論　　文

論文 79-13-4-1

Time Dependent Fourier Transform, Time Dependent Spectrum Density 및 그의 應用

安　　秀　　桔*

(Ann, Souguil)

要　　約

Spectrum의 時間起伏을 나타내는 時間 및 周波數의 函數 $F(\omega,t,T)$ 및 $W(\omega,t,T)$를 定義하였고, 實例에 適用시켰다. Fourier 變換을 $f(t)$와 Phasor $e^{j\omega t}$와의 Correlation으로 定義하였고 그 變換積分이 時間마다의 成分의 合計이어서 t 時刻에서의 Spectrum을 그 近處에서의 $f(t)$ 값에만 依함을 證明하였다.

Abstract

Two new time functions defining Time Dependent Fourier Transform $F(\omega,t,T)$ and Time Dependent Spectrum Density $W(\omega,t,T)$ are deduced. Fourier transform is defined as the correlation between the time function $f(t)$ and phasor $e^{j\omega t}$.

Several theorems corncerning the new functions are proved in order to verify the instantaneous cause a effet of the function $f(t)$ and the fluctuating spectrum.

1. 序　　論

Fourier 變換은 Frequency domain에 있어서의 解析을 許容한 몹시 劃期的인 概念이다.

이는 數學的인 面에서 어느 時間函數에 一對一 對應하는, 一般的으로 複素周波數의 虛軸變數 ω만의 函數이다.

時間函數를 時間 t의 實函數로 限定해도 그에 對應하는 Fourier 變換은 一般的으로 複素函數이다. 그러므로 ω에 따라 그 實數部와 虛數部 또는 그 絶對値와 位相角이 달라지기 때문에 그 全貌를 把握하려면 一般的으로 두 개의 graph가 必要하다.

따라서 이 두 개의 周波數(또는 角周波數)函數 $|F(\omega)|$ 및 $\underline{/F(\omega)}$가 時間과는 無關한 概念을 갖는다.

卽 이는 全體時間을 通해서 나올 수 있는 該當周波數 成分을 總合算한 것이다.

* 正會員, 서울大學校工大 電子工學科
College of Engineering, Seoul National University.
授受日字：1976年 6月 14日

이 數學的 概念에 比하면, 그 物理的인 具顯으로서의 Frequency spectrum은 $F(\omega)$의 逆函數 $f(t)$의 時間變化에 無關할 수 없다. 따라서 當然히 周波數와 時間, 두 變數의 函數이다.

그러므로 이 두 變數 函數로서의 spectrum을 나타내는 函數式이 必要하게 된다. 이 Bi-variate function을 Time Dependent Fourier Transform이라 한다면, 이를 全體時間에 合計通算한 것이 普通의 Fourier Transform이 될 것이다.

2. Time Dependent Correlation Function

역시 全體時間에 걸쳐서의 두 개 函數間의 Correlation의 總和를 다루는 Correlation function과 달리, Correlation의 fluctuation을 줄 수 있는 Time Dependent Correlation Function $R(\tau,t,T)$가 다음과 같이 定義되었다[3].

$$R(\tau,t,T)=\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(t)g^*(t+\tau)dt \tag{1}$$

時間差 τ를 零으로 하여 같은 時刻에 있어서의 Correlation 만을 取扱하면 다음과 같이 된다.

$$R(0,t,T)=\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(t)g^*(t)dt \tag{2}$$

여기에서 $T\to\infty$로 하면 이 T.D. Correlation function을 一般的인 Correlation function $R(\tau)$에서 $\tau=0$일 때의 값 $R(0)$가 된다.

Correlation을 求하고자 하는 두 개의 時間函數 $f(t)$, $g(t)$의 Spectrum이 bandlimit[4]되어 있을 때 그 limited band의 maximum frequency의 二倍가 Nyquist의 Sampling rate가 되어 이 周波數의 逆數가 必要 Sampling週期가 된다.

