

<講 座>

有限要素法の 基本理論과 應用 (I)

金 恒 旭\*

1. 緒 論

공학문제를 다루는 일반적인 경로는 다음의 네개 단계로 나눌 수 있다. 첫째단계는 실제문제를 대체할 수 있는 물리학적 모형을 만드는 일이며 이 모형은 실제문제의 복잡성을 완화하기 위하여 여러가지 가정을 설정함으로써 얻어지는 것이다. 물론 위에서 말한 가정은 순리에 맞는 것이어야 하며 맹목적인 것이어서는 안된다. 둘째 단계는 위에서 설정한 모형에 물리학적 법칙을 적용하여 여러 물리량들 사이에 성립해야 하는 관계식 즉 통제방정식(일반적으로 편미방입)을 도출하는 일이다. 이 통제방정식도 때로는 다루기 쉽게 하기 위하여 여러가지 가정을 적용한다. 셋째 단계는 위에서 도출한 통제방정식의 해를 구하는 일이며 이것은 수학적 방법으로 이루어진다. 넷째 단계는 위에서 구한 방정식의 해를 공학적으로 해석하고 실측결과와 비교하는 일이다. 이때 비교한 결과가 좋으면 통제방정식을 고정시키고 해당 계를 해석하는데의 기본식으로 하는 것이고 만일 비교결과가 나쁘면 가정을 수정하여 첫째 단계 부터 다시 시작한다.

유한요소법은 위의 셋째 단계 즉 통제 방정식의 해를 구할 때에 등장하는 한 방법이다. 일반적으로 편미분방정식인 통제방정식은 미방리론으로 정확히 풀리는 경우가 드물다. 많은 경우 해석적인 근사해법으로 필요정확도의 해를 구할 수 있다. 그러나 문제의 영역 즉 함수가 정의되는 영역이 기하학적으로 불규칙할 때는 경계 조건 적용이 극히 어려워지고 따라서 해석학적인 방법은 무력해지고 만다. 이 난점을 극복하는 것이 수치해석법이다. 구조역학 분야에 있어서는 구조물을 형성하는 부재의 기하학적 모양이 불규칙하기 때문에 해석적인 방법으로는 해를 구하지 못하는 것이 대부분의 경우이며 따라서 수치해석법에 의존하게 되는 것이다. 오늘날 사용되는 수치해석법 중 대표적인 것이 차분법(Finite Difference Method)과 유한요소법(Finite

Element Method)이다. 차분법은 오랜 옛날부터 사용되어 온 방법이며 이것은 계의 통제방정식을 차분방정식으로 변환한 다음 지정된 몇 개의 함수치에 대하여 1차연립방정식을 세운다. 이 연립방정식이 확고한 해를 갖도록 하기 위해서는 함수가 정의된 영역 밖에 있어서의 함수값을 추정해야 하며 이것이 차분법의 결정적 결함이다. 위의 결함을 갖고 있으면서도 차분법은 많은 문제를 처리하여 왔었다. 유한요소법이 개발되어 그 능력이 차분법 보다 훨씬 우월하다는 것이 인정된 오늘에 와서는 차분법이 실용면에서 퇴색하고 말았다.

유한요소법은 1940년 대에 처음으로 구조역학 분야에 등장한 수치해석 방법이다. 스위스의 수학자 베르누의(Bermoulli)가 개발한 “일차연립방정식의 매트릭스해법”과 전자 계산기의 고성능 계산능력을 바탕으로 하는 이 방법은 곧 그 위력이 인정되어 1950년대의 후반으로부터 1960년대에 걸쳐서 눈부신 발전을 이루었으며 어떤 구조역학문제도 쉽게 다룰 수 있게 되었다. 차분법이 출발점을 미분방정식에 두는데 반하여 유한요소법은 그 출발점을 한단계 앞인 에너지 원리에 두고 있다. 유한요소법은 해석하고자 하는 구조물을 유한요소라고 불리우는 재료조각의 결합체로 대체한 다음, 계의 에너지에 대하여 물리학적 원리를 적용함으로써 계의 통제방정식을 매트릭스 형식으로 도출한다.

