最適 피이드백 制御器 設計에 관한 연구

논 문
25～5～3

A Stuby on Optimal Dynamic Feedback Controller Design

梁 興 錫*・辛 圭 永**
(Heung Suk Yang, Q Young Sin)

Abstract

In this paper, the problem of controlling deterministic continuous linear system with a slightly modified quadratic performance criteria is studied.

when the number of out put variables is much lesser then that of state variables, either the controller becomes complex or the performance measure becomes much higher with only output feed back. So the design philosphy treated in this paper lies in finding a compromising point between the controller complexity and the performance measure.

The controller is composed of stasic plus dynamic compensator with order equal to the mtmber of output variables.

Several unknowns are unknown parameters are bundled into one, and using Pontryagin's minimum principle, conditions and formula for optimum control are induced which are different from that of Kalman optimal regulator.

1. 서 론

제어공학에서 주어진 평가함수를 최적화하는 문제는 오랫동안 연구되어 왔다.

선형확정연속계통에서 각 상태변수 및 제어변수에 제한이 없는 경우에 대하여 지금까지 알려진 바로는

$$u^*(t)=-R^{-1}B'K(t)x(t) \qquad (1-1)$$

로 주어지는 제어량이 2차 평가함수(Quadratic Performance measure)를 최소화 한다는 것이다.[1]

예기에서 $K(t)$는 이미 잘 알려진 Riccati바정식[2]의 해이다. 이때 제어변수 $u^*(t)$는 상태변수의 선형결합이므로 상태변수를 이용해야 하는데 실제의 계통(System)에서는 이것이 용이하지 못하다. 이점을 보완하는 방법으로서 주어진 출력변수를 적절히 재 구성하여 얻는 동적보상기(Dynamic Compensator)를 쓰거나 또는 관측계(Observer System)[4]를 구성한다. 1970년 W.S. Levine과 M. Athans는 비례 출력궤환으로 $u^*(t)$를 구하는 정적보상기(Static Compensator)[5]를 발표하였고 그뒤 1972년 C.H. Knapp 및 S. Basuthakur에 의하여 (5)와는 다른 방식으로 같은 문제가 해결되었다.[6] 한편 비례 및 적분제어에 관하여는 (7)에서 출력의 적분회로에 다시 궤환(Feedback)요소를 답입하여 최소차수 관측자(minimal order observer)와 같은 차수를 갖는 동적보상기를 비례제어와 병열로 넣어서 주어진 평가함수[1]를 최소화 하는 동적보상기를 얻었다. 본 연구에서는 비례제어와 함께 출력변수의 수와 같은 차수의 동적보상기를 사용하여 일반적인 2차 평가함수(Quadratic Performanee measure)를 최소화 하는 조건들을 유도하였다.

2. 일반적인 제어기 계통에 관한 고찰

아래와 같은 식으로 주어지는 계통이 있다고 가정하자.

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \qquad (2-1)$$

$$y(t)=Cx(t) \qquad (2-2)$$

여기에서 $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$는 각각 n, r, m 인 상태변수, 출력변수, 제어변수벡터이며 A, B, C는 각각 $n\times n$, $n\times m$, $r\times n$인 상수행렬이고 이 계통은 가제어 및 가관측(Controllable and observable)이라고 가정한다. 제어량 $u(t)$는 평가함수와 출력변수, 상태변수 및 자신의 제어조건에 따라 결정되는데 일반적으로 (1—1)식으로 표시되는 제어량이 2차 평가함수를 최소

*正 會 員：서울大工大 敎授・工博(當學會 理事)
** 〃 ：忠南大工大 助敎授
接受日字：1976年 6月 25日

화 하게 되지만 상태변수에 제한이 있게 될 때는 이런 $u^*(t)$를 얻을 수가 없으므로 준 최적제어라고 말할 수 있다. 본론에 들어 가기 전에 본 연구와 관련이 있는 제어기를 소개하는 것이 본 연구의 특징을 명확케 해 줄 것이므로 Kalman최적제어기 이외에 다음의 3 가지를 소개하고저 한다.

[1] (3—10)식을 보시오.

