Bull. Korean Math. Soc.
Vol. 12, No. 2, 1975

推移的 母集團에 對한 標本理論

鄭 英 鎭

序 論

1. 硏究의 目的

時間의 經過와 더불어 變動하는 母集團에 對하여 同一한 標識(集團의 標識)에 對한 標本調査를 定期的으로나 또는 不定期的으로 反復하는 일이 많다. 이 때 母集團이 推移的으로 變動하므로 調査를 實施할 때마다 標本抽出의 frame을 再作成하여야 한다. 그러나 母集團이 그다지 크지 않을 때에는 問題없지만, 母集團이 매우 클 때에는 每番 frame을 再作成하는 일은 번거롭고, 또 不經濟的이다. 그러므로 前調査時點에서 使用한 frame을 最大限度로 活用할 수 있는 方法이 아쉽게 된다. 이러한 問題에 對하여 論文[1]은 層別一段, 二段, 三段單純抽出(均等確率에 依한 抽出)에 의하여 調査하는 경우 前調査時點까지의 frame을 活用할 수 있는 標本理論의 誘導를 試圖하고 있다. 本論文에서는 이를 더욱 擴張 一般化하여, 各 段階에 있어서의 抽出單位의 크기가 均一하지 않고 또 最終段階의 抽出單位도 역시 크기가 均一하지 않는 集落으로 되어 있어서, 抽出單位가 고르지 않은데서 오는 標本誤差를, 그의 抽出確率을 調節함으로서 制御할 수 있도록 各 抽出單位가 서로 다르게 指定된 確率로 抽出되는 경우의 理論의 展開를 試圖하였다.

本理論은, 例컨대, 全國의 工業從業員의 職業病患者總數를 每年 定期的으로 標本調査할 때, 工業種別로 層別하고, 一次抽出單位로서 地域을, 二次抽出單位로서 工場을 取하는 경우 等에 利用할 수 있다.

〔註〕 本論文에서는 調査對象으로 잡은 統計集團에 對하여 最終段階의 標本抽出單位全體의 集合을 母集團이라고 한다.

2. 記 號

다음과 같이 記號를 定한다.

π_0 : 本理論適用直前의 調査時點에 있어서의 母集團(旣知)

$\pi_k(k=1,2,\cdots,q-1)$: 本理論適用第 k 時點에 있어서의 母集團(旣知)

π_q : 現調査時點(本理論適用第 q 時點)에 있어서의 母集團(未知)

라 하고

$$D_{q-1}=\bigcup_{k=0}^{q-1} \pi_k \text{ (既知)}$$

라 하면

$A_q=\pi_q \cap (D_{q-1})^c$: 第 q 時點에서 새로 追加作成할 frame(母集團)의 部分(旣知)

$B_q=D_{q-1} \cap \pi_q$: 第 $q-1$ 時點까지의 frame中 第 q 調査時點의 母集團에 殘留하는 部分(未知)

$C_q=D_{q-1} \cap (B_q)^c$: 第 $q-1$ 時點까지의 frame中 第 q 調査時點의 母集團에서 除去되는 部分(未知)

와 같이 나타낼 수 있으며, 分明히

$$\pi_q=A_q \cup B_q, \qquad D_{q-1}=B_q \cup C_q$$

이다.

$$A_q=\{\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots\cdots, \theta_M\}$$
$$B_q=\{w_1, w_2, \cdots\cdots\cdots, w_K\}$$
$$C_q=\{w_{K+1}, w_{K+2}, \cdots, w_N\}$$

〔但, θ_i $(i=1, 2, \cdots, M)$, w_j $(j=1, 2, \cdots\cdots, N)$ 은 最終段階의 抽出單位〕

라 하면, M, N은 旣知이고, K는 未知이다.

