論 文

論文 76-13-4-4

Arctangent特性의 增幅器를 使用한 非線發振器의 解析

(Analysis of the nonlinear oscillator using amplifiers with arctangent funtional characeriatics.)

金 秀 重*・洪 再 根**

(Kim, Soo Joong *and* Hong, Jae Keun)

Abstract

We have obtained the solution of van der Pol's equation characterized by an arctangent nonlinearity, using the perturbation method by writing periodicity conditions:

$$X^{(n)}(2\pi)-X^{(n)}(0)=0$$

$$X^{(n)\prime}(2\pi)-X^{(n)\prime}(0)=0 \quad (n=0,1,2,\cdots\cdots)$$

together with the starting condition:

$$X^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, \qquad X^{(n)\prime}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-R^{(n)}.$$

Our results agree with Liapunov's theorem and our calculated value is more similar to Murata's measured value than Murata's calculated value.

1. 序 論

Nonlinear system의 解析에서 van der pol의 方程式은 매우 重要한 役割을 하여왔다[1].

Scott는 發振器에 使用되는 增幅器의 飽和特性을 arctangent函數特性으로 생각해서 처음으로 van der pol의 方程式을

$$\ddot{X}+\mu\left[1-\frac{k}{1+x^2}\right]\dot{X}+X=0 \qquad (1)$$

와 같은 一般形으로 表現하였고, μ가 작고 k가 1보다 조금 큰 경우, 즉 $k≒1$일 때 X는 거의 正弦波이므로 $X=R(t)\cos t$라 가정하여 averaging方法을 써서 R에 關한 1次微分方程式

$$\frac{dR}{dt}=\frac{1}{2}\left[-1+\frac{2K(-1+\sqrt{1+R^2})}{R_2}\right]R$$

을 求하고 이 式으로부터 $R=0$일 때와 $R=2\sqrt{K^2-K}$일 때 $dR/dt=0$이므로 limit cycle의 振幅이 $R=2\sqrt{K^2-K}$ 된다고 發表하였다[2]. 한편 Murata는 NOR gate를 使用한 integrated circuit feedback oscillator에 關해 硏究하면서 Scott와는 獨立的으로 (1)式을 얻었고 perturbation method를 使用하여 다음과 같은 解를 求하였다.

$$X=2\sqrt{K-1}\cos\omega t+\mu\cdot\frac{(K-1)^{3/2}}{4(2K-1)}(3\sin\omega t-\sin 3\omega t)+(\mu^2)$$

$$但\ \omega=1-\frac{(K-1)^3+(2K-1)(K-1)^2}{16(2K-1)^2\ (3K-2)}\cdot\mu^2+0(\mu^3) \qquad (2)$$

또한 phase plane上에서 Liapunov의 定理를 適用하여

$$\dot{V}(x)=-\frac{2\mu\dot{X}^2}{1+X^2}\left[X^2-(K-1)\right] \qquad (3)$$

$$但\ V(x)=X^2+\dot{x}^2 \qquad (3)$$

와 같은 式을 求하여, 發振이 일어날 條件으로 $X>1$을 求하고 lower bound로 $\sqrt{K-1}$을 提示하였으며. $K=10$이고 $\mu=0.365$일 때 isocline 方法을 써서 그린 phase plane 軌跡이 그림 1이었다[3]. (2)式을 살펴보면 K가 1에 가까운 값을 가질 때 뒤의 sine項은 무시되므로 $X=2\sqrt{K-1}\cos\omega t$가 되어 scott의 경우와는 相異한 結果를 갖는다. K가 큰 값일 때도 sine項은 振幅에는 영향을 미치지 않으므로 K가 매우 큰 값일 때 X의 振幅

*正會員 慶北大學校 工大
**準會員 〃 電子工學科
接受日字：1976年 8月 26日

은 $2\sqrt{K}$가 된다.

