電流機器 및 그 應用特集

任 達 鎬*

變壓器卷線 및 電機子導體電流에 의한 Field의 解析

—차 례—

1. 序 言

최근에 이르러 電氣機器의 小形輕量化 경향이 증대되어 가고 있으며 새로운 方式의 機器들의 출현, 特殊機의 硏究 등 電氣機器開發硏究가 활발히 진행되고 있다.

이러한 세계적 추세속에서 우리나라 電氣機器생산업계의 현황을 볼 때 과연 어느 정도의 경지에 놓여 있으며, 어떻게 대처해 나아가야 할 것인가 하는 문제는 소홀히 다루어질 성질상의 것이 아니라 생각된다.

從來 우리의 실정을 바탕으로 현실을 감안할 때 현재 우리나라 기술로 생산공급되고 있는 電氣機器들을 어떠한 機器를 어느 정도의 技術을 가지고 어떻게 만드는가의 문제도 중요한 일이겠으나, 만드러진 機器가 品質과 경제적인면에서 만족될 수 있는가의 與否는 더욱 중요한 일이라 보겠다. 뿐만 아니라, 機器設計의 변경, 혹은 개량 등의 문제가 제기되는 경우에 있어서는 試作機의 제반 특성이 요구조건에 들 수 있는 성능을 지닐 수 있는지의 與否를 가리기 위한 특성 산정은 되도록 정확한 방법을 택하여 실질적으로 이론과 시험을 토대로 구명하여줌으로서 그 品質을 보증할수 있게 되어야 할 것이다.

여기에 기초적이고 단편적이나마 變壓器와 誘導機等의 諸定數와 特性의 이론적 산정에 필요로 하는 機器內卷線電流에 의한 Field해석에 대하여 비교적 정확하다고 알려져 있는 Rogowski方法과 Roth方法을 소개하고 이를 해설하기로 한다.

2. 일정한 空隙의 Permeance

그림 1의 (a)와 같이 일정한 空隙을 갖는 回轉機의 armature방향에 따르는 起磁力분포가 K고조파를 갖는다고 할 때 armature reaction a_K는 $a_K=A_K\sin\frac{K\pi}{\tau}x$ 의 형식으로 나타낼 수 있고 그 때 $y=0$인 경계에서 x 방향의 電流密度는 $i_K=\frac{da_K}{dx}=\frac{K\pi}{\tau}A_K\cos\frac{K\pi}{\tau}x$라

* 正會員 · 漢陽大 敎授(工博) · 當學會 總務理事

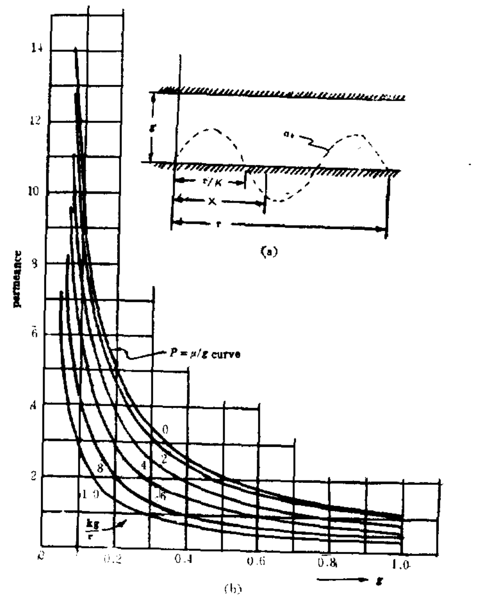

그림 1

놓을 수 있다. 이 電流密度는 Z軸 성분만이므로 Ampere의 法則과 Stokes의 定理에 의하여

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}=-\frac{\partial i_z}{\partial y}$$

와 같은 磁界의 方程式이 成立한다. 그런데 空隙에 있어서는 電流가 零이므로,

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

와 같이 된다. 지금 이 方程式의 해를 $H_x=f(y)\cos\frac{K\pi}{\tau}x$ 라 놓으면 方程式 (1)에 의하여

$$\frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2}-\left(\frac{K\pi}{\tau}\right)^2 f(y)=0$$

와 같이 되고 이해는

$$f(y)=C_1\sin h\frac{K\pi}{\tau}y+C_2\cos h\frac{K\pi}{\tau}y$$

가 된다.

