 판이 x=0, x=a, y=0, y=b 에서 단순지지되어 있다. 이 판에 작용하는 하중

$$q = f(x,y) \quad (3-2)$$

는 x,y 의 함수로서 x와 y 방향의 Fourier 급수로서 다음과 같이 전개될 수 있다.

$$q = f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3-3)$$

여기서

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (3-4)$$

처짐의 상태도 하중의 상태와 근사하다는 관념에 의거 처짐의 함수를

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3-5)$$

라 가정하고  $\nabla^4 W = q/D$ 에 대입하여  $W_{m,n}$ 을 구한 다음 (3-5)식에 대입하면 다음 결과를 얻는다.

$$W = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3-6)$$

단순지지되어 있는 판의 (x<sub>i</sub>,y<sub>i</sub>), (x<sub>j</sub>,y<sub>j</sub>)점에 있는 x방향의 크기 u<sub>i</sub>, u<sub>j</sub>, y방향의 크기 v<sub>i</sub>, v<sub>j</sub>인 면적에 균등하게 작용하는 하중의 총량을 P<sub>i</sub>, R<sub>j</sub>라 하면 k점 (x<sub>k</sub>, y<sub>k</sub>)의 처짐은 다음과 같이 구해진다.

$$W_{k,i} = \frac{16P_i}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_i}{a} \sin \frac{n\pi y_i}{b} \sin \frac{m\pi u_i}{2a} \sin \frac{n\pi v_i}{2b}}{mnu_i v_i \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \times \sin \frac{m\pi x_k}{a} \sin \frac{n\pi y_k}{b} \quad (3-7)$$

$$W_{k,j} = \frac{16R_j}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_j}{a} \sin \frac{n\pi y_j}{b} \sin \frac{m\pi u_j}{2a} \sin \frac{n\pi v_j}{2b}}{mnu_j v_j \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

$$\times \sin \frac{m\pi x_k}{a} \sin \frac{n\pi y_k}{b} \quad (3-8)$$

(3-6)식에서  $W_{k,0}$ 는

$$W_{k,0} = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x_k}{a} \sin \frac{n\pi y_k}{b} \quad (3-9)$$

로 표시되며 influence coefficient의 계수

$$b_{k,i} = \frac{16}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_i}{a} \sin \frac{n\pi y_i}{b} \sin \frac{m\pi u_i}{2a} \sin \frac{n\pi v_i}{2b}}{mnu_i v_i \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \times \sin \frac{m\pi x_k}{a} \sin \frac{n\pi y_k}{b} \quad (3-10)$$

$$a_{k,j} = \frac{16}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_j}{a} \sin \frac{n\pi y_j}{b} \sin \frac{m\pi u_j}{2a} \sin \frac{n\pi v_j}{2b}}{mnu_j v_j \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \times \sin \frac{m\pi x_k}{a} \sin \frac{n\pi y_k}{b} \quad (3-11)$$

여기서

$$F_{mn} = \frac{C_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

$$G_{mnj} = \frac{\sin \frac{m\pi x_j}{a} \sin \frac{n\pi y_j}{b} \sin \frac{m\pi u_j}{2a} \sin \frac{n\pi v_j}{2b}}{mnu_j v_j \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

$$G_{mni} = \frac{\sin \frac{m\pi x_i}{a} \sin \frac{n\pi y_i}{b} \sin \frac{m\pi u_i}{2a} \sin \frac{n\pi v_i}{2b}}{mnu_i v_i \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{b}$$

라 하면 따라서

$$W_k = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \sin \alpha_m x_k \sin \beta_n y_k + \frac{16}{\pi^6 D} \sum_{i=1}^{N_P} P_i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mni} \sin \alpha_m x_k \sin \beta_n y_k + \frac{16}{\pi^6 D} \sum_{j=1}^{N_R} R_j \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mnj} \sin \alpha_m x_k \sin \beta_n y_k \quad (3-12)$$