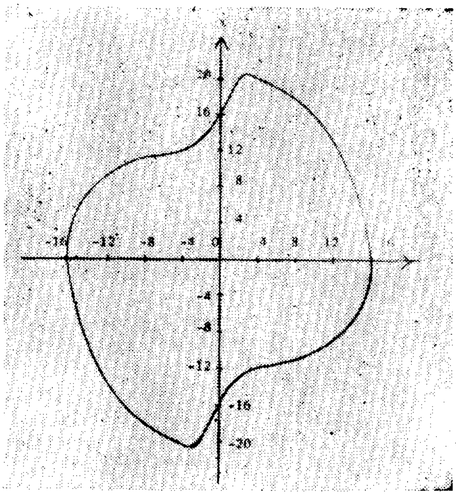


Fig.1 Limit cycle by isocline method

Mulholland는 Liénard plane 上에서 Liapunev의 定理를 적용하여 lower bound로써 $X=K$ arctan X를 求하고 이의 近似解로 $R_0(K)=\sqrt{K-1}$과 같이 表現하였으며[4] Honnell, Borgward등과 함께 series reversion method를 使用하여 이를 條正해서

$$K<\frac{4}{\pi}\text{이면}\quad R_0(K)\fallingdotseq\sqrt{3(K-1)}$$

$$K>\frac{4}{\pi}\text{이면}\quad R_0(K)\fallingdotseq\frac{\pi}{2}K-\frac{2}{\pi}$$

로 나타내었다[5]. 이 式에 依하면 K가 큰 값일 때 X의 振幅은 $\frac{\pi}{2}K$보다 커야 한다. 그러나 Murata의 경우는 振幅이 $2\sqrt{K}$로써 Mulholland의 경우와는 역시 相異하다

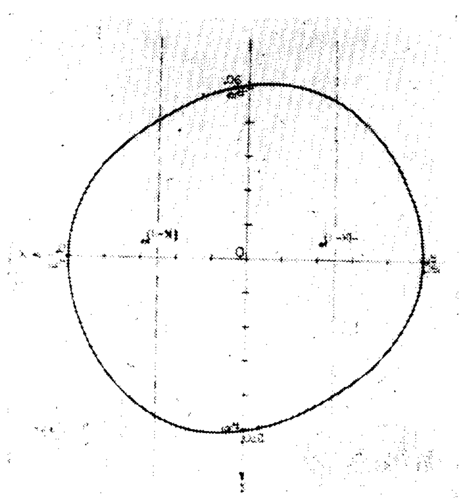


Fig.2 Murata's calculated limit cycle

Murata의 式에 依하면 $K=10$일 때 振幅이 6이어야 한다. 그런데 그림 1에서는 振幅이 16정도이다. 즉 Murata의 論文은 스스로의 矛盾을 갖고 있다고 볼 수 있다.

그리고 $K=10$, $\mu=0.365$일 때 Murata의 式에 의해 계산하여 그린 軌跡圖가 그림 2이다.

그림 1과 그림 2는 서로 전혀 다른 결과를 나타내었다. 따라서 perturbation method에 依한 解析이 檢討되어야 할 必要가 있다. 本論文에서는 모든 K에 關해서 適用될 수 있는 解를 求하고 computer의 結果와 比較하였으며 說明한 각 경우에의 妥當性을 檢討하기로 한다.

2. 本 論

(1)式으로 주어진 非線形微分方程式에 Lindstedt와 Poincaré의 perturbation method를 適用하여 解를 求하기로 하면[6],

$$X=X^{(0)}+\mu X^{(1)}+\mu^2X^{(2)}+\cdots\cdots+\mu^nX^{(n)}+\cdots\cdots$$

$$X^{(n)\prime\prime}=\frac{d^2X^{(n)}}{d\phi^2},\quad X^{(n)\prime}=\frac{dX^{(n)}}{d\phi}$$

$$\phi=wt$$

$$w=1+\mu w^{(1)}+\mu^2w^{(2)}+\cdots\cdots+\mu^nw^{(n)}+\cdots\cdots$$

라 두고, (1)式의 非線形微分方程式에 代入하여 μ에 關하여 정리하면

$$X^{(0)\prime\prime}+X^{(0)}=0$$

$$X^{(1)\prime\prime}+X^{(1)}=-2w^{(1)}X^{(0)\prime\prime}+\left(\frac{K}{1+X^{(0)2}}-1\right)X^{(0)\prime}$$

$$X^{(2)\prime\prime}+X^{(2)}=-2w^{(1)}X^{(1)\prime\prime}-(2w^{(2)}+w^{(1)2})x^{(0)\prime\prime}$$
$$+\left(\frac{K}{1+K^{(0)2}}-1\right)X^{(1)\prime}$$
$$+\left[\frac{K(w^{(1)}-2X^{(0)}\times^{(1)})}{1+X^{(0)2}}-1\right]X^{(0)\prime}$$