α를 調査의 標識(여기서는 量的標識)라 할때,

X를 A_q에서 定義되는 確率變數로서

$$X(\theta_i)=(\theta_i\text{에 있어서의 } \alpha\text{의 값의 合計})$$

Y를 D_{q-1}上에서 定義되는 確率變數로서

$$Y(w_i)=\begin{cases} w_i\text{에 있어서의 } \alpha\text{의 合計} & : w_i \in B_q \\ 0 & : w_i \in C_q \end{cases}$$

라 하면,

우리가 推定하고자 하는 것은 α의 값의 總合計 T, 卽

$$T=\sum_{\theta_i \in A_q} X(\theta_i)+\sum_{w_i \in D_{q-1}} Y(w_i)$$
$$=\sum_{\theta_i \in A_q} X(\theta_i)+\sum_{w_i \in B_q} Y(w_i)$$

이다. 여기서 右邊의 第二項은 第 $q-1$ 時點까지의 frame을 利用하여 調査할 수 있는 部分이고, 第一項은 새로 追加作成한 frame을 利用하여 調査할 수 있는 部分이다.

以下의 理論은 $D_q=A_q \cup D_{q-1}$을 L個의 層으로 分割함으로서 A_q, D_{q-1}을 層別하고 各層 各段階에서의 標本抽出은 復元抽出이다.

本論文의 諸定理를 證明하는데 文獻 [2], [3], [4], [5]를 參考로하였다.

I. 層別一段集落抽出의 경우

第 h 層 $(h=1, 2, \cdots\cdots, L)$에 있어서

A_q의 抽出單位는 M_h個이고

$$A_{q,h}=\{\theta_{h1}, \theta_{h2}, \cdots, \theta_{hi}, \cdots, \theta_{hMh}\}$$

D_{q-1}의 抽出單位는 N_h個이고

$$D_{q-1,h}=\{w_{h1}, w_{h2}, \cdots, w_{hi}, \cdots, w_{hNh}\}$$

라 하고

m_h, n_h : 各各 A_q, D_{q-1}에서 抽出되는 標本의 크기

p_{hi} : $\theta_{hi}(i=1, 2, \cdots, M_h)$가 標本으로 抽出되는 確率

q_{hi} : W_{hi} $(i=1, 2, \cdots, N_h)$가 標本으로 抽出되는 確率

$$\sum_i^{Mh} p_{hi}=1, \qquad \sum_i^{N_h} q_{hi}=1$$

라 하고, 또 確率變數 X, Y의 定義에 의하여

$$x_{hi}=X(\theta_{hi}) \quad : \theta_{hi}\text{에서의 } \alpha\text{의 값의 合計}, \quad \theta_{hi}\in A_q$$

$$y_{hi}=\begin{cases} Y(w_{hi}) : w_{hi}\text{에서의 } \alpha\text{의 값의 合計}, & w_{hi}\in B_q \\ 0 & w_{hi}\in C_q \end{cases}$$

이고,

$$x_h=\sum_i^{M_h} x_{hi}, \qquad y_h=\sum_i^{N_h} y_{hi}$$

라 하면, 우리가 推定하고자 하는 것은

$$T=\sum_h^L (x_h+y_h)$$

이다.

定理 I-1
$$\hat{T}=\sum_h^L \frac{1}{m_h}\left\{\sum_{i'}^{m_h} \frac{X_{hi}'}{p_{hi'}}+\frac{1}{n_h}\sum_{i'}^{n_h}\frac{Y_{hi'}}{q_{hi'}}\right\}$$

는 T의 不偏推定量이다.

但, $X_{hi'}=X(\theta_{hi'})$, $\quad Y_{hi'}=Y(w_{hi'})$

證明
$$E(\hat{T})=\sum_h^L\left\{\frac{1}{m_h}\sum_{i'}^{m_h} E_{i'}\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}\right)+\frac{1}{n_h}\sum_{i'}^{n_h} E_{i'}\left(\frac{Y_{hi'}}{q_{hi'}}\right)\right\}$$
$$=\sum_h^L\left\{\frac{1}{m_h}\cdot m_h\sum_i^{M_h} p_{hi}\left(\frac{x_{hi}}{p_{hi}}\right)+\frac{1}{n_h}\cdot n_h\sum_i^{N_h} q_{hi}\left(\frac{y_{hi}}{q_{hi}}\right)\right\}$$
$$=\sum_h^L\left\{\sum_i^{M_h} x_{hi}+\sum_i^{N_h} y_{hi}\right\}=\sum_h^L (x_h+y_h)=T$$