고로 $H_x=\left(C_1\sinh\frac{K\pi}{\tau}y+C_2\cosh\frac{K\pi}{\tau}y\right)\cos\frac{K\pi}{\tau}x$

또한 $\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$이므로

$$H_y=-\int\frac{\partial H_x}{\partial x}dy$$

$$=\left(C_1\sinh\frac{K\pi}{\tau}y+C_2\cosh\frac{K\pi}{\tau}y\right)\sin\frac{K\pi}{\tau}x+C_3(x)$$

그런데 $H_y(x=0)=-H_y\left(x=\frac{\pi}{K}\right)$

이므로 $C_3(x)=0$

의 결과를 얻는다. 지금 鐵心의 透磁率을 無限大라 보면 $y=0$에서 $H_x=\frac{\partial a_K}{\partial x}$이므로

$$C_2\cos\frac{K\pi}{\tau}x=\frac{K\pi}{\tau}A_K\cos\frac{K\pi}{\tau}x$$

즉 $C_2=\frac{K\pi}{\tau}A_K$이다.

또한 $y=g$에서 $H_x=0$이므로

$$C_1\sinh\frac{K\pi}{\tau}g+C_2\cosh\frac{K\pi}{\tau}g=0$$

여기에 C_2의 값을 대입하고 C_1을 구하면

$$C_1=-\frac{K\pi}{\tau}A_K\coth\frac{K\pi}{\tau}g\text{이다.}$$

고로 $$H_x=\frac{K\pi}{\tau}A_K\frac{\sinh\frac{K\pi}{\tau}(g-y)}{\sinh\frac{K\pi}{\tau}g}\cos\frac{K\pi}{\tau}x \tag{2}$$

$$H_y=-\frac{K\pi}{\tau}A_K\frac{\cosh\frac{K\pi}{\tau}(g-y)}{\sinh\frac{K\pi}{\tau}g}\sin\frac{K\pi}{\tau}x \tag{3}$$

그런데 $B_y=\mu H_y$, a_K, Permeance P와의 관계로부터

$$B_{y=g}=\mu H_{y=g}=a_KP=A_K\sin\frac{K\pi}{\tau}x\cdot P$$

$$=\mu\frac{K\pi}{\tau}A_K\frac{\sin\frac{K\pi}{\tau}x}{\sinh\frac{K\pi}{\tau}g}$$

$$\therefore P=\frac{\mu}{g}\frac{\frac{K\pi}{g}}{\sinh\frac{K\pi}{\tau}g} \tag{4}$$

式 (4)에서 $\frac{Kg}{\tau}$가 零에 가까운 경우는 $P=\frac{\mu}{g}$라는 결과를 얻는다. 그림 1의 (b)는 空隙 g와 permeance P와의 관계곡선이고 이로부터 우리는 誘導機, 혹은 turboalternatore와 같은 一定한 空隙을 갖는 기계에서 armature reaction의 각 harmonics에 대한 空隙 permeance의 성질을 알 수 있다.

3. 變壓器卷線電流에 의한 Field

그림 2와 같이 交互配置卷線의 變壓器에서는 高壓

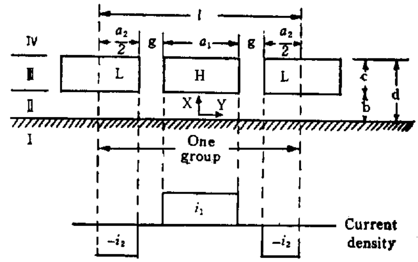

그림 2

(HV)과 低壓(LV)卷線이 duct를 두고 서로 모아져서 하나의 coil群을 구성한다.

지금 이 coil群 電流에 의한 磁束分布를 알기 위한 Vector potential을 구하기 위하여 다음과 같은 가정을 둔다.

1) coil群을 무한히 반복되어 있다고 보고 端効果는 무시한다.

2) 高壓과 低壓卷線은 같은 반경으로 鐵心으로부터 같은 거리에 있다고 본다.

3) 曲率은 무시하고 導體들은 대단히 큰 帶環으로 본다.

4) 高壓과 低壓측의 A.T.은 같은 것으로 본다.

이러한 가정하에 한 coil群을 그림 2와 같이 model化시키고 全空間은 鐵心을 기준으로 방사상의 4개 영역으로 나누어 생각한다. 즉,

영역 Ⅰ : 鐵心의 안쪽

영역 Ⅱ : 鐵心과 卷線 사이의 空間

영역 Ⅲ : 卷線이 차지하는 부분

영역 Ⅳ : 卷線外側 공간

와 같이 구분한다.