2—1. Kalman 최적제어기

$$u^*(t) = -R^{-1}B'Kx(t) \qquad (2-3)$$

로 주어지는 계통이며 이때의 평가함수는 다음과 같다.

$$J(u(t)) = \int_0^\infty (x'Qx + u'Ru)dt \qquad (2-4)$$

여기에 특징은 상태변수 $x(t)$를 모두 사용하여야 하는 점이다.

2—2. 상수출력궤환 제어기

$$u^*(t) = Fy(t) \qquad (2-5)$$

로 주어지는 계통이며 (2—4)식과 같은 평가함수하에서 출력변수의 일차 선형결합만으로 제어변수를 결정한다.

2—3. 최소차수(Minimal Order) 제어기

T.L Johnson등에 의하여 사용된 제어기로서 $u(t) = Fy(t) + Gz$……(2—5)로 주어지며 z는 $(n-r)$차수의 동적 보상기가 된다. 또한 평가함수로서는 [1]과 같은 독특한 형식을 사용하였다.

2—4. Calovic에 의한 제어기(10)

$u^*(t)$는 (2--5)식과 마찬가지이나 z의 형성이 (2—3)과 다르다. 즉

$$z(t) = \int_0^\infty y(t)dt \qquad (2-6)$$

으로 놓아 이 보상기의 차수는 r차가 되고 궤환요소가 없다. 그러나 이때 A 및 B의 값에 따라서 뒤에 설명하는 확장된 상태방정식이 $F \cdot G$의 어떤 값에 대하여도 불안정하게 되는 경우가 있는 결점이 있다.

이상의 경우에 대한 Block 선도를 그려보면 각각 그림 2—1과 같이 된다.

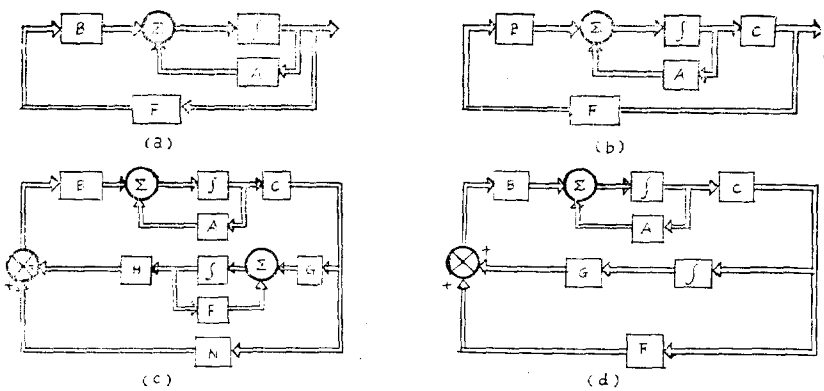

그림 2—1. 여러가지 제어기의 Blolck선도

3. 문제의 설정

편의상 $x(t)$. $y(t)$ 및 $u(t)$를 x, y, u로 표시하기로 ··다.

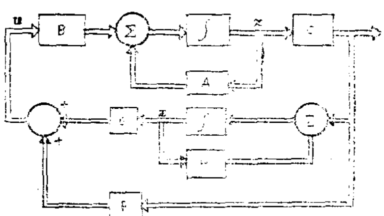

그림 3—1. 준최적 제어계통

그림 3—1의 윗부분은 (2—1) 및 (2—2) 식으로 표시되는 대표적인 Plant의 Block선도이다.

본 연구에서 시도한 제어기의 구성은 그림 3—1의 아랫부분과 같다. 더 자세히 설명하면 z를 뽑아내는 적분기의 차수는 r이며 궤환회로의 H는 2—4에서 설명했듯이 다음 3—2에서 소개되는 확장된 상태 방정식의 안정도(Asymptotic Stability)를 확보하기 위한 것이다.

따라서 여기에서 제시된 제어기는 출력변수의 수가 적을때 최소차수 제어기보다는 구조상 간편해지며 Calovic의 제어기의 단점을 보완할 수 있다.