定理 I-2 $\hat{T}$의 分散은 다음과 같다

$$V(\hat{T})=\sum_h^L\left\{\frac{1}{m_h}\sum_i^{M_h} p_{hi}\left(\frac{x_{hi}}{p_{hi}}-x_h\right)^2+\frac{1}{n_h}\sum_i^{N_h} q_{hi}\left(\frac{y_{hi}}{q_{hi}}-y_h\right)^2\right\}.$$

證明 獨立標本(復元抽出)이므로

$$V(\hat{T})=\sum_h^L\left\{\frac{1}{m_h^2}\sum_{i'}^{m_h}V_{i'}\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}\right)+\frac{1}{n_h^2}\sum_{i'}^{n_h}V_{i'}\left(\frac{Y_{hi'}}{q_{hi'}}\right)\right\}$$

$$=\sum_h^L\left\{\frac{1}{m_h}\sum_i^{M_h}p_{hi}\left(\frac{x_{hi}}{p_{hi}}-x_h\right)^2+\frac{1}{n_h}\sum_i^{N_h}q_{hi}\left(\frac{y_{hi}}{q_{hi}}-y_h\right)^2\right\}$$

定理 I-3 $$\hat{V}(\hat{T})=\sum_h^L\left\{\frac{1}{m_h(m_h-1)}\sum_{i'}^{m_h}\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}-\frac{1}{m_h}\sum_{i'}^{m_h}\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}\right)^2+\frac{1}{n_h(n_h-1)}\sum_{i'}^{n_h}\left(\frac{Y_{hi'}}{q_{hi'}}-\frac{1}{n_h}\sum_{i'}^{n_h}\frac{Y_{hi'}}{q_{hi'}}\right)^2\right\}$$

은 $V(\hat{T})$의 不偏推定量이다.

證明 $$E\{\hat{V}(\hat{T})\}=\sum_h^L\left\{\frac{1}{m_h(m_h-1)}E\sum_{i'}^{m_h}\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}-\frac{1}{m_h}\sum_{i'}^{m_h}\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}\right)^2+\frac{1}{n_h(n_h-1)}E\sum_{i'}^{n_h}\left(\frac{Y_{hi'}}{q_{hi'}}-\frac{1}{n_h}\sum_{i'}^{n_h}\frac{Y_{hi'}}{q_{hi'}}\right)^2\right\}$$

그런데

$$E\sum_{i'}^{M_h}\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}-\frac{1}{m_h}\sum_{i'}^{m_h}\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}\right)^2$$

$$=E\sum_{i'}^{m_h}\left\{\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}-x_h\right)-\frac{1}{m_h}\sum_{i'}^{m_h}\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}-x_h\right)\right\}^2$$

$$=E\left[\sum_{i'}^{m_h}\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}-x_h\right)^2-\frac{1}{m_h}\left\{\sum_{i'}^{m_h}\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}-x_h\right)\right\}^2\right]$$

$$=\sum_{i'}^{m_h}E_{i'}\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}-x_h\right)^2-\frac{1}{m_h}\left\{\sum_{i'}^{m_h}E_{i'}\left(\frac{X_{hi}'}{p_{hi'}}-x_h\right)^2+E\sum_{i'\neq j'}^{m_h}\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}-x_h\right)\left(\frac{X_{hj'}}{p_{hj'}}-x_h\right)\right\}$$

$$=m_h\sum_i^{M_h}p_{hi}\left(\frac{x_{hi}}{p_{hi}}-x_h\right)^2-\frac{1}{m_h}\cdot m_h\sum_i^{M_h}p_{hi}\left(\frac{x_{hi}}{p_{hi}}-x_h\right)^2$$

$$=(m_h-1)\sum_i^{M_h}p_{hi}\left(\frac{x_{hi}}{p_{hi}}-x_h\right)^2 \tag{2}$$

마찬가지로

$$E\sum_{i'}^{N_h}\left(\frac{Y_{hi'}}{q_{hi'}}-\frac{1}{n_h}\sum_{i'}^{n_h}\frac{Y_{hi'}}{q_{hi'}}\right)=(n_h-1)\sum_i^{N_h}q_{hi}\left(\frac{y_{hi}}{q_{hi}}-y_h\right)^2 \tag{3}$$