두 現象의 Correlation 計算에서는 그 spectrum의 最低 周波數가 도리어 問題가 되어 두 最低周波數의 下限 周波數의 週期 以上의 時間으로 Correlation을 보는 것이 必要하다.

反對로 이 時間平均을 平均時間을 짧혀서, $T\to0$로 했을 때는 Correlation이 平均되지 않고 순간순간의 Correlation이 나타나는데 이를 Instantaneous Correlation이라고 부르고, $I_R(\tau,t)$로 表示하면, 이는 다음 式으로 定義된다.

$$I_R(\tau,t)=f(t)g^*(t+\tau) \tag{3}$$

다시 $\tau=0$인 境遇로 限定하여 이 Instantaneous Correlation을 $I_R(t)$로 表示하면, 이는

$$I_R(t)=f(t)g^*(t) \tag{4}$$

로 주어진다.

3. Spectrum의 Instantaneous Causality

$f(t)$라는 函數의 spectrum을 $F(\omega)$이라고 하고, 여기서 $f(t)$가 時刻 t_1을 中心으로 하여 그 전후 $\frac{T}{2}$ 사이에서만 nonzero 값을 갖고 이 範圍 밖에서는 zero값을 갖는 函數 $f_1(t)$를 다음 式 (5)처럼 定義한다.

$$f_1(t)=\begin{cases} f(t) & \text{when } t_1-\frac{T}{2}\le t\le t_1+\frac{T}{2} \\ 0 & \text{when } t_1-\frac{T}{2}>t \text{ or } t_1+\frac{T}{2}<t \end{cases} \tag{5}$$

이러한 함수 $f(t)$와 $g^*(t)=e^{-j\omega t}$와의 Instantaneous Correlation $I_{R1}(t)$를 時間에 對해 積分해 주면

$$F_T(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{t_1-\frac{T}{2}}^{t_1+\frac{T}{2}} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{6}$$

가 된다.

區間 τ가 몹시 짧아서 그 區間사이에 $f(t)$가 變動하지 않았다고 가정한다면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta F(\omega)=F_T(\omega)=f(t_1)\int_{t_1-\frac{T}{2}}^{t_1+\frac{T}{2}} e^{-j\omega t}dt$$

$$=f(t_1)\frac{2}{\omega}e^{-j\omega t_1}\sin\frac{\omega T}{2}=f(t_1)\cdot e^{-j\omega t_1}T. \quad 但\ T\ll$$

여기서 T를 Δt_1으로 表記하고 全體 t_1의 값을 通해 合해 주면,

$$F(\omega)=\lim_{\Delta t_i\to0}\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(t_i)e^{-j\omega t_i}\Delta t_1 \qquad (但\ i\text{는 整數})$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{7}$$

結局 Δt_1 時間 사이의 어느 現象 $f(t)$가 주는 Spectrum의 ω(角周波數) 成分은 $f(t)$와 $e^{j\omega t}$ 사이의 Instantaneous Correlation의 曲線下의 面積이 된다.

이는 $f(t)$와 phasor $e^{j\omega t}$와의 사이의 Correlation을 찾아서, 卽 어떤 周波數의 phasor와 주어진 函數 $f(t)$ 사이의 類似性을 찾는 過程인 것이다.

$f(t)$에 ω_0成分이 있다면 $e^{j\omega_0 t}$의 共軛 phasor $e^{-j\omega_0 t}$와의 사이에 電力을 受給할 수 있을 것이다.

한 時刻 t를 中心으로 spectrum에 投入된 平均 energy成分(各 ω値에 對해서 單位 時間에 投入된)은 다음과 같은 Time Dependent Spectrum Density

$$W(\omega,t,T)=\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{8}$$

로 나타난다.