3—2. 확장된 계통 상태 방정식

그림 3—1을 관찰하면

$$\dot{z}=Hz+Y \qquad (3-1)$$

가 되며 Z는 $(r\times1)$벡터 H는 $(r\times r)$정방행열이다. z의 초기치를 $z(o)$로 놓고

$$E[z(o)]=zo \qquad (3-2)$$

라 놓자.

(2—1)식 (2—2)식 (3—1)식으로 부터

$$\dot{x}=(A+BFC)x+BGz \qquad (3-3a)$$

$$\dot{z}=Cx+Hz \qquad (3-3b)$$

를 얻게 되며

$$w(t)\equiv\begin{pmatrix}x(t)\\ z(t)\end{pmatrix} \qquad (3-4)$$

로 정의하면 (3—3)식은 다음과 같이 된다.

$$\dot{W}=MW \qquad (3-5)$$

여기에서

$$M=\begin{pmatrix}A+BFC & BG\\ C & H\end{pmatrix} \qquad (3-6)$$

이다.

따라서

$$w(t)=exp(M^{t})\cdot W(o) \qquad (3-7)$$

이 되고

$$w(o)=\begin{pmatrix}x(o)\\ z(o)\end{pmatrix} \qquad (3-8)$$

로 주어진다.

(3—5)식을 확장된 계통상태방정식이라 하고 이 계통은 안정(Asymptically Stable)하다고 가정한다.

3—3. 평가함수의 결정

평가함수는 설계자가 원하는 모든 요건을 포함하여야 되는 것이 원칙이다. 그러나 이 함수를 어떻게 정하느냐에 따라 최적해를 구하는 방식 및 그 해가 달라진다. 따라서 아무리 모든 요건을 망라한 평가함수 일지라도 최적해를 구할수 없으면 무의미한 것이 되어 버린다.

지금까지 사용된 가장 보편적인 평가함수로서는

$$J(u)=\int_0^\infty(x'Qx+u'Ru)dt \qquad (3-9)$$

로 주어진 것이 가장 잘 알려져 있다.

[註2] 그러나 이 함수가 모든 문제에 대하여 잘 정해진 (Well-defined) 평가함수라고 보기에는 어려움이 있다.

특히 [3], [7]에서 저자들은 시험평가함수(Trial Performance function)를

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^\infty(x'Qx+Y'(G'R_2G+N'RN)Y$$
$$+Z'(F,R_2F+H'RH)Z\,dt \qquad (3-10)$$

으로 정하여 수학적 처리를 간편하게 하려고 시도하였다.

본 연구에서는 (3—9)식을 약간 수정한 $J(u)$를 정의함으로서 일반성을 잃지 않으면서 문제의 총결을 용이하게 하기로 한다. 즉

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^\infty(x'Qx+u'R_1u+(Y+HZ)'$$
$$R_2(Y+HZ)dt \qquad (3-11)$$

이 식에서 적분기호안의 첫항은 상태변수들의 오차를 최소화시키려는 양이고 둘째항은 제어에네지를 최소화하기 위한 것이며 셋째항은 동적보상기에 소요되는 입력을 작게하기 위한 것이다.

(3—11) 식에

$$u=FCx+Gz \qquad (3-12)$$

를 대입하여 정리하면

$$J(F.G.H.W(o)=\frac{1}{2}\int_0^\infty(x'Qx+x'C'R_2Cx$$
$$+x'C'R_2HZ+Z'H'R_2Cx$$
$$+Z'H'R_2HZ+x'C'F'R_1FCx$$
$$+x'C'F'R_1GZ+Z'G'R_1FCx$$
$$+Z'G'R_1GZ)dt \qquad (3-13)$$

이 되고 이를 W로 표시하면

$$J(F,G,H,W(o))=\frac{1}{2}\int_0^\infty W'QWdt \qquad (3-14)$$

가 된다.