와 같은 線形微分方程式을 얻는다.

$X^{(n)}(0)=R^{(n)}$, $X^{(n)\prime}(0)=0$의 初期條件을 주고, X와 X'의 各 成分들은 週期函數가 되어야 하므로 $X^{(n)}(2\pi)-X^{(n)}(0)=0$, $X^{(n)\prime}(2\pi)-X^{(n)\prime}(0)=0$의 條件을 주어 解를 求하면

$$X^{(0)}=2\sqrt{K(K-1)}\cos wt$$

$$X^{(1)}=\sqrt{K(K-1)}\sin wt\cdot\left[1-\frac{1}{4(K-1)}\log\left(\frac{1+R^{(0)2}}{1+X^{(0)2}}\right)\right]+\frac{\sqrt{K}(2K-1)}{2\sqrt{K-1}}\cos wt\cdot\left[\tan^{-1}\left(\frac{\tan wt}{2K-1}\right)-wt\right]$$

$$w=1-\frac{K-1}{32(2K-1)}\cdot\mu^2+0(\mu^3)$$

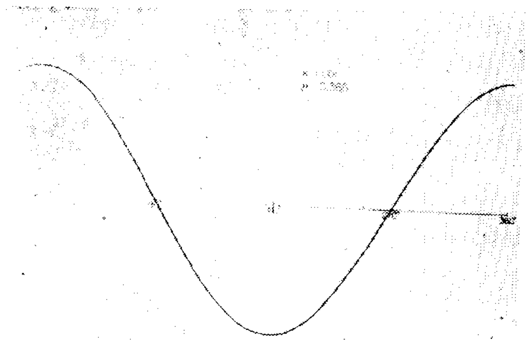
이 된다.

但 $R^{(0)}=2\sqrt{K(K-1)}$

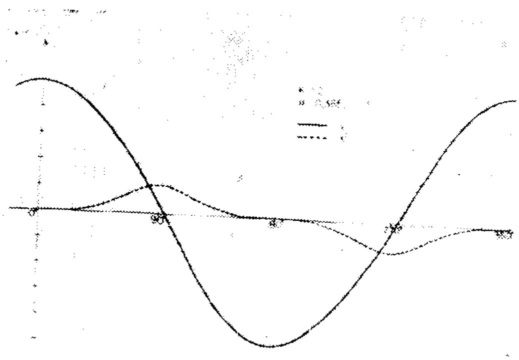
$$\tan^{-1}\left(\frac{\tan wt}{2K-1}\right)=\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{\pi}wt\right]+\text{fundamental value of }\tan^{-1}\left(\frac{\tan wt}{2K-1}\right)$$

$\left[\frac{2}{\pi}wt\right]$는 $\frac{2}{\pi}wt$를 넘지 않는 最大整數를 뜻한다.

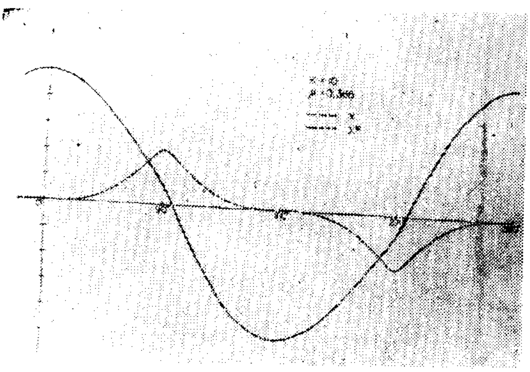
위의 結果에다 $\mu=0.365$일 때 K의 여러 값에 대한 X의 波形을 電算機로 計算하여 그린 것이 그림 3이고 phase plane上의 軌跡을 그린 것이 그림 4이다.