그리고 一般的인 Fourier 變換 $F(\omega)$와 사이에 다음 關係式이 成立한다.

$$F(\omega)=\lim_{T\to\infty}T\cdot W(\omega,t,T) \tag{9}$$

우리는 다시 다음과 같이 Time Dependent Fourier Transform

$$F(\omega,t,T)=T\cdot W(\omega,t,T) \tag{10}$$

로 定義하면

$$F(\omega,t,T)=\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{11}$$

일 것이다.

따라서,

$$F(\omega)=F(\omega,t,\infty) \tag{12}$$

그리고 第2節의 論據에 따라 T는 現象 $f(t)$의 最低周波數의 週期 以上 또는 考察하고자 하는 成分周波數의 週期보다는 커야 한다.

4. 實 例

(1) Single-Sided Exponential Signal $e^{-at}\,u(t)$

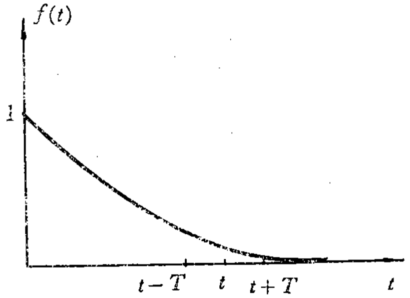

Fig. 1 Single-Sided Exponential Signal $e^{-at}u(t)$.

$$F(\omega,t,T)=\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{e^{-(a+j\omega)(t+\frac{T}{2})}-e^{-(a+j\omega)(t-\frac{T}{2})}}{-(a+jw)} \qquad (13)$$

$$=\frac{2e^{-at}e^{-j\omega t}}{a+j\omega}\mathrm{Sinh}\,(a+j\omega)\frac{T}{2} \qquad (14)$$

$t-\frac{T}{2}<0$ 이면

$$F(\omega,t,T)=\left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+jw)}\,u(t)\right]_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}}=\left[\frac{e^{(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right]_{0}^{t+\frac{T}{2}}$$

$$=\frac{1-e^{-(a+j\omega)t}e^{-(a+j\omega)\frac{T}{2}}}{a+jw} \qquad (15)$$

T를 無限히 키우면 t의 값에 無關하게 이 形態로 돌아온다.

DC 成分의 起伏을 보기 위해서 $\omega=0$로 놓으면

$$F\left\{0,t,T\left(t>\frac{T}{2}\right)\right\}=\frac{e^{-at}}{a}\left\{e^{\frac{aT}{2}}-e^{-\frac{aT}{2}}\right\} \qquad (16)$$

$$F\{0,t,T(t\leq\frac{T}{2})\}=\frac{1-e^{-at}e^{-\frac{aT}{2}}}{a} \qquad (17)$$

$T\ll t$ 인 境遇의 直流成分은 (16)式에서 指數函數의 展開式을 利用하여

$$e^{\frac{aT}{2}}-e^{-\frac{aT}{2}}\fallingdotseq aT$$

$$\therefore\ F\left\{0,t,T\left(t\geq\frac{T}{2}\right)\right\}=e^{-at}T \qquad (18)$$

따라서

$$W\left\{0,t,T\left(t>\frac{T}{2}\right)\right\}=\frac{F\left\{0,t,T\left(t>\frac{T}{2}\right)\right\}}{T}$$

$$=e^{-at} \qquad (19)$$

卽 時間이 감에 따라 直流成分이 指數變數的으로 줄어들음을 알 수 있고, 이것은 우리가 期待했던 바와도 一致한다. 같은 모양으로 低周波數 ω_0 成分은 (14) (15)式으로부터

$$F\left\{\omega_0,t,T\left(t>\frac{T}{2}\right)\right\}=\frac{e^{-(a+j\omega_0)t}}{a+j\omega_0}\left\{e^{(a+j\omega_0)\frac{T}{2}}\right.$$

$$\left.e-^{-(a+j\omega_0)\frac{T}{2}}\right\}=\frac{e^{-(a+j\omega_0)t}}{a+j\omega_0}\sinh(a+j\omega_0)\,\frac{T}{2} \qquad (20)$$

$$F\left\{\omega_0,\,t,\,T\left(t\leq\frac{T}{2}\right)\right\}=\frac{1-e^{-(a+j\omega_0)t}e^{(a+j\omega_0)\frac{T}{2}}}{a+j\omega_0} \qquad (21)$$