유한요소를 선정함에 따라서 어떠한 구조물도 기하학적으로 불만 없는 결합체로 대체 할 수 있기 때문에 경계조건 적용도 별 문제 없다는 것이 장점의 하나이다.

근래 많이 검토된 바에 의하면 같은 문제를 같은 정확도로 푸는데 유한요소 법이 소모하는 전자계산기 시간은 차분법의 10분의 1 정도라고 한다. 오늘날에는 구조역학 문제의 수치해석은 유한요소법의 독무대이며 차분법은 완전히 퇴색했다고 볼 수 있다. 적은 보와 설계에 이르기 까지 구조역학 부분은 유한요소법이 담당하고 있다.

1960년대에는 새로운 유한요소가 개발 되었으며 간단한 트리스 유한요소로부터 복잡한 박판 유한요소까지

\* 正會員, 韓國航空大學

알을 다루어 학계에 소개되었고 곧 산업계에 이용 되었다. 1970년대에 들어와서는 유한요소의 효과적인 사용법과 기하학적으로 개발된 유한요소의 개량이 주된 연구 대상이 되어있다. 유한요소의 기하학과 자유도와 그리고 내부에 있어서의 변위 함수를 어떻게 선정함으로써 결합체 상호간의 물리학적 모순을 최소화 할 수 있을 것인가 하는 것이 뚜렷한 연구 대상이 되었다.

유한요소법이 처음 연구되기 시작할 때는 변위를 자 변수로 하는 매트릭스 변위법(Matrix Displacement Method)과 외력을 자 변수로 하는 매트릭스 힘 방법(Matrix Force Method)의 두 길로 발전되어 갔으나 경계 조건의 적용과 매트릭스 분할(Partitioning)에 있어서 후자의 방법이 많은 번거로움을 갖는다는 것이 인정되어 오늘날은 전자의 방법만이 사용되는 형편이다. 본해설에서는 유한요소의 기본성질을 모두 가지면서도 제일 간단한 보유한요소(Beam Finite Element)를 예로 다루며 유한 요소법의 기본이론과 응용방법을 설명코져 한다.

2. 보-有限要素(Beam Finite Element)

유한요소는 재료의 조각으로서 이의 결합체가 연구대상 구조물을 큰 꾸리 없이 대체할 수 있어야 한다. 유한요소는 연구대상 구조물이 정해진 다음 그에 알맞게 선정되어야 하는 것이다. 각 유한요소는 다음의 4개 사항이 성해짐으로서 그 성격이 지정되는 것이며 그 4개 사항 중 하나가 달라져도 별개의 유한요소로 인정 되는 것이다. 4개 사항이란 ㉠기하학적 모양으로서 판이라든지 봉이라든지 또는 같은 판이라든지 3각형이라든지 부채꼴이라든지 하는 모양을 말하며 이것은 연구 대상 구조물이 정해짐으로서 적이 선정할 수 있는 것이다. ㉡절점의 자유도(Nodal Degrees of Freedom)로서 이는 많을수록 답이 정확하기는 하지만 계산기 시간이 자유도의 3승에 비례하여 증가 하기 때문에 최소 필요량을 부여하는 것이 일반적인 방법이다. ㉢유한요소 내부의 변위 함수로서 연구 대상문제의 성격에 따라 복잡하게 정해야 할때도 있고 또 간단하게 정할 때도 있다. ㉣변형도-변위관계(Strain-Displacement Relationship)이며 이것도 구하는 답의 성격에 따라 근사적으로 잡을 때도 있다. 이하 보-유한 요소를 예로 들어 위 4개 사항을 정한다.

2-1. 기하학적 모양과 절점의 자유도

그림 1과 같이 보-유한 요소의 기하학적 모양과 두

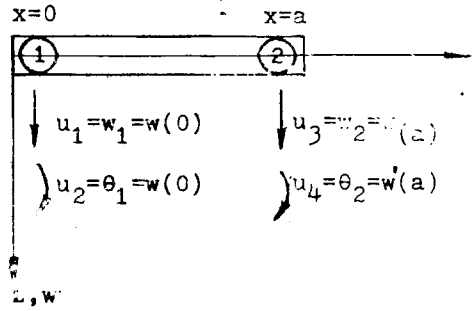


그림 1. 보-유한 요소

절점의 자유도가 정해졌다. 유한요소는 축이 직선인 봉이며 양 끝에 하나씩의 절점(Node)을 갖는다. 다른 유한요소와의 연결이든지 또는 외력의 작용은 이 절점에서만이 이루어진다. 각 절점은 처짐  $w$ 와 회전각  $\theta$ 의 두개 자유도를 가지며 따라서 이 유한요소는 4개의 자유도를 갖는다. 이 4개의 자유도를 그림과 같이  $U_1, U_2, U_3, U_4$ 로 각각 표시하였다.