(1)에 (2), (3)을 代入하면

$$E\{\hat{V}(\hat{T})\}=V(\hat{T})$$

定理 I-4 費用函數를

$$C=C_0+\sum_h^L(C_{Xh}m_h+C_{Yh}n_h) \tag{4}$$

라 假定하고, 總費用 C를 固定했을 때 $V(\hat{T})$의 값을 最小로 하는 標本의 크기 m, n, m_h, n_h는 各各 다음과 같다.

$$m=\frac{(C-C_0)\sum_h^L(\sigma_{Xh}/\sqrt{C_{Xh}})}{\sum_h^L(\sigma_{Xh}\sqrt{C_{Xh}}+\sigma_{Yh}\sqrt{C_{Yh}})}$$

$$n=\frac{(C-C_0)\sum_h^L(\sigma_{Yh}/\sqrt{C_{Yh}})}{\sum_h^L(\sigma_{Xh}\sqrt{C_{Xh}}+\sigma_{Yh}\sqrt{C_{Yh}})}$$

$$m_h=\frac{\sigma_{Xh}/\sqrt{C_{Xh}}}{\sum_h^L(\sigma_{Xh}/\sqrt{C_{Xh}})}m, \qquad n_h=\frac{\sigma_{Yh}/\sqrt{C_{Yh}}}{\sum_h^L(\sigma_{Yh}/\sqrt{C_{Yh}})}$$

但, $\sigma_{Xh}{}^2=\sum_i^{M_h} p_{hi}\left(\frac{x_{hi}}{p_{hi}}-x_h\right)^2$, $\sigma_{Y}{}_h{}^2=\sum_i^{N_h} q_{hi}\left(\frac{y_{hi}}{q_{hi}}-y_h\right)^2$

證明 定理 I-2의 $V(\hat{T})$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V(\hat{T})=\sum_h^L\left(\frac{\sigma_{Xh}{}^2}{m_h}+\frac{\sigma_{Yh}{}^2}{n_h}\right)$$

Lagrangian을 $F(m_h, n_h)$라 하면

$$F(m_h,n_h)=\sum_h^L\left(\frac{\sigma_{Xh}{}^2}{m_h}+\frac{\sigma_{Yh}{}^2}{n_h}+\lambda\left\{\sum_h^L(C_{Xh}m_h+C_{Yh}n_h)+(C_0-C)\right\}\right.$$

$\frac{\partial F}{\partial m_h}=0$에서 $m_h=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ \frac{\sigma_{Xh}}{\sqrt{C_{Xh}}}$, $\frac{\partial F}{\partial n_h}=0$에서 $n_h=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ \frac{\sigma_{Yh}}{\sqrt{C_{Yh}}}$

그런데

$$\sum_h^L m_h=m, \qquad \sum_h^L n_h=n$$

이므로

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum_h^L(\sigma_{Xh}/\sqrt{C_{Xh}})=m \quad \therefore\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}}=m/\sum_h^L(\sigma_{Xh}/\sqrt{C_{Xh}}) \tag{5}$$

$$\therefore\ m_h=\frac{\sigma_{Xh}/\sqrt{C_{Xh}}}{\sum_h^L(\sigma_{Xh}/\sqrt{C_{Xh}})}m \tag{6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum_h^L(\sigma_{Yh}/\sqrt{C_{Yh}})=n \quad \therefore\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}}=n/\sum_h^L(\sigma_{Yh}/\sqrt{C_{Yh}}) \tag{7}$$

$$\therefore\ n_h=\frac{\sigma_{Yh}/\sqrt{C_{Yh}}}{\sum_h^L(\sigma_{Yh}/\sqrt{C_{Yh}})}\cdot n \tag{8}$$

(6), (8)을 (4)에 代入하고 整頓하면

$$\frac{\sum_h^L(\sigma_{Xh}\sqrt{C_{Xh}})}{\sum_h^L(\sigma_{Xh}/\sqrt{C_{Xh}})}\cdot m+\frac{\sum_h^L(\sigma_{Yh}\sqrt{C_{Yh}})}{\sum_h^L(\sigma_{Yh}/\sqrt{C_{Yh}})}\cdot n=C-C_0 \tag{9}$$