$t>\frac{T}{2}$이지만 $T>>>1$라면 (20)式은

$$F\left\{\omega_0,t,T\left(t>\frac{T}{2}\right)\right\}=\frac{e^{-(a+j\omega_0)t}\cdot e^{(a+j\omega_0)\frac{T}{2}}}{a+j\omega_0}$$

振幅만을 생각하면

$$\left|F\left\{\omega_0,t,T\left(t>\frac{T}{2}\right)\right\}\right|=\frac{e^{-a(t-\frac{T}{2})}}{|a+j\omega_0|} \qquad (22)$$

平均始作時間의 振幅 $e^{-a(t-\frac{T}{2})}$에 比例함을 알 수 있다. (經過時間이 充分히 delay되었기 때문)

(2) Unit pulse of duration τ

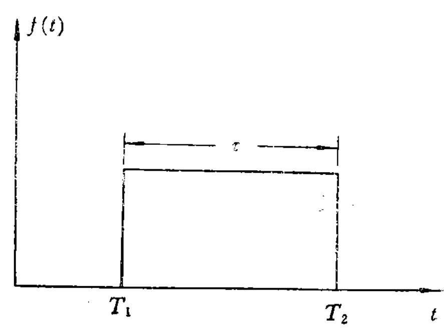

Fig. 2 Unit pulse of duration τ

(from T_1 to T_2) $T\geq\frac{\tau}{2}$

$$F\left\{\omega,t,T\right\}=\int_{T_1}^{T_2}e^{-j\omega t}dt=\left[\frac{e^{-j\omega t}}{jw}\right]_{T_1}^{T_2}$$

$$=\frac{e^{-j\omega T_2}-e^{-j\omega T_1}}{j\omega} \qquad (23)$$

$$|F\{\omega,t,T\}|=\left|\frac{\cos\omega T_2-j\ \sin\omega T_2-\cos\omega T_1+j\ \sin\omega T_1}{-j\omega}\right|$$

$$=\frac{\sqrt{(\cos\omega T_2-\cos\omega T_1)^2+(\sin\omega T_2-\sin\omega T_1)^2}}{\omega}=\frac{\sqrt{2}}{\omega}\sqrt{[1-\cos\omega\tau]} \qquad (24)$$

ω가 充分히 커서 極値 計算에서 分子만 생각해 주면, 最大値는 $\cos\omega\tau=-1$의 값 卽 $\omega\tau=\pi$, 그러므로 主成分은

$$\omega_{max}=\frac{\pi}{\tau}=\frac{\pi}{T_2-T_1} \tag{25}$$

에서 일어난다.

(3) $T_1<t-\frac{T}{2}$, $t+\frac{T}{2}<T_2$인 Unit pulse의 경우

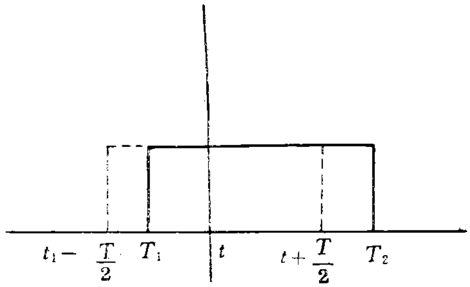

Fig. 3 Unit Pulse for $T_1<t_1-\frac{T}{2}$, $T_2>t_2+\frac{T}{2}$

$$|F(0,t,T)|=\frac{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\omega(t+\frac{T}{2}-T_1)}}{\omega}\Bigg|_{\omega=0} \tag{26}$$

$$W(0,\ t,\ T)|=\frac{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\omega(t+\frac{T}{2}-T_1)}}{\omega T}\Bigg|_{\omega=0}$$

$$=\frac{t-T_1}{T}+\frac{1}{2} \tag{27}$$

역시 이는 $t+\frac{T}{2}=T_2$, $t-\frac{T}{2}=T_1$일 때 最大로서 1이고, T의 增大에 따라 減小하며 이 역시 期待되는 바이다.