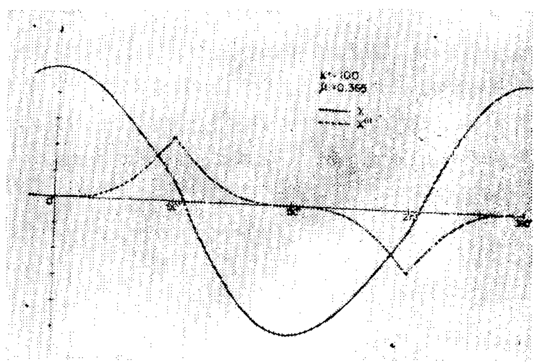
(a) $K=1.01$



(b) $K=2$

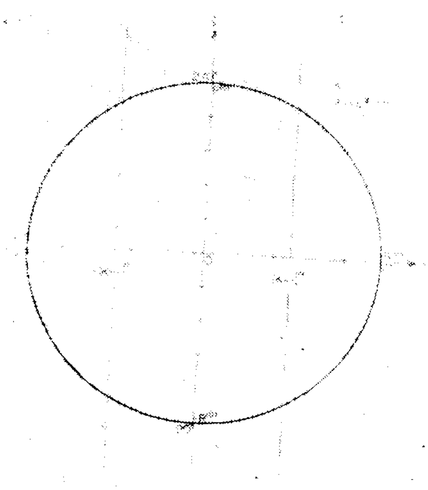


(c) $K=10$

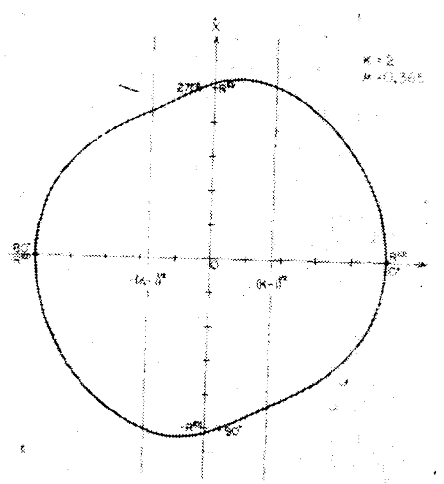


(d) $K=100$

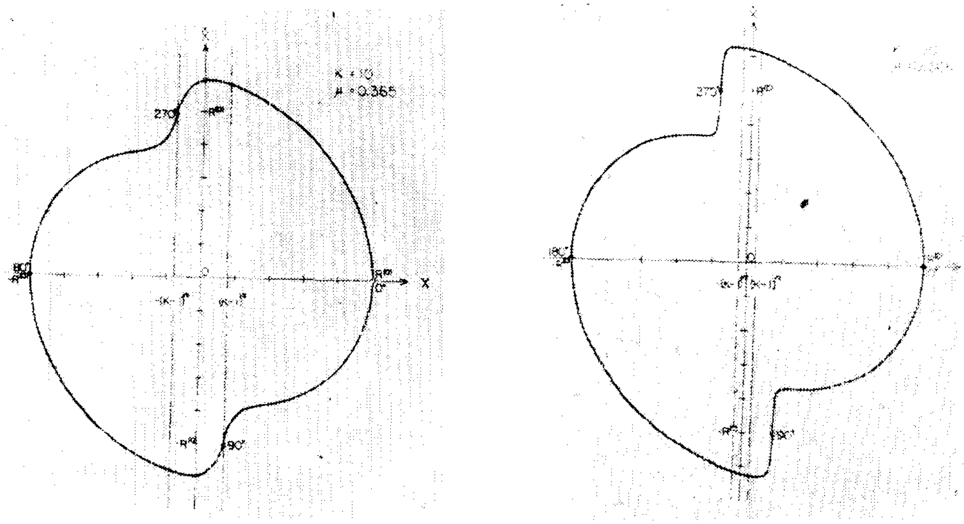
Fig. 3 Calculated wave shapes by poincarés method $\mu=0.365$



(a) $K=1.01$



(b) $K=2$



(c) $K=10$ (d) $K=100$

Fig. 4 Calculated phase plane trajectories by poincaré's method $\mu=0.365$.