또 (5) 및 (7)에서

$$\frac{m}{\sum_h^L (\sigma_{Xh}/\sqrt{C_{Xh}})}=\frac{n}{\sum_h^L (\sigma_{Yh}/\sqrt{C_{Yh}})} \tag{10}$$

(9) 및 (10)에서

$$m=\frac{(C-C_0)\sum_h^L (\sigma_{Xh}/\sqrt{C_{Xh}})}{\sum_h^L (\sigma_{Xh}\sqrt{C_{Xh}}+\sigma_{Yh}\sqrt{C_{Yh}})},\quad n=\frac{(C-C_0)\sum_h^L (\sigma_{Yh}/\sqrt{C_{Yh}})}{\sum_h^L (\sigma_{Yh}\sqrt{C_{Xh}}+\sigma_{Yh}\sqrt{C_{Yh}})}$$

Ⅱ. 層別二段集落抽出의 경우

A_q, D_{q-1}의 第 h 層 $(h=1, 2, \cdots, L)$에 있어서

M_h, N_h : 各各 A_q, D_{q-1}中의 一次抽出單位의 總數

m_h, n_h : 各各 A_q, D_{q-1}에서의 一次標本의 크기

p_{hi}, q_{hi} : 各各 A_q, D_{q-1}의 第 i一次抽出單位가 一次標本으로 抽出되는 確率로서 다음 性質을 갖는다.

$$\sum_i^{M_h} p_{hi}=1, \qquad \sum_i^{N_h} q_{hi}=1$$

M_{hi}, N_{hi} : 各各 Aq, D_{q-1}의 第 i 一次抽出單位 中의 二次抽出單位의 總數

m_{hi}, n_{hi} : 各各 A_q, D_{q-1}의 第 i 一次抽出單位에서 抽出되는 二次標本의 크기

라 하고, A_q, D_{q-1}의 第 i 一次抽出單位中의 二次抽出單位의 集合을 各各

$$A_{q,hi}=\{\theta_{hi1}, \theta_{hi2}, \cdots, \theta_{hij}, \cdots, \theta_{hiM_{hi}}\}$$

$$D_{q-1,hi}=\{w_{hi1}, w_{hi2}, \cdots, w_{hij}, \cdots, w_{hiN_{hi}}\}$$

라 하고,

p_{hij}, q_{hij} : 各各 θ_{hij}, w_{hij}가 二次標本으로 抽出되는 確率

$$\sum_j^{M_{hi}} p_{hij}=1, \quad \sum_j^{N_{hi}} q_{hij}=1$$

라 할 때, 確率變數 X, Y의 定義에 의하여

$$x_{hij}=X(\theta_{hij})=(\theta_{hij}\text{에서의 } \alpha\text{의 값의 合計}), \ (\theta_{hij}\in A_q)$$

$$y_{hij}=Y(w_{hij})=\begin{cases} w_{hij}\text{에서의 } \alpha\text{의 값의 合計} : & (w_{hij}\in B_q) \\ 0 & : (w_{hij}\in C_q) \end{cases}$$

이고,

$$x_{hi}=\sum_j^{M_{hi}} x_{hij}, \quad x_h=\sum_i^{M_h} x_{hi}=\sum_i^{M_h}\sum_j^{M_{hi}} x_{hij}$$

및

$$y_{hi}=\sum_j^{N_{hi}} y_{hij}, \quad y_h=\sum_i^{N_h} y_{hi}=\sum_i^{N_h}\sum_j^{N_{hi}} {}_{hij}$$

여기서 우리가 推定하고자 하는 것은

$$T = \sum_{h}^{L} (x_h + y_h)$$

이다.

定理 Ⅱ-1. $\hat{T} = \sum_{h}^{L} \left\{ \frac{1}{m_h} \sum_{i'}^{m_h} \frac{1}{p_{hi'}} \cdot \frac{1}{m_{hi'}} \sum_{j'}^{m_{hi'}} \frac{X_{hi'j'}}{p_{hi'j'}} + \frac{1}{n_h} \sum_{i'}^{n_h} \frac{1}{q_{hi'}} \cdot \frac{1}{n_{hi'}} \sum_{j'}^{n_{hi'}} \frac{Y_{hi'j'}}{q_{hi'j'}} \right\}$

는 T의 不偏推定量이다.