(4) Switched Carrier $f(t)=\cos\omega_0 t\ u(t)$

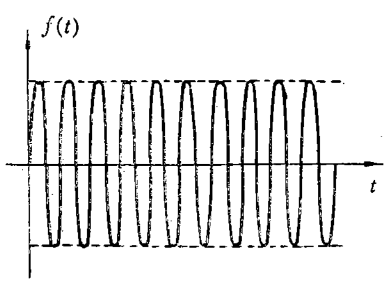

Fig. 4 Switched Carrier Cos $\omega_0 t\ u(t)$

$$f(t)=\cos\omega_0 t\ u(t) \tag{28}$$

$$W(\omega,\ t,\ T)=\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}}\cos\omega_0 t\ u(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{e^{j(\omega_0-\omega)(t+\frac{T}{2})}-e^{j(\omega_0-\omega)(t-\frac{T}{2})}}{2j(\omega_0-\omega)}-\frac{e^{-j(\omega_0+\omega)(t+\frac{T}{2})}-e^{-j(\omega_0+\omega_0)(t-\frac{T}{2})}}{2j(\omega_0+\omega)} \tag{29}$$

$t-\frac{T}{2}>0$ 라면

$$W(\omega,t,T)=\frac{e^{j(\omega_0-\omega)t}}{\omega_0-\omega}\sin(\omega_0-\omega)\frac{T}{2}+\frac{e^{-j(\omega_0+\omega)t}}{\omega_0+\omega}\cdot\sin(\omega_0+\omega)\frac{T}{2} \tag{30}$$

$\omega=\pm\omega_0$에 集中되어 있음을 알 수 있다.

5. 몇 가지 定理

一般 Fourier 積分에 準해서 많은 定理가 있을 수 있지만 最終的으로 spectrum의 卽時性을 證明하는데 必要하게 될 것만 쓴다.

(1) Translation Theorem

$f_{(t)}$가 時間軸에 t_1만큼(正時間 方向으로) translate하면 T.D·spectrum을 $e^{-j\omega t_1}$만큼 곱해지고 絶對値에는 變함이 없다.

〔證 明〕

$$F(\omega,t,T)=t_1+\int_{t_1-\frac{T}{2}}^{t_1+\frac{T}{2}}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=e^{-j\omega t_1}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t_1+x)e^{-j\omega x}dx$$

$$=e^{-j\omega t_1}F(\omega,t\text{-}t_1,\ T) \tag{31}$$

(2) Time inverting theorem

$g(t)$의 T.D. Spectrum을 $F(\omega,0,T)|_{f(t)=g(t)}$라고 하면 $f(-t)$의 T.D. Spectrum은 $F(-\omega,0,T)|_{f(t)=g(-t)}$이다.

〈證 明〉

$$F(\omega,0,T)|_{f(t)=g(t)}=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}g(t)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}g(-\tau)e^{j\omega\tau}d\tau$$

$$=F(-\omega,0,T)|_{f(t)=g(-t)} \tag{32}$$

이들 定理로부터 다음 Collorary가 自動的으로 나온다.

Collorary 波形 $f(t)$가 t_1中心으로 해서 對稱이라면

$$F(\omega,t,T)=e^{-j\omega t_1}F\{-\omega,-(t-t_1),T\}$$

$$=e^{-j\omega t_1}F|\omega,-(t-t_1),T\} \tag{33}$$

上式의 마지막 部分은 波形이 t_1을 中心으로 t軸을 뒤집어서 얻은 境遇와 一致하기 때문에 $F(\omega)=F(-\omega)$인데서 나온다.