Field解析을 위한 좌표는 그림 2에서와 같이 x는 방사상의 바깥쪽으로 y는 鐵心軸의 방향으로 정하며, i_1, i_2는 高壓과 低壓側電流密度의 分布를 나타낸 것이다.

지금 y軸방향에 분포된 電流를 Fourier급수로 표시하면

$$i_z=\sum_1^\infty\frac{2}{n\pi}\left(i_1\sin\frac{nKa_1}{2}-i_2\cos n\pi\sin\frac{nKa_2}{2}\right)\cos nKy$$

$$=\sum_1^\infty\alpha_n\cos nKy \tag{5}$$

여기에서 $K=\frac{2\pi}{l}$이고 n은 空間 harmonics의 次數이다.

Vector potential을 구하기 위하여 Poisson과 Laplace 方程式을 引用하면 Vector potential을 無次元으로 할 때 다음과 같은 일반방정식이 얻어진다.

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}=-\mu_0\sum_1^\infty \alpha_n \cos nky \cdots \langle \text{영역 Ⅲ} \rangle \quad (6)$$

$$=0 \cdots\cdots\cdots \langle \text{영역 Ⅰ, Ⅱ, Ⅳ} \rangle$$

여기에서 R의 일반해는 $R=R_n(x)\cos nky$라 놓을 수 있고 $R_n(x)$는 x만의 함수이므로 이것을 式 (6)에 대입하여 같은 harmonics의 계수를 같게 놓으면

$$\frac{d^2R_n(x)}{dx^2}-n^2k^2R_n(x)=-\mu_0\alpha_n, \quad \frac{d^2R_n(x)}{dx^2}=0$$

위의 방정식을 풀어서 4개 영역에 대한 해는

$$\begin{aligned} R_{\text{I}}&=A_o+A_o'x+\Sigma(A_ne^{nkx}+A_n'e^{-nkx})\cos nky \\ R_{\text{II}}&=B_0+B_0'x+\Sigma(B_ne^{nkx}+C_ne^{-nkx})\cos nky \\ R_{\text{III}}&=E_0+E_0'x+\Sigma(E_ne^{nkx}+F_ne^{-nkx})\cos nky \\ R_{\text{IV}}&=D_0+D_0'x+\Sigma(D_n'e^{nkx}+D_ne^{-nkx})\cos nky \end{aligned} \quad (7)$$

式 (7)의 積分常數들은 다음과 같은 境界條件들로부터 구하여진다.

우선 $H_x=\frac{\partial R}{\partial y}$, $H_y=-\frac{\partial R}{x\partial}$ ($x=\pm\infty$에서 無視됨)

$$\therefore\ A_0'=0,\ A_n'=0,\ D_0'=0,\ D_n'=0$$

磁界의세기 H의 접선성분이 두 영역의 경계에서 조건$\left(\frac{\partial R_{\text{I}}}{\partial x}=\frac{\partial R_{\text{II}}}{\partial x}\ 等\right)$으로부터

$$\begin{aligned} &B_0'=0,\ A_n=B_n-C_n,\ E_0'=0 \\ &B_ne^{knb}-C_ne^{-knb}=E_ne^{knb}-F_ne^{-knb} \\ &-D_ne^{-knd}=E_ne^{knd}-F_ne^{-knd} \end{aligned} \quad (8)$$

또한 두 영역의 경계에서 磁束密度의 法線성분이 같다는 조건$\left(\mu_1\frac{\partial R_{\text{I}}}{\partial y}=\mu_{\text{II}}\frac{\partial R_{\text{II}}}{\partial y}\ 等\right)$으로부터

$$\begin{aligned} &\mu A_n=B_n+C_o \\ &B_ne^{knb}+C_ne^{-knb}=E_ne^{knb}+F_ne^{-knb}+\frac{\mu_0\alpha_n}{n^2k^2} \\ &D_ne^{-knd}=E_ne^{knd}+F_ne^{-knd}+\frac{\mu_0\alpha_n}{n^2k^2} \end{aligned} \quad (9)$$