$$\begin{aligned} [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4] &= [w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2] \\ &= [w(0) \ w'(0) \ w(a) \ w'(a)] \end{aligned} \quad (1)$$

2-2. 내부 변위함수

내부 변위함수는 유한요소 내부 각점에 있어서의 변위를 표시하는 함수  $w(x)$ 를 말하며 어떤 형태로든지 지정할 수 있지만 물리학적인 면을 잘 고려 하면서 적이 선정해야 좋은 답을 얻을 수 있다. 적절한 변위함수의 선정은 많은 경험을 요하지만 일차적으로 유한요소 양단에 있어서의 경계조건을 만족하면 허용될 수 있다고 봐도 좋다. 보-유한요소는 4개의 경계값  $U_1, U_2, U_3, U_4$ 가 지정되어 있기 때문에 다음과 같은  $x$ 의 3차식으로 놓고 그 계수를 적이 정함으로서 위 4개의 경계값이 만족될 수 있다.

$$\begin{aligned} w(x) &= C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 \\ &= [1 \ x \ x^2 \ x^3] \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = [f] \{C\} \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)의 양변을  $x$ 에 관하여 미분해서 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned} w'(x) &= C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 \\ &= [0 \ 1 \ 2x \ 3x^2] \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = [f'] \{C\} \end{aligned} \quad (2')$$

식 (2) 및 (2')에 식 (1)의 경계조건을 적용한다. 첫째로  $w(0)=U_1$ 을 적용하는데 식 (2)에  $x=0$ 를 대입해서 다음과 같이 된다. 즉

$$u_1=w(0)=C_0=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

둘째로  $w'(0)=u_2$ 를 적용함에 있어서는 식 (x')에  $x=0$ 를 대입하여 다음과 같이 된다. 즉

$$w'(0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad (b)$$

같은 방법으로 나머지 두 개의 경계조건  $U_3=w(a)$ ,  $U_4=w'(a)$ 를 적용한 다음 얻어지는 식 4개를 한개의 매트릭스 식으로 묶으면 다음과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix}$$

또는 기호로  $\{u\}=[A]\{C\}$

식 (3)은 식 (2)가 식 (1)의 경계조건을 만족시키기 위해서 계수  $C_0, C_1, C_2, C_3$ 가 취한 값을 정해 주는 것이다. 식 (3)에서  $\{C\}=[A]^{-1}\{u\}$ 이고 이것을 식 (1)에 대입해서 다음 식을 얻는다.

$$w(x)=\{f\}[A]^{-1}\{u\} \quad (4)$$

식 (4)를 양성적으로 표시하면 다음과 같이 된다.

$$w(x)=\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (4')$$

식 (4')를 계산한 다음과 같이 정돈할 수 있다.

$$w(x)=\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \{u\}\{X\} \quad (5)$$

따라서  $w(x)$ 의 시간에 대한 미분계수  $\dot{w}(x)$ 와  $x$ 에 대한 2차미분계수  $w_{xx}(w)$ 는 각각 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{w}(x) &= \{\dot{u}\}\{X\} \\ w_{xx}(x) &= \{u\}\{X''\} \end{aligned} \quad (5')$$

식 (5)에 있는 4개의 3차식  $X_1, X_2, X_3, X_4$ 는 이를 한쌍으로 하여 헤미시안 1차 다항식 (First Order Hermitian Polynomials)이라 부른다. Pestel에 의하여 처음 제창된 이 다항식은 독특한 유도방법을 갖지만 어쨌든 그 결과는 같으며 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\xi = \frac{x}{a}$$

보-유한 요소의 내부 변위함수는 식 (5), (6)으로 주어졌으며  $\xi = \frac{x}{a}$ 를 도입한 것은 적분영역을 (0, a)로 부터 (0, 1)로 변환시키기 위한 것이다.