$$\left(\frac{dW}{dx}\right)_k = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \alpha_m \cos \alpha_m x_k \sin \beta_n y_k + \frac{16}{\pi^6 D} \sum_{i=1}^{N_P} P_i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_m G_{mni} \cos \alpha_m x_k \sin \beta_n y_k + \frac{16}{\pi^6 D} \sum_{j=1}^{N_R} R_j \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_m G_{mnj} \cos \alpha_m x_k \sin \beta_n y_k \quad (3-13)$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dW}{dy}\right)_k &= \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \beta_n \sin \alpha_m x_k \cos \beta_n y_k \\
&+ \frac{16}{\pi^6 D} \sum_{i=1}^{N_P} P_i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n G_{mni} \sin \alpha_m x_k \cos \beta_n y_k \\
&+ \frac{16}{\pi^6 D} \sum_{j=1}^{N_R} R_j \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n G_{mnj} \sin \alpha_m x_k \cos \beta_n y_k
\end{aligned} \quad (3-14)$$

$$\begin{aligned}
(M_x)_k &= \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_m^2 + \nu \beta_n^2) F_{mn} \sin \alpha_m x_k \sin \beta_n y_k \\
&+ \frac{16}{\pi^6} \sum_{i=1}^{N_P} P_i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_m^2 + \nu \beta_n^2) G_{mni} \sin \alpha_m x_k \sin \beta_n y_k \\
&+ \frac{16}{\pi^6} \sum_{j=1}^{N_R} R_j \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_m^2 + \nu \beta_n^2) G_{mnj} \sin \alpha_m x_k \sin \beta_n y_k
\end{aligned} \quad (3-15)$$

$$\begin{aligned}
(M_y)_k &= \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\nu \alpha_m^2 + \beta_n^2) F_{mn} \sin \alpha_m x_k \sin \beta_n y_k \\
&+ \frac{16}{\pi^6} \sum_{i=1}^{N_P} P_i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\nu \alpha_m^2 + \beta_n^2) G_{mni} \sin \alpha_m x_k \sin \beta_n y_k \\
&+ \frac{16}{\pi^6} \sum_{j=1}^{N_R} R_j \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\nu \alpha_m^2 + \beta_n^2) G_{mnj} \sin \alpha_m x_k \sin \beta_n y_k
\end{aligned} \quad (3-16)$$

$$\begin{aligned}
(M_{xy})_k &= (1-\nu) \left( \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_m \beta_n F_{mn} \cos \alpha_m x_k \cos \beta_n y_k \right. \\
&+ \frac{16}{\pi^6} \sum_{i=1}^{N_P} P_i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_m \beta_n G_{mni} \cos \alpha_m x_k \cos \beta_n y_k \\
&\left. + \frac{16}{\pi^6} \sum_{j=1}^{N_R} R_j \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_m \beta_n G_{mnj} \cos \alpha_m x_k \cos \beta_n y_k \right)
\end{aligned} \quad (3-17)$$

$$\begin{aligned}
(Q_x)_k &= \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_m^3 + \alpha_m \beta_n^2) F_{mn} \cos \alpha_m x_k \sin \beta_n y_k \\
&+ \frac{16}{\pi^6} \sum_{i=1}^{N_P} P_i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_m^3 + \alpha_m \beta_n^2) G_{mni} \cos \alpha_m x_k \sin \beta_n y_k \\
&+ \frac{16}{\pi^6} \sum_{j=1}^{N_R} R_j \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_m^3 + \alpha_m \beta_n^2) G_{mnj} \cos \alpha_m x_k \sin \beta_n y_k
\end{aligned} \quad (3-18)$$

$$\begin{aligned}
(Q_y)_k &= \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n^3 + \alpha_m^2 \beta_n) F_{mn} \sin \alpha_m x_k \cos \beta_n y_k \\
&+ \frac{16}{\pi^6} \sum_{i=1}^{N_P} P_i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n^3 + \alpha_m^2 \beta_n) G_{mni} \sin \alpha_m x_k \cos \beta_n y_k \\
&+ \frac{16}{\pi^6} \sum_{j=1}^{N_R} R_j \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n^3 + \alpha_m^2 \beta_n) G_{mnj} \sin \alpha_m x_k \cos \beta_n y_k
\end{aligned} \quad (3-19)$$