(3) Spectrum의 卽時性

各 瞬間의 Spectrum은 各 순간의 函數値에 依해서

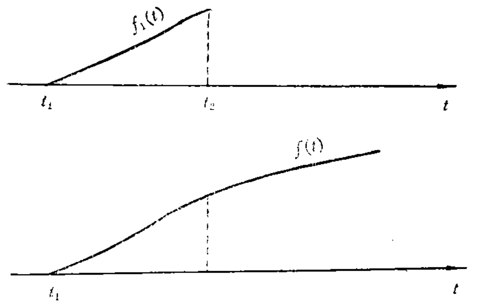

Fig. 5 Illustration for instataneity of Spectrum.

만 決定된다.

〈證 明〉

Fig. 5에서 圖示된 바와 같이 實函數 $f(t)$에 依해서 다음과 같이 $f_1(t)$를 擇하면,

$$f_1(t)=\begin{cases} f(t) & t\leq t_2 \\ 0 & t>t_2 \end{cases} \tag{34}$$

Causality에 依해서 t_2 以前의 Spectrum은 $f(t)$의 境遇나 $f_1(t)$의 경우나 마찬가지이다. 函數 $f(t)$및 $f_1(t)$가 $t=t_1$ 以前에서 零値를 유지했다면 t_1 以前에 Spectrum이 있을 수 없다.

t_1을 t_2에 接近시킴으로서 t_1 t_2 사이의 函數値만이 t_1, t_2 사이의 Spectrum을 決定함을 알 수 있다.

이 定理는 또한 Causality를 適用한 다음에 t_1을 中心으로 函數를 反轉시켜서, 또 한번 Causality를 適用하면 前 Collorary에 依해서 Spectrum에 依한 영향을 時間的으로 앞으로 소급하지도 않고 뒤로 밀쳐가지도 않음을 말할 수 있다. Q.E.D.

6. 結 論

積分을 完了한 Fourier Integral은 한 時間函數만의 經過 Spectrum의 總和로써 周波數만의 函數인 Spectrum을 주는 것이지만, 이 Spectrum은 時間의 概念을 度外視한 것이다.

그러나 우리는 微小時間에 增加하는 各 周波數 成分의 增加率을 觀察하여 어느 時間에 있어서의 各 周波數成分의 Spectrum 强度를 생각할 수 있다.

이 Spectrum 의 單位時間 平均密度는

T.D. Spectrum density

$$W(\omega,t,T)=\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

로써 나타나고, T.D. Fourier Transform은

$$F(\omega,t,T)=\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

로써 나타난다.

어느 境遇나 integrand는 考慮對象函數 $f(t)$와 Unit Phasor $e^{-j\omega t}$와의 Instantaneous correlation이다.

뜻있는 量의 計算을 위해서는 考慮周波數의 週期 以上의 時間을 T로 잡아야 한다.

그리고 Spectrum의 순간값은 函數 $f(t)$의 순간값에 比例하지만 最終結果成分을 前記 T 以上 時間의 T.D. Fourier Transform에 依해서 定해진다.

그리고 不確定性 原理 範圍內에서 Spectrum을 函數 $f(t)$와 即時 關聯을 갖고 causality의 制限을 받는다.

參 考 文 獻

1. Titchmarch, E.C. "Introduction to the theory of Fourier Integral" 2nd ed. oxford univ. Press 1948.
2. Bremermann, H.J. "Distributions, Complex Variables, and Fourier Transforms." Addison wesley, 1965.
3. 安秀桔 ; "Time Dependent Correlation Function과 그의 應用에 關한 硏究" 電子工學會誌 第10卷 6號 1973年 12月.
4. Brown, T. "Telecommunications" CHAPMA" AND HALL LTD 1964.