### 2-3. 변형도-변위관계식

잘 알려져 있는 바와 같이 힘을 받는 보의 단면은 이그러지지 않고 중립축 둘레에 회전만 한다는 가정하에서는 중립축으로부터  $z$ 인 거리에 있는 섬유 변형도  $\epsilon$ 은 다음과 같다.

$$\epsilon = -z \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = -z w_{xx}(x) \quad (7)$$

여기에서  $w(x)$ 는 보의 처짐을 표시하고 첨자  $x$ 는 편미분 자변수를 표시한다. 식 (7)은 간단히 다음과 같이 유도할 수도 있다. 즉

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{1}{E} \cdot \frac{Mz}{I} = -\frac{z}{EI} (-EI w_{xx}(x)) = -z w_{xx}(x)$$

이상으로 보-유한 요소는 완전히 지정되었다. 다음 장에서는 이 유한요소를 사용하여 계의 통제방정식을 유도 한다.

### 3. 매트릭스 統制方程式

매트릭스 통제방정식을 유도함에 있어서는 여러가지 방법이 있겠으나 여기에서는 라그랑제의 방법을 이용한다. 즉 계의 운동에너지  $T$ , 탄성에너지  $U$  및 외력에 의한 포텐셜에너지  $V$ 를 각각 자유로  $\{u\}$ 의 함수를 표현한 다음 라그랑제식에 대입한다.

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right] + \frac{\partial}{\partial u} [U + V] = 0 \quad (8)$$

#### 3-1. 운동에너지 T

보 각부분의 회전운동에너지를 무시하고 처짐운동에 의한 운동에너지만을 고려하면 다음과 같이 된다.

$$T = \frac{\rho}{2} \int_V \dot{w}^2(x) dV = \frac{m}{2} \int_0^a \dot{w}^2(x) dx \quad (a)$$

여기에서  $\rho$ 는 재료 단위체적당의 질량이고  $m$ 은 보 단위 길이당의 질량이다.  $w(x)$ 는 물론 보의 처짐이고  $\dot{w}(x)$ 는 처짐  $w(x)$ 의 시간에 대한 변화율 즉 속도이다. 식 (5')의  $\dot{w}(x) = \{\dot{u}\}\{x\}$ 를 (a)식에 대입하여 다음과 같이 변형한다.

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \int_0^a (\{\dot{u}\}\{x\})^2 dx = \frac{m}{2} \int_0^a \{\dot{u}\}\{x\}\{\dot{u}\}\{x\} dx \\ &= \frac{m}{2} \{\dot{u}\} \left( \int_0^a [E] dx \right) \{u\} \end{aligned}$$

$$\text{즉} \quad T = \frac{m}{2} \{\dot{u}\}[M]\{u\} \quad (9)$$

여기에서

$$[M] = \int_0^a [E] dx, [E] = \{X\} [X]$$

$$= \begin{pmatrix} X_1 X_1 & X_1 X_2 & X_1 X_3 & X_1 X_4 \\ X_2 X_1 & X_2 X_2 & X_2 X_3 & X_2 X_4 \\ X_3 X_1 & X_3 X_2 & X_3 X_3 & X_3 X_4 \\ X_4 X_1 & X_4 X_2 & X_4 X_3 & X_4 X_4 \end{pmatrix} \quad (9)$$

그리고  $[X] = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4]$ 는 식 (6)에 주어졌고  $[u] = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]$  식 (1)에 주어져 있다.