$K=1.01$일 때는 거의 純粹한 正弦波이나 K의 값이 커질수록 찌그러짐이 커지고 phase plane 上의 軌跡도 圓에서 크게 벗어나 급격하여 진다.

그러나 그림 2의 軌跡도 (3)式을 만족하여야 하는데 (3)式에 의하면 $|X|>\sqrt{K-1}$이면 V가 감소하고, $|X|<\sqrt{K-1}$이면 V가 增加되어야 하는데, $K=10$일 때와 $K=100$일 때의 軌跡은 이 條件에서 벗어남을 볼 수 있다.

여기서는 이를 滿足시켜 줄 수 있는 解를 求하기로 한다. Lindstedt와 poincaré의 perturbation method에서는 $X^{(n)}(0)=R^{(n)}$, $X^{(n)\prime}(0)=0$의 初期條件을 假定하였으나 그림 2를 살펴보면 $wt=90°$를 前後하여 v가 增加한다. 따라서 $wt=90°$일 때의 軌跡이 $\dot{X}$軸上에 있어야 하므로 $X^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $X^{(n)\prime}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-R^{(n)}$의 初期條件을 주고 (1)式의 解를 이에 따라 구하면 다음과 같다.

$$X^{(0)}=2\sqrt{K(K-1)}\cos wt$$

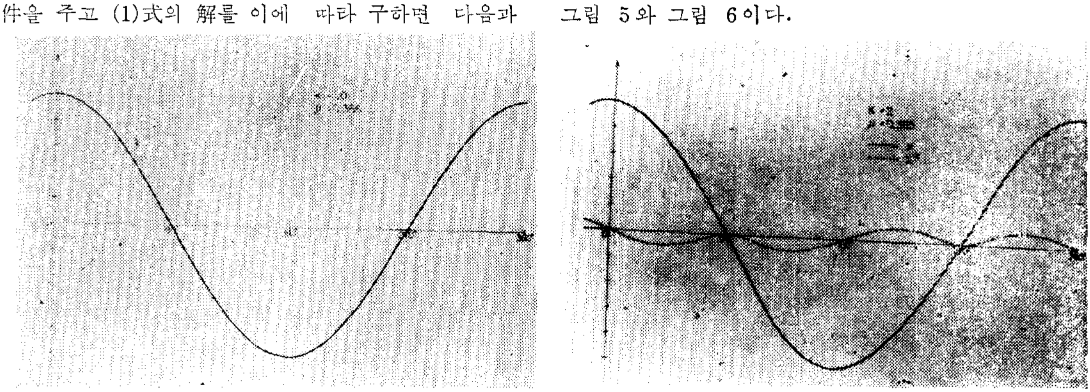
$$X^{(1)}=\frac{\sqrt{K}}{4\sqrt{K-1}}\sin wt\cdot\log[1+4K(K-1)\cos^2 wt]+\frac{\sqrt{K}\,(2K-1)}{2\sqrt{K-1}}\cos wt\cdot\left[\tan^{-1}\left(\frac{\tan wt}{2K-1}\right)-wt\right] \tag{5}$$