$$\begin{aligned}
(V_x)_k &= \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \alpha_m^3 + (2-\nu) \alpha_m \beta_n^2 \} \\
&\times F_{mn} \cos \alpha_m x_k \sin \beta_n y_k \\
&+ \frac{16}{\pi^6} \sum_{i=1}^{N_P} P_i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \alpha_m^3 + (2-\nu) \alpha_m \beta_n^2 \} \\
&\times G_{mni} \cos \alpha_m x_k \sin \beta_n y_k \\
&+ \frac{16}{\pi^6} \sum_{j=1}^{N_R} R_j \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \alpha_m^3 + (2-\nu) \alpha_m \beta_n^2 \} \\
&\times G_{mnj} \cos \alpha_m x_k \sin \beta_n y_k
\end{aligned} \quad (3-20)$$

$$\begin{aligned}
(V_y)_k &= \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \beta_n^3 + (2-\nu) \alpha_m^2 \beta_n \} \\
&\times F_{mn} \sin \alpha_m x_k \cos \beta_n y_k \\
&+ \frac{16}{\pi^6} \sum_{i=1}^{N_P} P_i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \beta_n^3 + (2-\nu) \alpha_m^2 \beta_n \} \\
&\times G_{mni} \sin \alpha_m x_k \cos \beta_n y_k \\
&+ \frac{16}{\pi^6} \sum_{j=1}^{N_R} R_j \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \beta_n^3 + (2-\nu) \alpha_m^2 \beta_n \} \\
&\times G_{mnj} \sin \alpha_m x_k \cos \beta_n y_k
\end{aligned} \quad (3-21)$$

여기서  $\nu$  는 포아송비이다.

#### 4. Finite Difference Method 를 이용한 해석

외측 경계조건이 단순지지인 구형편의 경우는 위에 서 본 바와 같이 Navier solution를 이용하면 쉽게 해결될 수 있다. 그러나 단순지지가 아닌 고정지지, 탄성지지, 또는 연속지지일 경우는 문제를 완전히 해석적으로 구하기란 매우 어려운 일이다. 이러한 문제를 쉽게 근사적으로 해석하면서 공학적으로 충분히 정확한 결과를 얻을 수 있는 방법에는 finite difference method가 있다. finite difference식을 Taylor series를 이용하여 구하면 오차의 한계도 결정할 수 있는 고로 필요에 따라 정확성은 얼마든지 조정될 수 있는 것이 큰 장점이다. 본문에서는 편의상 mesh size를  $\Delta$ 라 할 때, 판에 대한 Lagrange 방정식  $\nabla^4 W = q/D$ 는 4차의 단일 미분항을 갖고 있어  $\Delta^2$ 의 오차를 가지려면 최소 5개의 pivotal point가 한 방향으로 필요하게 되어 결과적으로 구하는 선형연립방정식을 해결할 때 경계에서의 fictitious point를 제거하는데 복잡성을 가져온다. 이 문제의 해결을 위하여 종속변수가 하나인 4차 편미분 방정식을 다음과 같이 종속변수가 둘인 연립2차편미분 방정식으로 변환시켰다.

$$-\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{M}{D} \quad (4-1)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -q \quad (4-2)$$



할 때  $F_P$  는  $i$  점에 해당하는 위치에 단위하중이 있고 나머지는 영이 되며  $j$  점에 단위하중이 작용할 때  $F_R$  는  $j$  점에 해당하는 위치에 단위 하중이 있고 나머지는 영이 된다. subscript  $o$  가 실제 작용하는 하중만에 의한 경우를 나타낸다면

$$AX_o = F_o \quad (4-10)$$

$$AX_P = F_P \quad (4-11)$$

$$AX_R = F_R \quad (4-12)$$

즉 어떠한 경우에도  $A$  matrix 는 일정한 형태이다.  $P_P$  를 집중하중,  $R_R$  를 내부지지점의 반력,  $X_T$  를 외부하중 및 내부지지반력이 동시에 작용할 때의  $X$  라 하면

$$X_T = X_o + \sum_{P=1}^{N_P} P_P X_P + \sum_{R=1}^{N_R} R_R X_R \quad (4-13)$$

여기서

$$X_o = A^{-1}F_o, \quad X_P = A^{-1}F_P, \quad X_R = A^{-1}F_R$$

이니까

$$X_T = A^{-1}F_o + (P_1 A^{-1}F_1 + \dots + P_{N_P} A^{-1}F_{N_P}) + (R_1 A^{-1}F_1 + \dots + R_{N_R} A^{-1}F_{N_R}) \quad (4-14)$$