여기에서

$$Q=\begin{pmatrix}Q+C'F'R_1FC+C'R_2C, & C'R_2H+C'F'R_1G\\ G'R_1FC+H'R_2C, & H'R_2H+G'R_1G\end{pmatrix} \qquad (3-15)$$

로 정의되는 $(n+r)\times(n+r)$ 행열이고 Q는 Positive semi-definite인 대칭행렬이고 R_1 및 R_2는 Positive definite인 대칭행렬이다. 즉

$$Q\geq O \qquad (3-16a)$$

$$R_1>O \qquad (3-16b)$$

$$R_2>O \qquad (3-16c)$$

$\tilde{Q}$가 대칭행열임에 유의한다.

3—4. 초기조건의 고려

(3—14)식으로 주어지는 평가함수는 F.G.H의 값이 확정되었을 경우 그 값이 초기치에 좌우된다. 그런데 초기 조건은 계통에 교란이 있을때 정해진다고 볼수 있으므로 그 값은 부정(Random)이며 따라서 평가함수도 그평균치를 취하여야 한다.

그래서

$$\hat{J}(F,G,H)\equiv E[J(F,G,H,W(o))]$$
$$=\frac{1}{2}E[\int_0^\infty W'\tilde{Q}Wdt] \qquad (3-17)$$

로 되는 $\hat{J}$를 평가함수로 잡는 것이 타당하며 이 $\hat{J}$는 $W(o)$에 무관하게 된다.

또한 초기치의 확률적 성질을 알고 있다고 하고

$$E[x(o)]=xo \qquad (3-18a)$$

$$E[(x(o)-xo)(x(o)-x(o)']=xo \qquad (3-18b)$$

라 놓자.

3—5. 문제의 설정

(3—17)식을 최소화 하는 데는

$$\frac{\partial J}{\partial F}=O,\quad \frac{\partial J}{\partial G}=O,\quad \frac{\partial J}{\partial H}=O \qquad (3\text{—}19)$$

인 세개의 식으로 부터 각각의 값을 산출 할수 있으나 여기에선 T. L. Johnson[7]등이 사용한 방식에 따르기로 한다.

우선

$$\left.\begin{array}{l} P\equiv\begin{bmatrix}F, & G\\ I, & H\end{bmatrix}\ \hat{A}\equiv\begin{pmatrix}A & o\\ o & o\end{pmatrix}\ \hat{B}\equiv\begin{pmatrix}B & o\\ o & I\end{pmatrix} \\ \hat{C}\equiv\begin{pmatrix}C & o\\ o & I\end{pmatrix}\ \hat{Q}\equiv\begin{bmatrix}Q & o\\ o & o\end{bmatrix}\ R\equiv\begin{bmatrix}R_1 & o\\ o & R_2\end{bmatrix}\end{array}\right\} \qquad (3\text{—}20)$$

으로 놓으면

$$M=\hat{A}+\hat{B}P\hat{C} \qquad (3\text{—}21)$$

$$Q=Q+\hat{Q}'P'RP\hat{C} \qquad (3\text{—}22)$$

가 됨을 쉽게 알 수 있다.

여기에서

$F: m\times r$ $\qquad$ $\hat{A}: (n+r)\times(n+r)$

$G: m\times r$ $\qquad$ $\hat{B}: (n+r)\times(m+r)$

$H: r\times r$ $\qquad$ $\hat{C}: (r+r)\times(r+n)$

$M: (n+r)\times(m+r)$ $\qquad$ $P: (m+r)\times(r+r)$

$\hat{Q}: (n+r)\times(n+r)$ $\qquad$ $R: (m+r)\times(m+r)$행열이고

$R>O$이 된다.

이상의 결과를 요약하면

$$W=(\hat{A}+\hat{B}P\hat{C})W \qquad (3\text{—}23a)$$

$$J(p)=\frac{1}{2}E[\int_0^\infty W'(Q+\hat{C}'P'RP\hat{C})W\,dt] \qquad (3\text{—}23b)$$

를 얻을 수 있으며, 따라서 우리의 문제는 모든 P에 대하여

$$J(P^*)<J(P) \qquad (3\text{—}24)$$

를 만족하는 P^*를 찾으면 된다.