3-2. 탄성에너지 U

전단 탄성 에너지를 무시하고 휨에 의한 에너지 만을 취하면 다음과 같이 된다.

$$U = \int_V \frac{\sigma \epsilon}{2} dV = \frac{E}{2} \int_V \epsilon^2 dV \quad (a)$$

식 (7)의  $\epsilon$  을 대입하여

$$U = \frac{E}{2} \int_V [-z w_{xx}(x)]^2 dV \quad (b)$$

식 (5')의  $w_{xx}(x) = [u] \{X''\}$ 를 (b)식에 대입하여

$$U = \frac{E}{2} \int_V (-Z [u] \{X''\})^2 dV$$

$$U = \frac{E}{2} \int_A z^2 dA \int_0^a ([u] \{X''\})^2 dx$$

$$= \frac{EI}{2} \int_0^a [u] \{X''\} [X''] \{u\} dx = \frac{EI}{2} [u] \left( \int_0^a [A] dx \right) \{u\}$$

즉 
$$U = \frac{EI}{2} [u] [K] \{u\} \quad (10)$$

여기에서  $[K] = \int_0^a [A] dx, [A] = \{X''\} [X'']$

$$= \begin{pmatrix} X_1'' X_1'' & X_1'' X_2'' & X_1'' X_3'' & X_1'' X_4'' \\ X_2'' X_1'' & X_2'' X_2'' & X_2'' X_3'' & X_2'' X_4'' \\ X_3'' X_1'' & X_3'' X_2'' & X_3'' X_3'' & X_3'' X_4'' \\ X_4'' X_1'' & X_4'' X_2'' & X_4'' X_3'' & X_4'' X_4'' \end{pmatrix} \quad (10')$$

그리고  $X_i''$ 는  $X_i$ 의  $x$ 에 대한 2차 미분계수를 말하고  $[X] = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4]$ 는 식 (6)에,  $[U] = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4]$ 는 식 (1)에 주어졌다.

3-3. 외력에 의한 포텐셜에너지

절점의 자유도에 대응하는 외력을  $[p] = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4]$ 라 할 때 외력이 하는 일의 총량  $W$ 는 다음과 같이 된다.

$$W = (p_1 du_1 + p_2 du_2 + p_3 du_3 + p_4 du_4) = \int [p] d[u]$$

따라서 포텐셜에너지의 증가  $V$ 는

$$V = -w = - \int [p] d[u] \quad (11)$$

3-4. 통제방정식의 유도

식 (9), (10), (11)의  $T, U, V$ 를 식 (8)에 대입하면

다음과 같이 된다.

$$-\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \left( \frac{m}{2} [\dot{u}] [M] \{\dot{u}\} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{EI}{2} [u] [K] \{u\} - \int [p] d[u] \right] = 0 \quad (a)$$

미분을 수행하면

$$-\frac{d}{dt} (m [M] \{\dot{u}\}) + EI [K] \{u\} - [p] = 0 \quad (b)$$

위의 (a)식에서 (b)식으로 오는 미분수행에 있어서는 다음과 같은 수학적 성질을 이용했음을 부연한다. 즉

$$\frac{\partial}{\partial \{x\}} [ [X] [A] \{x\} ] = [A] \{X\} + ([X] [A])^T$$

$$= [A] \{x\} + [A]^T \{x\}$$

만일  $[A]$ 가 대칭이면  $[A]^T = [A]$ 되며 따라서

$$\frac{\partial}{\partial \{x\}} [ [x] [A] \{X\} ] = 2 [A] \{X\}$$

식 (12)의 결과는 실제계산으로 확인할 수 있다.

시간에 대한 미분을 수행하면

$$m [M] \{\ddot{u}\} + EI [K] \{u\} = [p] \quad (c)$$

각 절점이 조화운동한다는 점을 고려해서

$$\{u\} = \{H\} e^{i\omega t} \text{라 놓고 따라서}$$

$\{\ddot{u}\} = -\omega^2 \{H\} e^{i\omega t} = -\omega^2 \{u\}$ 로 된다. 이것은 위의 식에 대입해서 다음의 식을 얻는다.

$$(-m\omega^2 [M] + EI [K]) \{u\} = [p] \quad (12)$$

식 (12)가 계의 매트릭스 통제방정식이다. 여기서  $m$ 은 보 단위 길이 당의 질량이고  $\{u\}$ 는 식 (1)에,  $[M]$ 은 식 (9)에,  $[K]$ 는 식 (10)에 그리고  $[p]$ 는 식 (11)에 주어져 있다. 식 (12)는 유한요소 하나일 때의 통제방정식이고 여러개의 유한요소를 결합해서 구조물을 대체했을 때는 식 (12)를 여러 개 중첩하여야 한다.