證明

$$X_h = \frac{1}{m_h} \sum_{i'}^{m_h} \frac{1}{p_{hi'}} \cdot \frac{1}{m_{hi'}} \sum_{j'}^{m_{hi'}} \frac{X_{hi'j'}}{p_{hi'j'}} \tag{11}$$

$$Y_h = \frac{1}{n_h} \sum_{i'}^{m_h} \frac{1}{q_{hi'}} \cdot \frac{1}{n_{hi'}} \sum_{j'}^{m_{hi'}} \frac{Y_{hi'j'}}{q_{hi'j'}} \tag{12}$$

라 놓으면

$$E(\hat{T}) = \sum_{h}^{L} \left\{ E(X_h) + E(Y_h) \right\} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} E(X_h) &= \frac{1}{m_h} \sum_{i'}^{M_h} \underset{i'}{E} \left(\frac{1}{p_{hi'}} \cdot \frac{1}{m_{hi'}} \sum_{j'}^{m_{hi'}} \underset{j'}{E^{(i')}} \frac{X_{hi'j'}}{p_{hi'j'}} \right) \\ &= \frac{1}{m_h} \cdot m_h \sum_{i}^{M_h} p_{hi} \left\{ \frac{1}{p_{hi}} \cdot \frac{1}{m_{hi}} \cdot m_{hi} \sum_{j}^{hi} p_{hij} \left(\frac{X_{hij}}{p_{hij}} \right) \right\} \\ &= \sum_{i}^{M_h} \sum_{j}^{M_{hi}} x_{hij} = x_h \end{aligned}$$

마찬가지로

$$E(Y_h) = y_h$$

(13)에서

$$E(\hat{T}) = \sum_{h}^{L} (x_h + y_h) = T$$

定理 Ⅱ-2. $\hat{T}$의 分散은 다음과 같다.

$$V(\hat{T}) = \sum_{h}^{L} \left[\frac{1}{m_h} \sum_{i}^{M_h} \left\{ p_{hi} \left(\frac{x_{hi}}{p_{hi}} - x_h \right)^2 + \frac{1}{p_{hi}} \cdot \frac{1}{m_{hi}} \sum_{j}^{hi} p_{hij} \left(\frac{x_{hij}}{p_{hij}} - x_{hi} \right)^2 \right\} + \frac{1}{n_h} \sum_{i}^{N_h} \left\{ q_{hi} \left(\frac{y_{hi}}{q_{hi}} - y_h \right)^2 + \frac{1}{q_{hi}} \cdot \frac{1}{n_{hi}} \sum_{j}^{N_{hi}} q_{hij} \left(\frac{y_{hij}}{q_{hij}} - y_{hi} \right)^2 \right\} \right]$$

證明 $\hat{T} = \sum_{h}^{L} (X_h + Y_h)$라 놓을 수 있고, 獨立標本이므로

$$V(\hat{T}) = \sum_{h}^{L} \left\{ V(X_h) + V(Y_h) \right\} \tag{14}$$

그런데 (11)에서

$$X_h = \frac{1}{m_h} \sum_{i'}^{m_h} \frac{1}{p_{hi'}} \cdot \frac{1}{m_{hi'}} \sum_{j'}^{m_{hi'}} \frac{X_{hi'j'}}{p_{hi'j'}}$$