4. 최 적 해

P가 (3—24)식을 만족하고 또 $J(p)$가 P에 대하여 오목하다면

$$\frac{\partial\hat{J}(P)}{\partial P}=O=E\left[\frac{\partial JCP,\ W(o)}{\partial P}\right] \qquad (4\text{—}1)$$

따라서 $\frac{\partial}{\partial P}\left[\int_0^\infty W'(Q+\hat{C},P'RP\hat{C})W\,dt\right]=o$ (4—3)

되는 조건을 구한다.

보조정리 1.[8]

$J=\int_0^\infty L(\boldsymbol{x},t)dt$이고 $\dot{\boldsymbol{x}}=f(x,t)$이면

$\frac{\partial J}{\partial X(o)}=\wedge(o)$이다.

여기에서

$\Lambda=-\frac{\partial H}{\partial X}=-\frac{\partial}{\partial X}(L+\lambda' f)$ $\boldsymbol{\lambda}(\infty)=O$이다.

이 보조정리를 이용키 위하여 P를 또 하나의 변수로 생각하고 $\dot{P}=O$로 놓으면

(3—23)식으로 부터

$$H=\frac{1}{2}W'(\hat{Q}+\hat{C}'P'RP\hat{C})W+\Lambda_w(\hat{A}+BPC)W+\Lambda\cdot O \qquad (4\text{—}3)$$

다음에 [11]의 결과식들을 이용하면

$$\dot{\Lambda}_w=-\frac{\partial H}{\partial W}=-(\hat{A}+\hat{B}P\hat{C})\Lambda_w-(\hat{Q}+\hat{C}'P'RP\hat{C})W \qquad (4\text{—}4a)$$

$$\Lambda_W(\infty)=O \qquad (4\text{—}4b)$$

$$\dot{\Lambda}p=-\frac{\partial H}{\partial P}=-\hat{B},\Lambda_w W'\hat{C}'-RP\hat{C}WW'\hat{Q}' \qquad (4\text{—}5a)$$

$$\Lambda_P(\infty)=O \qquad (4\text{—}5b)$$

따라서 보조정리 1과 (4—5)식에 의하여

$$E\left[\frac{\partial J}{\partial P}\right]=O=E[\Lambda_P(o)]$$

$$=E[-\int_0^\infty \Lambda_P dt]$$

$$=E[\int_0^\infty(\hat{B}'\Lambda_w W'\hat{C}'+RP\hat{C}WW'\hat{C})dt \qquad (4\text{—}6)$$

이 식을 정리하면

$$\hat{R}P^*C\int_0^\infty E[WW']C'dt=-\int_0^\infty\hat{B}'E[\Lambda_W W']\hat{C}'dt \qquad (4\text{—}7)$$

을 얻게 되어 최종적으로

$$P=-R^{-1}(B\int_0^\infty E[\Lambda_W W']\hat{C}'dt)(\hat{C}\int_0^\infty E[WW']dt\ \hat{C})^{-1} \qquad (4\text{—}8)$$

이 되는데 이 식은 실용상 부적합하므로 다음과 같이 간략히 할 수 있다.

우선

$$\int_0^\infty E[WW']dt=\int_0^\infty exp(Mt)\cdot E[Wo\cdot W'(o)]exp(M't)dt \qquad (4\text{—}9)$$

이 식의 값을 L이라 하면 L은 다음과 같은 방정식의 해가 된다.

$$L(\hat{A}+\hat{B}P\hat{C})'+(\hat{A}+\hat{B}P\hat{C})L+E[W(o)W'(o)]=O \qquad (4\text{—}10)$$

여기에서 L은 Positive definite인 대칭행열이다.

한편 $t_f=\infty$인때 kalman[9]에 의하면

$$\Lambda(t)=KW(t)\text{가 되므로} \qquad (4\text{—}11)$$

$$E[\int_0^\infty \Lambda w W'dt]=KL \qquad (4\text{—}12)$$

가 되고 (4—11)을 (4—4)에 대입하면

$$K(\hat{A}+\hat{B}P\hat{C})'+(\hat{A}+\hat{B}P\hat{C})K+(\hat{Q}+\hat{C}'P'R P\hat{C})=o \qquad (4-13)$$

을 얻게 되며 K는 Positive definite인 대칭행열이 된다.