3-5. 통제방정식의 이용

식 (12)는 힘의 평형식이다. 왼편의 첫항이 관성력, 둘째항이 탄성력 그리고 오른편이 외력이다. 이 식으로 다음과 같은 문제를 다룰 수 있다.

자유진동문제 : 자유진동문제에 있어서는 외력이 작용하지 않으므로 식 (12)에서  $[p] = \{0\}$ 되고 계의 관성력과 탄성력이 평형을 이룬다. 따라서 식 (12)는 다음과 같이 변형된다.

$$(-m\omega^2 [M] + EI [K]) \{u\} = \{0\} \quad (13')$$

$$([K]^{-1} [M] - \frac{EI}{m\omega^2} [I]) \{u\} = \{0\}$$

즉 
$$([D] - \lambda [I]) \{u\} = \{0\} \quad (13)$$

여기서  $[D] = [K]^{-1} [M]$ ,  $\lambda = \frac{EI}{m\omega^2}$ 이다. 식 (13)은 아

이제벨류 문제 (Eigen Value Problem)의 표준형이며 아이젠벨류 (Eigen Value)  $\lambda$ 를 구함으로써 계의 자유진동수  $w$ 가 구해지고  $\lambda$ 에 대응하는 아이젠벡터 (Eigen Vector)  $\{u\}$ 로서 진동모양 (Vibration Mode)가 주어진다. 식 (13)을 푸는 방법은 여러가지이나 가장 일반적인 방법이 반복법 (Power Method)으로서 이는 임의의 벡터  $\{u_0\}$ 를 택하여  $\{u_{i+1}\}=[D]\{u_i\}$ 를 계속 반복함으로서  $\{u_{i+1}\}$ 의 길이로서  $\lambda$ ,  $\{u_{i+1}\}$ 로서 진동모양을 구하는 방법이다. 매트릭스  $[D]$ 의 크기가 작을 때는 식 (13)의 왼편계수 행렬 값을 0으로 놓고  $\lambda$ 를 구하는 것이 편하다.

정역학적인 문제 : 이때는 진동 각 속도  $w$ 가 0이고 따라서 식 (13)의 관성력이 소멸된다. 따라서 탄성력과 외력이 평형을 이루며 식 (13)은 다음과 같이 변형된다.

$$\{p\}=EI[K]\{u\}$$

$$\text{또는 } \{u\}=\frac{1}{EI}[K]^{-1}\{p\} \quad (14)$$

식 (14)의 두개 식은 동치이다. 다만  $[K]$ 의 특이성 (Singularity)를 제거하기 위하여 경계조건을 적용한 다음에 둘째 식은 얻을 수 있음에 유의하여야 한다. 식 (14)로서  $\{u\}$ 가 구하여지면 보의 처짐  $w(x)$ 는 식 (5),  $w(x)=[u]\{x\}$ 로서 구해진다. 또 임의의 점에 있어서의 변형도  $\delta$ 은 식 (7);  $\epsilon=-zW_{xx}(x)=-z[u]\{X''\}$ 로서 구할 수 있고 따라서 임의점에 있어서 응력  $\sigma$ 는  $\sigma=E\epsilon$ 으로 주어진다.

#### 4. 數值計算例

본장에서는 실제 문제를 풀어 보인다. 식 (9)의  $[M]$ 과 식 (10')의  $[K]$ 를 계산하면 다음과 같이 된다.

$$[K]=\begin{pmatrix} 12a^{-3} & 6a^{-2} & -12a^{-3} & 6a^{-2} \\ 6a^{-2} & 4a^{-1} & -6a^{-2} & 2a^{-1} \\ -12a^{-3} & -6a^{-2} & 12a^{-3} & -6a^{-2} \\ 6a^{-2} & 2a^{-1} & -6a^{-2} & 4a^{-1} \end{pmatrix},$$