$$V(X_h)=\underset{i'}{V}\ \underset{j'}{E}^{(i')}(X_h)+\underset{i'}{E}\underset{j'}{V}^{(i')}(X_h) \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\underset{i'}{V}\underset{j'}{E}^{(i')}(X_h)&=\frac{1}{m_h^2}\sum_{i'}^{m_h}\underset{i'}{V}\left\{\frac{1}{p_{hi'}}\frac{1}{m_{hi'}}\sum_{j'}^{m_{hi'}}\underset{j'}{E}^{(i')}\left(\frac{X_{hi'j'}}{p_{hi'j'}}\right)\right\}\\&=\frac{1}{m_h^2}\cdot m_h\underset{i'}{V}\left\{\frac{1}{p_{hi'}}\cdot\frac{1}{m_{hi'}}\cdot m_{hi'}\sum_{j}^{M_{hi'}}p_{hi'j}\left(\frac{x_{hi'j}}{p_{hi'j}}\right)\right\}\\&=\frac{1}{m_h}\underset{i'}{V}\left(\frac{1}{p_{hi'}}\sum_{j}^{M_{hi'}}x_{hi'j}\right)=\frac{1}{m_h}\underset{i'}{V}\left(\frac{x_{hi'}}{p_{hi'}}\right)\\&=\frac{1}{m_h}\sum_{i}^{M_h}p_{hi}\left(\frac{x_{hi}}{p_{hi}}-x_h\right)^2\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\underset{i'}{E}\underset{j'}{V}^{(i')}(X_h)&=\underset{i'}{E}\left\{\frac{1}{m_h^2}\sum_{i'}^{m_h}\frac{1}{p_{hi'}{}^2}\cdot\frac{1}{m_{hi'}{}^2}\sum_{j'}^{m_{hi'}}\underset{j'}{V}^{(i')}\left(\frac{X_{hi'j'}}{p_{hi'j'}}\right)\right\}\\&=\frac{1}{m_h^2}\cdot m_h\underset{i'}{E}\left\{\frac{1}{p_{hi'}{}^2}\cdot\frac{1}{m_{hi'}{}^2}m_{hi'}\sum_{j}^{M_{hi'}}p_{hi'j}\left(\frac{x_{hi'j}}{p_{hi'j}}-x_{hi'}\right)^2\right\}\\&=\frac{1}{m_h}\sum_{i}^{M_h}p_{hi}\left\{\frac{1}{p_{hi}^2}\cdot\frac{1}{m_{hi}}\sum_{j}^{M_{hi}}p_{hij}\left(\frac{x_{hij}}{p_{hij}}-x_{hi}\right)^2\right\}\\&=\frac{1}{m_h}\sum_{i}^{M_h}\frac{1}{p_{hi}}\frac{1}{m_{hi}}\sum_{j}^{M_{hi}}p_{hij}\left(\frac{x_{hij}}{p_{hij}}-x_{hi}\right)^2\end{aligned} \tag{17}$$

(16), (17)을 (15)에 代入하면

$$V(X_h)=\frac{1}{m_h}\sum_{i}^{M_h}\left\{p_{hi}\left(\frac{x_{hi}}{p_{hi}}-x_h\right)^2+\frac{1}{p_{hi}}\cdot\frac{1}{m_{hi}}\sum_{j}^{M_{hi}}p_{hij}\left(\frac{x_{hij}}{p_{hij}}-x_{hi}\right)^2\right\} \tag{18}$$

마찬가지로

$$V(Y_h)=\frac{1}{n_h}\sum_{i}^{N_h}\left\{q_{hi}\left(\frac{x_{hi}}{q_{hi}}-x_h\right)^2+\frac{1}{q_{hi}}\cdot\frac{1}{n_{hi}}\sum_{j}^{N_{hi}}q_{hij}\left(\frac{y_{hij}}{q_{hij}}-y_{hi}\right)^2\right\} \tag{19}$$

(18), (19)를 (14)에 代入함으로서 證明은 끝난다.

定理 Ⅱ-3. $\hat{V}(\hat{T})=\sum_{h}^{L}\left\{\hat{V}(X_h)+\hat{V}(Y_h)\right\}$

는 $V(\hat{T})$의 不偏推定量이다.