$$w=1-\frac{K-1}{32(2K-1)}\cdot\mu^2+0(\mu^3)$$

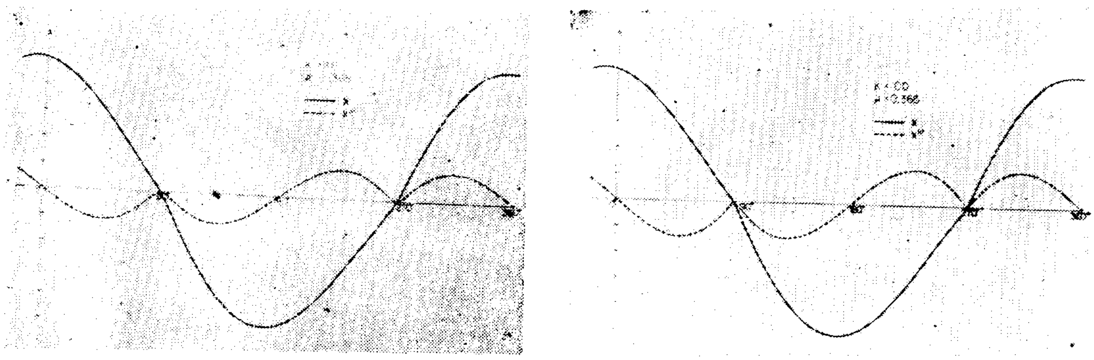
但 $\tan^{-1}\left(\frac{\tan wt}{2K-1}\right)=\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{\pi}wt\right]+$ fundamental value of $\tan^{-1}\left(\frac{\tan wt}{2K-1}\right)$

$\left[\frac{2}{\pi}wt\right]$는 $\frac{2}{\pi}wt$를 넘지 않는 最大整數이다.

(5)式의 結果로부터 $\mu=0.365$일 때 K의 여러 값에 대한 X의 波形과 phase plane 上의 軌跡을 그린 것이 그림 5와 그림 6이다.

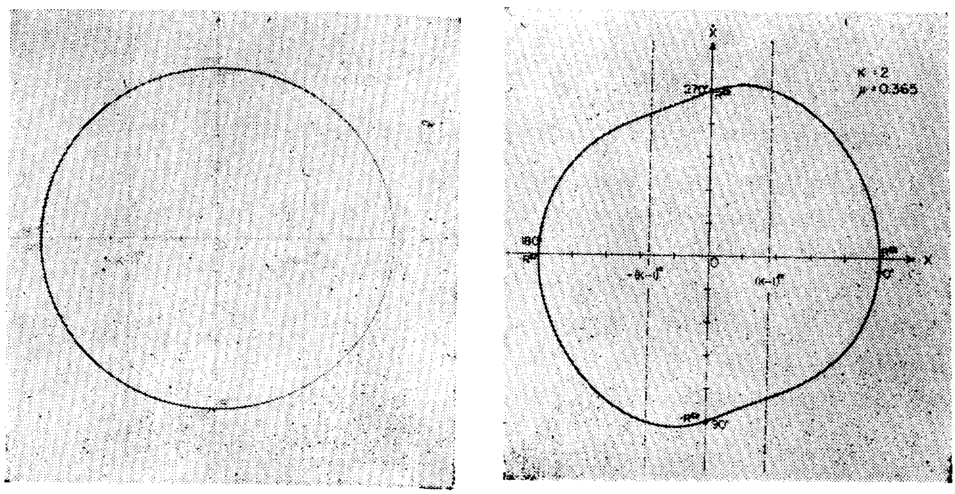


(a) $K=1.01$ (b) $K=2$

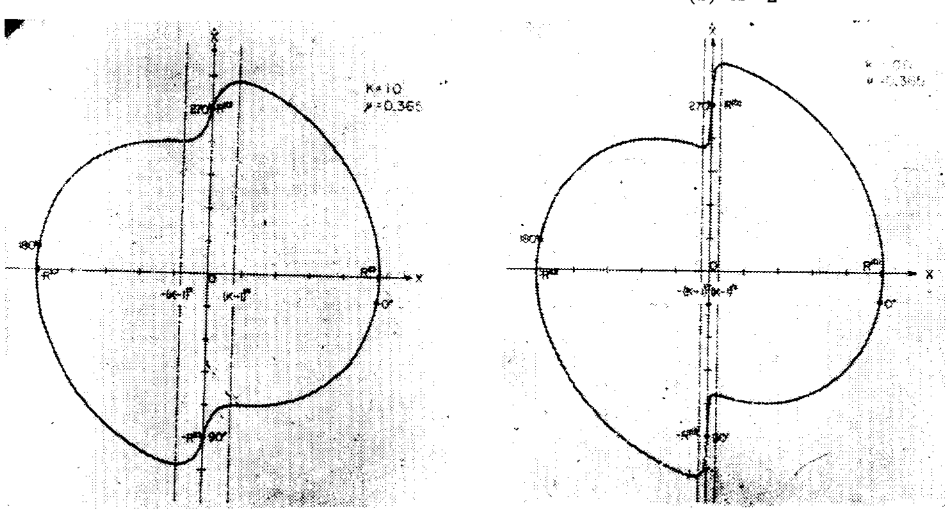


(c) $K=10$　　　　(d) $K=100$

Fig. 5 Calculated wave shapes by our method　$\mu=0.356$.