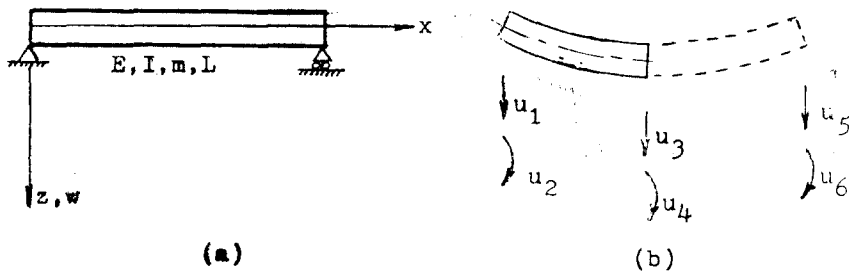


그림 2. 단 순 지 지 보

(53)

$$[M]=\frac{1}{420}\begin{pmatrix} 156a & 22a^2 & 54a & -13a^2 \\ 22a^2 & 4a^3 & 13a^2 & -3a^3 \\ 54a & 13a^2 & 156a & -22a^2 \\ -13a^2 & -3a^3 & -22a^2 & 4a^3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$[K]$  매트릭스의 둘째행, 세째열에 있는 요소  $K_{23}$ 을 예로서 계산해 보인다.

식 (10')에서

$$K_{23}=\int_0^a a_{23} dx = \int_0^a X_2'' X_3'' dx = a \int_0^1 X_2'' X_3'' d\xi$$

$$\text{식 (6)에서 } X_2=a(\xi-2\xi^2+\xi^3), X_3=3\xi^2-2\xi^3,$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } X_2'' &= \frac{d^2 X_2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{dX_2}{d\xi} \right] = \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{dX_2}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} \right] \frac{d\xi}{dx} \\ &= \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{dX_2}{d\xi} \cdot \frac{1}{a} \right] \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} \frac{d^2 X_2}{d\xi^2} \\ &= \frac{1}{a^2} \cdot a(-4+6\xi) = \frac{1}{a}(-4+6\xi) \end{aligned}$$

미찬가지로

$$X_3'' = \frac{1}{a^2}(6-12\xi)$$

따라서

$$\begin{aligned} K_{23} &= a \int_0^1 \frac{1}{a}(-4+6\xi) \frac{1}{a^2}(6-12\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^1 12(-2+3\xi)(1-2\xi) d\xi \\ &= \frac{12}{a^2} \left( -2 + \frac{7}{2} - \frac{6}{3} \right) = \frac{12}{a^2} \cdot \frac{-12+21-12}{6} \\ &= -6a^{-2} \end{aligned}$$

이 계산은 겉보기에 몹시 복잡하다. 그러나 잘 정돈해 놓으면 아주 쉬운 계산법을 적용할 수 있다. 식 (15)에 주어진  $[K]$ ,  $[M]$ 을 이용하여 단순지지보의 자유진동수 계산과 처짐계산을 다음에 보인다.

##### 4-1. 단순지지 보의 자유진동수

그림 (2-a)와 같은 단순지지 보를 택했으며  $E, I, m, L$ 은 각각 재료의 탄성계수, 보단면의 관성모멘트,

보 단위 길이당의 질량 및 보의 길이이다. 이 보를 그림 (2-b)와 같이 유한요소 2개의 결합체로 대체한다. 계산을 간단하게 하기 위하여 첫째진동모양의 대칭성을 고려하면 왼쪽 유한요소 하나만을 다룬다. 이 요소에 대하여 식 (13')는 다음과 같이 된다.

$$(-mw^2[M]+EI[K]) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

그림 (2)에서 보는 바와 같이 경계조건은  $u_1=0, u_4=0$ 이며 이것을 적용하고 매트릭스를 분할하면 다음과 같이 된다.

$$(-mw^2 \begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}) \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (b)$$

식 (15)의 값을 대입하면

$$\left( \frac{-mw^2}{42} \begin{bmatrix} 4a^3 & 13a^2 \\ 13a^2 & 155a \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 4a^{-1} & -6a^{-2} \\ -6a^{-2} & 12a^{-3} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

식 (13)의 꼴로 정돈하면

$$\left( \begin{bmatrix} 63 & 546a^{-1} \\ 138a & 351 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (d)$$

$$\text{여기서 } \lambda = \frac{252\gamma^2 EI}{ma^3 w^2} = \frac{16 \times 2520 EI}{mL^3 w^2} \quad (e)$$