끝으로 두 영역의 경계에서 양측외부 총 磁束은 같다는 조건($\mu R_{\text{I}}=R_{\text{II}}$ 等)으로부터

$$\mu A_0=B_0,\ B_0=E_0,\ E_0=D_0 \quad (10)$$

따라서 式 (8), (9), (10)의 연립방정식들을 풀고 $C=d-b$를 대입하여 정리하면,

$$\begin{aligned} &A_0=B_0=E_0=D_0=0 \\ &A_n=\frac{1}{1+\mu}\cdot\frac{\mu_0\alpha_n}{n^2k^2}e^{-nkb}(1-e^{-nkb}) \\ &C_n=\frac{\mu-1}{\mu+1}\cdot\frac{\mu_0\alpha_n}{2n^2k^2}e^{-nkb}(1-e^{-nkc}) \\ &D_n=\frac{\mu_0\alpha_n}{2n^2k^2}e^{nkd}\left[(1-e^{-nkc})\left(1+\frac{\mu-1}{\mu+1}e^{-nk(b+d)}\right)\right] \\ &E_n=-\frac{\mu_0\alpha_n}{2n^2k^2}e^{-nkd} \\ &F_n=-\frac{\mu_0\alpha_n}{2n^2k^2}e^{nkb}\left[1-\frac{\mu-1}{\mu+1}e^{-2nkb}(1-e^{nkc})\right] \end{aligned} \quad (11)$$

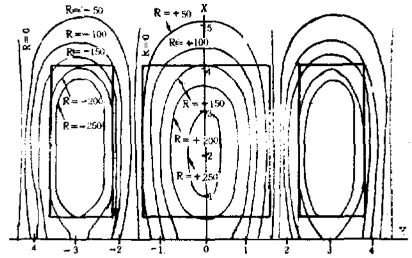

그림 3

와 같이 積分常數가 구해진다.

따라서 각영역의 vector potential은 이상에서 구한 積分常數와 式 (7)에 의하여 결정되고 式 (7)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R_{\text{I}}&=\sum_1^\infty A_ne^{nkx}\cos nky \\ R_{\text{II}}&=\sum_1^\infty(B_ne^{nkx}+C_ne^{-nkx})\cos nky \\ R_{\text{III}}&=\sum_1^\infty\left(E_ne^{nkx}+F_ne^{-nkx}+\frac{\mu_0\alpha_n}{n^2k^2}\right)\cos nky \\ R_{\text{IV}}&=\sum_1^\infty D_ne^{-nkx}\cos nky \end{aligned} \quad (12)$$

위의 式 (11)과 (12)로부터 Field의 특성이 밝혀진다.

지금 R에 일정한 값을 정해주면 R은 constant로 볼 수 있고 $dR=0$가 된다. 그런데

$$dR=\frac{\partial R}{\partial x}dx+\frac{\partial R}{\partial y}dy=-H_ydx+H_xdy$$

이므로 $\quad -H_ydx+H_xdy=0$

와 같은 식이 成立하고 여기에서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{H_y}{H_x}$$

의 관계가 성립하며 이는 磁力線의 接線기울기가 된다.

따라서 식 (12)의 처음 두 harmonics項만으로서 圖示하데는 충분하고 R曲線群이 x, y變數로서 그려지게 된다. (그림 3 參考)

4. 電機子電流에 의한 Field

卷線을 交互配置하여 성층시킨 變壓器에서는 Field를 몇 개의 영열으로 나누어서 Rogowski方法에 의하여 Vector Potential를 구하는데, 電流가 흐르는 영역과 없는 영역에 대하여 Poisson과 Laplace方程式을 적용하고, 磁束密度의 法線성분의 연속성과 磁界의 接線성분이 경계면에서 동일하다는 조건 및 無限遠에서의 磁界를 무시하고 경계면에서의 流出入磁束이 동일하다는 것 등의 境界條件을 들어 積分常數를 결정하였다.