간략하게

$FF_P = [F_1, \dots, F_{N_P}]$ ,  $FF_R = [F_1, \dots, F_{N_R}]$ 라 하면

$$X_T = A^{-1}F_o + A^{-1}FF_P P + A^{-1}FF_R R \quad (4-15)$$

여기서

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_{N_P} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{N_R} \end{pmatrix}$$

$X_T$ ,  $X_o$ ,  $A^{-1}$ ,  $FF_P$ ,  $FF_R$ 를 각각의 지지점의 위치에서의 상태를 나타내는  $X_T$ ,  $X_o$ ,  $A^{-1}$ ,  $FF_P$ ,  $FF_R$ 라 하면

$$U = X_T' - X_o' - \sum_{P=1}^{N_P} P_P X_P' \quad (4-16)$$

$$Q = A^{-1}FF_R' \text{라 정의하면} \quad (4-17)$$

$$QR = U \quad (4-18)$$

$R = Q^{-1}U$ 이므로 최종 결과는

$$X_T = A^{-1}F_o + A^{-1}FF_P P + A^{-1}FF_R Q^{-1}U \quad (4-19)$$

이 된다.

경계가 연속 또는 탄성지지일 때는 연속하는 판 또는 지지보와 평형조건으로 부터 fictitious point 를 제거하고 단순지지일 경우에 사용한 방법과 같은 방법으로 해결하면 된다.

## 5. 결 론

임의의 경계조건을 갖고 임의의 분포하중을 받고 임의의 위치에 임의의 형태의 내부지지점을 갖는 구형판의 해석을 위한 방법이 개발되었다. 외부 경계가 단순

지지일 때는 Navier solution 과 중첩의 원리를 이용한 double Fourier solution 을 이용하였다. 단순지지가 아닌 경우는 finite difference method 를 이용하였다. finite difference 는 수치해이기는 하지만 오차의 합수를 조정할 수 있는고로 공학적인 목적에 의거 정확도를 얼마든지 향상시킬 수 있는 장점이 있다.

본 연구의 목적은 임의의 하중(분포, 집중)을 받고 임의의 내부지지점을 갖는 구형판의 해석에 있었으나 결과적으로는 임의의 하중을 받는 지지점이 없는 판의 해석에도 그대로 적용될 수 있고 임의 형상의 내부지지 상태에 있는 연속판에도 적용될 수 있으며 이동하중에 의한 판의 임의점의 influence value 도 해결할 수 있다.

## 참 고 문 헌

1. Love, A.E.H., "A Treatise on Mathematical Theory of Elasticity," 4th Edition, Dover Publications, New York, 1944.
2. Sneddon, I.N., "Fourier Transforms," 2nd Edition, McGraw. Hill, New York, 1951.
3. Sokolnikoff, I.S., "Mathematical Theory of Elasticity," 2nd Edition, McGraw. Hill, New York, 1956.
4. Muskhelishvili, N.I., "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity," Fourth Edition, P. Noordhoff Ltd, Groningen-The Netherlands, 1963.
5. M. Filonenko-Borodich, "Theory of Elasticity," P. Noordhoff N.V., Groningen, The Netherlands.
6. Timoshenko, S. and Woinowsky. Krieger, S., "Theory of Plates and Shells," McGraw. Hill, New York, 1959.
7. Hildebrand, F.B., "Introduction to Numerical Analysis," McGraw. Hill, New York, 1956.
8. Salvadori, M.G. and Baron, M.L., "Numerical Methods in Engineering," 2nd Edition, Prentice. Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1961.
9. Hadley, G., "Linear Algebra," Addison. Wesley, Reading, Massachusetts, 1961.
10. Jordan, C., "Calculus of Finite Differences," Chelsea, New York, 1950.
11. Levy, H. and Lessman, F., "Finite Difference Equations," Pittman, London, 1959.
12. Dukhyun Kim, "Analysis of Triangularly Folded Plate Roofs of Umbrella Type," Korea Military

*Academy*, 1966.

13. 張錫潤, “평판의 한 간이해법” 大韓土木學會誌 第18卷第2號, 1970.
14. 金德鉉, 張錫潤, “A Simplified Method of Analysis

of a Plate Problem”, 日本土木學會 第22次學術講演會論文集, 1967.

15. 金德鉉, 張錫潤, “내부지지점을 가지는 평판의 탄성해석”, 大韓土木學會20周年紀念論文集, 1972.