위의 결과들을 (4—8)식에 대입하면

$$P^{*}=-R^{-1}\hat{B}'KL\hat{C}'[\hat{C}L\hat{C}']^{-1} \qquad (4-14)$$

가 되어 H,F 및 G를 구할수 있다.

한편

$$\hat{J}=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}E[W'\tilde{Q}W]dt \text{에서}$$

$$\hat{J}=\frac{1}{2}tr\int_{0}^{\infty}exp(M't)\tilde{Q}exp(Mt)E[W(o)W'(o)]dt$$

$$=\frac{1}{2}tr[KE[W(o)W'(o)]] \qquad (4-15)$$

를 얻게 된다.

$$E[W(o)W'(o)]=Wo+WoWo' \qquad (4-16)$$

인 것을 이용하면

$$J=\frac{1}{2}tr[K(Wo+WoWo')] \qquad (4-17)$$

을 얻는다. 여기에서 tr는 trace를 뜻한다.

5. 결　론

본 연구에서는 출력궤환을 통하여 주어진 평가함수를 최소화 하는 제어기 및 조건들을 제시 유도하였다.

제어기의 구성의 결정은 설계자의 기호 및 계통의 특징에 따라서 변하게 되는데 여기에서는 출력 변수의 수와 같은 차수의 동적보상기를 좀 더 일반화된 평가함수하에서 시도하였다. 이 보상기의 장점으로서

첫째 $n-r>r$, 즉 출력변수의 수가 작을때 제어기의 구성이 간단하여지고

둘째, 최소차수 보상기를 쓸 경우보다(출력변수의 수가 작은 가정하에서) 확장된 계통의 상태방정식의 차수가 적어지며

셋째, 계통방정식에서 M의 고유치가 영(zero)가 되지 않도록 적절한 M의 값을 정할 수 있다. 따라서 [10]에서 제안된 모델보다 더욱 안정된 제어기를 구성할 수가 있다.

참 고 문 헌

(1) Donald E. Kirk, "Optimal Control Theory." Prentice-Hall Inc., 1970. p. 211

(2) Donald E. Kirk, "Optimal Control Theouy. An Introduction." Prentice-Hall. Inc., 1970 p. 212

(3) W.S. Levine, T.L. JohnSon-and M. Athans, "Optimal Limited State Variable Feedback Controllers for Linear Systems." IEEE Trans. on Auto Cont. Vol AC-16, No. 6, Dec. 1971. pp. 785~792

(4) D.G. Luenburger, "Observers for Multivariable Systems," IEEE Trans on Auto Cont. Vol AC-11 April, 1966. pp. 190~197

(5) W.S. Levine and M. Athans, "On the Determination of the Optimal Constant Output Feedbaek Gains for Linear Multivariable Systems." IEEE Trans on Auto. Cont Vol AC-15 No.1, Feb 1970. pp. 44~48

(6) C.H. Knapp and S. Basuthakur. "On Optimal Output Feedback." IEEE Trans. on Auto Cont Vol. AC-17, No. 6, Dec. 1972. pp. 823—825

(7) Timothy L. Johnson, et al, "On the Design of Optimal Constrained Dynamic Compensators for Linear Constant Systems." IEEE Trans. on Auto Cont Vol AC-15 No. 6, Dec 1970. pp. 658~670

(8) A.E. Bryson and Y.C.Ho, "Applied Optimal Control," Walthans, Mass, Blausdell, 1969 pp. 48~49

(9) R.E. Kalman," Contributions to the Theory of Optimal Control," Bol Soc Mat. Mex. 1960 pp. 102~119

(10) Milan Calovic, "Linear Regulator Design for a Load and Frequency Control," IEEE Trans on Power Appa. and Systems, Vol PAS-19 No. 6, Dec 1972 pp. 2271~2285

(11) Michael Athans, "The Matrix Minimum Principle," Information and Control 11. 1968. pp. 592~606

(12) W.M. Wonham "On a Matrix Riccati Equation of Stochastic Control," SIAM J. Control Vol. 6 No.4, 1968. pp. 181~697.