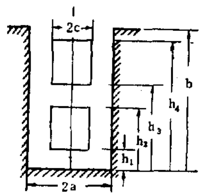

그림 4

그러나, 鐵心슬롯내 導體電流에 의한 Field해석을 하는 경우에는 위에서와 같은 Rogowski方法은 無力하다. 이러한 경우에 강력하고 간편한 해석방법의 하나로 Edoward Roth 氏에 의한 方法을 들 수 있고, 이것은 영역구분을 하지 않고 全 Field에 만족될 수 있는 Vector Potential을 한 개의 2重 Fourier級數로 나타내는 方法이다. 이 Roth方法의 한 예로 그림 4와 같은 한 슬롯내에 한 導體쌍이 들어 있는 경우를 생각한다. 이 때 導體電流에 의한 Vector Potential을 구하기 위하여 鐵心의 透磁率을 無限大라 보고 磁束은 슬롯表面에서 直角으로 지난다고 가정한다. 이 때 導體의 均等電流密度를 σ라 하고 그림 4와 같이 座標軸과 치수를 정해줄 때 Vector Potential에 관한 方程式은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}=\mu_0\sigma \text{ 〈導體內에서〉} \qquad (13)$$
$$=0 \text{ 〈슬롯內의 導體以外의 부분〉}$$

이 경우에 있어서 경계조건으로 생각할 수 있는 것은 다음의 네 가지를 들 수 있다. 즉,

$B_y=-\frac{\partial R}{\partial x}=0\cdots\cdots x=0$에서 (대칭성에 의하여)

$B_x=\frac{\partial R}{\partial y}=0\cdots\cdots y=0$에서 (鐵心面에 수직으로 진행)

$B_y=-\frac{\partial R}{\partial x}=0\cdots\cdots x=a$에서 (鐵心面에 수직으로 진행)

$R=0\cdots\cdots y=b$에서 ($y=b$에서 磁束이 슬롯표면에 수직으로 통과)

지금 Vector Potential R의 解를 2重 Fourier級數形으로 표시하면

$$R=\sum_r\sum_s A_{rs}\cos\alpha_r x\cos\beta_s y \qquad (14)$$

와 같이 놓을 수 있고,

式 (14)는 경계조건 첫번째와 두번째의 조건을 만족하며 세번째 경계조건은 $\alpha_r=\frac{r\pi}{a}$에 의하여 만족하고 마지막 경계조건은 $\beta_s=\frac{(2s+1)}{2b}\pi$에 의하여 만족된다.

그러므로 $R(x.y)$는

$$R=\sum_0^\infty r\sum_0^\infty sA_{rs}\cos\frac{r\pi}{a}x\cos\frac{(2s+1)}{2b}\pi y \qquad (15)$$

와 같이 된다.

여기에서 A_{rs}를 결정하기 위하여 式 (15)를 式 (13)에 대입하면

$$\sum_0^\infty r\sum_0^\infty s(\alpha_r{}^2+\beta_s{}^2)A_{rs}\cos\alpha_r x\cos\beta_s y=\mu_0\sigma \qquad (16)$$
$$=0$$

와 같이 되고 式 (16)의 양변에 $\cos\alpha_r x\cos\beta_s y$를 乘하고 슬롯全體에 대하여 積分하면

$$(\alpha_{2}{}^{r}+\beta_{2s})A_{rs}\int_0^a\cos^2\alpha_r x dx\int_0^b\cos^2\beta_s y dy$$
$$=\mu_0\sigma\left[\int_0^c\cos\alpha_r x dx\cdot\int_{h1}^{h2}\cos\beta_s y dy+\int_0^c\cos\alpha_r x dx\cdot\int_{h3}^{h4}\cos\beta_s y dy\right]$$

이 式을 정리하여 A_{rs}에 관하여 풀면

$$A_{rs}=\frac{4\mu_0\sigma}{ab}\cdot\frac{\sin\alpha_r c}{\alpha_r\beta_s(\alpha_{2r}+{}_{2s})}(\sin\beta_s h_2-\sin\beta_s h_1+\sin\beta_s h_4-\sin\beta_s h_3) \qquad (17)$$

고로 式 (17)을 式 (15)에 대입하면 구하고자 하는 Vecter Potential을 얻을 수 있다.

5. 結　言

以上에서 Field의 특성을 나타내는 Vector Potential의 誘導과정과 그 결과에 대하여 간략하나마 살펴 보았다.

어떻한 Field의 Vector Potential을 알게 되면 磁束分布 특성이 규명되고 따라서 磁束密度, 電流密度가 결정되며 reactance 및 resistance와 渦流損 등의 계산이 가능하게 된다. 또한 Rogowski法과 Roth法의 소개 해설과정에 있어서 境界條件의 取扱方法들은 電磁場理論에 의한 電氣機器特性解析과정에서 그 활용범위가 대단히 넓은 것으로서 초보자의 경우에는 참고가 될 것으로 생각된다.