식 (e)에서  $\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$  되기 위해서는 왼편 계수 매트릭스의 행렬식 값이 영이 되어야 한다. 즉

$$\begin{aligned} \text{이것을 풀어서 } & (\lambda-63)(\lambda-351)-38 \times 546=0 \quad (f) \\ & \begin{cases} \lambda_1=410.68 \\ \lambda_2=3.324 \end{cases} \quad (g) \end{aligned}$$

$\lambda_1$ 의 값을 식 (e)에 대입하면 첫째 자유진동 속도  $w_1$ 이 다음과 같이 구하여 진다.

$$w_1 = \frac{9.9}{L_2} \sqrt{EI/m} \quad (h)$$

$w_1$ 의 정확한 값은  $w_1 = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{EI/m}$  이니 식 (h)는 오차 0.4% 이하이다. 더 여러개의 유한요소를 사용하면 얼마든지 오차를 줄일 수 있다.

4-2. 단순지지 보의 처짐

그림 (2)의 보에 등분포하중  $q$ 가 작용할 때 중앙에 있어서 처짐을 구한다. 먼저의 예와 같이 왼쪽의 절반을 유한요소 하나로 다루며 식 (13)와 같은 식을 얻은 다음 경계조건  $u_1=0, u_4=0$ 를 적용하고 매트릭스식을 분할하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 4a^{-1} & -6a^{-2} \\ -6a^{-2} & 12a^{-3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

매트릭스를 뒤집어서

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{a^4}{12EI} \begin{bmatrix} 12a^{-3} & 6a^{-2} \\ 6a^{-2} & 4a^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

분포하중  $q$ 가 작용할 때의 하중  $\{q\}$ 를 결정하는 방법은 몇가지 있으나 다음과 같이 정하는 것이 제일 정확하다고 인정되어 있다. 즉 분포하중  $q$ 에 의한 가상일과 점하중  $\{p\}$ 에 의한 가상일이 같다는 조건을 적용한다.

$$\delta W = p_1 \delta u_1 + p_2 \delta u_2 + p_3 \delta u_3 + p_4 \delta u_4 = \int_0^a q \delta w(x) dx \quad (b)$$

식 (5)의  $w(x)$ 를 대입하여

$$\delta W = q \int_0^a (X_1 \delta u_1 + X_2 \delta u_2 + X_3 \delta u_3 + X_4 \delta u_4) dx \quad (c)$$

식 (6)의  $X_i$ 를 대입하고 적분을 수행하여

$$\begin{aligned} \delta W &= p_1 \delta u_1 + p_2 \delta u_2 + p_3 \delta u_3 + p_4 \delta u_4 \\ &= \frac{qa}{2} \delta u_1 + \frac{qa^2}{2} \delta u_2 + \frac{qa}{2} \delta u_3 + \frac{-qa^2}{12} \delta u_4 \quad (d) \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4] = \left[ \frac{qa}{2} \quad \frac{qa^2}{12} \quad \frac{qa}{2} \quad \frac{-qa^2}{12} \right] \quad (16)$$

식 (16)의  $p_2, p_3$ 를 위의 식 (a)에 대입해서

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{a^4}{12EI} \begin{bmatrix} 12a^{-3} & 6a^{-2} \\ 6a^{-2} & 4a^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{qa^2}{12} \\ \frac{qa}{2} \end{Bmatrix} \quad (e)$$

오른쪽 계산을 수행하고  $a = \frac{L}{2}$ 을 대입하여 다음과 같이 변위가 구해진다. 즉

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL^3/24EI \\ 5qL^4/384EI \end{Bmatrix} \quad (f)$$

이 답이 정확한 것은 재료역학책이 보여 준다.

5. 後 記

본 해설에서 보여 준 것은 유한요소법의 가장 기본적인 면 하나에 불과하다. 그러나 탄성안정문제 같이 또 다른 하나의 매트릭스가 등장하는 경우를 제외 하고는 어떤 경우든지 간에 본 해설에서 보여준 것과 같은 경위를 밟는다. 유한요소가 복잡해지고 매트릭스가 커지고 경계조건의 적용이 어려워지고 할 따름이다. 이 분야에 흥미를 갖는 초학자들을 위하여 좀 더 여러면을 해설할 기회 있기를 기대하면서 글을 맺는다.