(a) $K=1.01$　　　　(b) $K=2$



(c) $K=10$　　　　(d) $K=100$

Fig. 6 Calculated phase plane trajectories by our method　$\mu=0.365$

그림 3과 그림 5를 比較하면 $X^{(1)}$이 전혀 다르게 나타났으며 그림 6의 軌跡도 (3)式의 條件을 아주 잘 滿足시켜 줌을 알 수 있다. (4)式과 (5)式을 比較하면 $x^{(1)}$이 다를 뿐 $X^{(0)}$와 w는 변함없다. 이 結果에서는 lower bound, K에 關係없이 $2\sqrt{K(K-1)}$로써, $K \fallingdotseq 1$일 때는 scott의 結果와 一致하고 同時에 Honnell의 結果와도 거의 一致한다.

$\mu=0.365$일 때 K의 變化에 따른 w의 變化를 本論文에 依한 것과, Murata의 式에 依한 것, 그리고Murata가 實驗으로 測定한 結果를 그린 것이 그림 7이다.

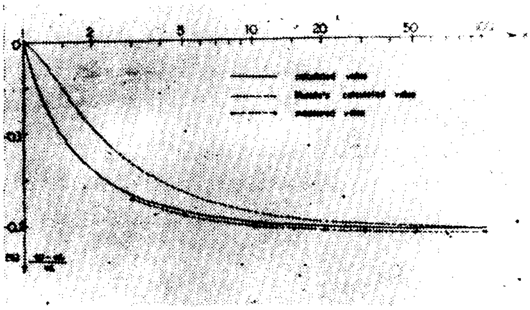


Fig. 7 Relation between the gain parameter and the oscillation frequency.

3. 結 論

以上의 結果를 綜合하면 Murata의 解는 잘못된 것이고, 本研究의 解는 $k \fallingdotseq 1$일 때는 $X^{(1)}$이 매우 적어지므로 $X=2\sqrt{K(K-1)}\cos wt$가 되어 scott의 경우와 一致할 뿐만 아니라 scott의 경우는 $K \fallingdotseq 1$일 때의 制限된 것이지만 本論文의 結果로는 K의 값이 클 때에도 여기의 結果를 適用할 수 있다.

그리고 이러한 非線形發振器의 解析에는 Lindstedt와 poincaré의 perturbation method에서 初期條件이 $X^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ X^{(n)\prime}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-R^{(n)}$으로 修正되어야 한다.

參 考 文 獻

(1) B.van der Pol, "On oscillation hysterisis in a triode generator with two degrees of freedom," Phill. Mag., vol.6, pp.700-719, 1922.

(2) P.R. Scott. Jr., "Large amplitude operation of the nonlinear oscillator," Proc. IEEE(Lett.),vol. 56, pp. 2182-2183, Dec. 1968.

(3) M.Murata, M. Ohta, and T. Namekawa, "Analysis of an oscillator consisting of digital integrated circuits," IEEE J. Solid-State Circuits (Corresp.), vol. SC-5, pp. 165-168, Aug. 1970.

(4) R.J. Mulholland, "One-parameter independent bound for a two-parameter oscillator," Proc. IEEE(Lett.), vol. 57, p.1296, July 1969.

(5) R.J. Mulholland, P.M. Honnell, and K.J. Borg wald, "Bounds for a two-parameter nonlinear osclilator," IEEE Circuit and Systems, vol. CAS-21, pp.96-99, Jan. 1974.

(6) H.Poincaré, "Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste," Gauthier-Villars, Paris' 1892.