但

$$\begin{cases}\hat{V}(X_h)=\dfrac{1}{m_h(m_h-1)}\displaystyle\sum_{i'}^{m_h}\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}-X_h\right)^2\\ \qquad+\dfrac{1}{m_h^2}\displaystyle\sum_{i'}^{m_h}\frac{1}{p_{hi'}{}^2}\frac{1}{m_{hi'}(m_{hi'}-1)}\sum_{j'}^{m_{hi'}}\left(\frac{X_{hi'j'}}{p_{hi'j'}}-X_{hi'}\right)^2\\ \hat{V}(Y_h)=\dfrac{1}{n_h(n_h-1)}\displaystyle\sum_{i'}^{n_h}\left(\frac{Y_{hi'}}{q_{hi'}}-Y_h\right)^2\\ \qquad+\dfrac{1}{n_h^2}\displaystyle\sum_{i'}^{n_h}\frac{1}{q_{hi'}{}^2}\frac{1}{n_{hi'}(n_{hi'}-1)}\sum_{j'}^{n_{hi'}}\left(\frac{Y_{hi'j'}}{q_{hi'j'}}-Y_{hi'}\right)^2\\ X_{hi'}=\dfrac{1}{m_{hi'}}\displaystyle\sum_{j'}^{m_{hi'}}\frac{X_{hi'j'}}{p_{hi'j'}},\qquad X_h=\frac{1}{m_h}\sum_{i'}^{m_h}\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}\\ Y_{hi'}=\dfrac{1}{n_{hi'}}\displaystyle\sum_{j'}^{n_{hi'}}\frac{Y_{hi'j'}}{q_{hi'j'}},\qquad Y_h=\frac{1}{n_h}\sum_{i'}^{n_h}\frac{Y_{hi'}}{q_{hi'}}\end{cases}$$

證明 $E\{\hat{V}(\hat{T})\}=\sum_h^L\{E\hat{V}(X_h)+E\hat{V}(Y_h)\}$

그런데

$$E\hat{V}(X_h)=\frac{1}{m_h(m_h-1)}E\sum_{i'}^{m_h}\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}-X_h\right)^2$$
$$+\frac{1}{m_h^2}\sum_{i'}^{m_h}\underset{i'}{E}\frac{1}{p_{hi'}{}^2}\frac{1}{m_{hi'}(m_{hi'}-1)}\underset{j'}{E}^{(i')}\sum_{j'}^{m_{hi'}}\left(\frac{X_{hi'j'}}{p_{hi'j'}}-X_{hi'}\right)^2 \tag{20}$$

여기서

$$E\sum_{i'}^{m_h}\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}-X_h{}^2\right)=E\sum_{i'}^{m_h}\left\{\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}-x_h\right)-\left(X_h-x_h\right)\right\}^2$$
$$=E\left[\sum_{i'}^{m_h}\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}-x_h{}^2\right)-\frac{1}{m_h}\left\{\sum_{i'}^{m_h}\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}-x_h\right)\right\}^2\right]$$
$$=E\left\{\left(1-\frac{1}{m_h}\right)\sum_{i'}^{m_h}\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}-x_h\right)^2\right\}-\frac{1}{m_h}\cdot 0$$
$$=\frac{m_h-1}{m_h}\sum_{i'}^{m_h}E\left(\frac{X_{hi'}}{p_{hi'}}-x_h\right)^2$$
$$=\frac{m_h-1}{m_h}\cdot m_h\underset{i'}{E}\left\{\frac{1}{p_{hi'}}\cdot\frac{1}{m_{hi'}}\sum_{j'}^{m_{hi'}}\underset{j'}{E}^{(i')}\left(\frac{X_{hi'j'}}{p_{hi'j'}}\right)-x_h\right\}^2$$
$$=(m_h-1)\sum_i^{M_h}p_{hi}\left\{\frac{1}{p_{hi}}\frac{1}{m_{hi}}m_{hi}\sum_j^{M_{hi}}p_{hij}\left(\frac{x_{hij}}{p_{hij}}\right)-x_h\right\}^2$$
$$=(m_h-1)\sum_i^{M_h}p_{hi}\left(\frac{x_{hi}}{p_{hi}}-x_h\right)^2 \tag{21}$$

마찬가지로

$$\underset{j'}{E}^{(i')}\sum_{j'}^{m_{hi'}}\left(\frac{X_{hi'j'}}{p_{hi'j'}}-X_{hi'}\right)^2=(m_{hi'}-1)\sum_j^{M_{hi'}}p_{hi'j}\left(\frac{x_{hi'j}}{p_{hi'j}}-x_{hi'}\right)^2 \tag{22}$$

(21), (22)를 (20)에 代入하면

$$E\hat{V}(X_h)=\frac{1}{m_h}\sum_i^{M_h}p_{hi}\left(\frac{x_{hi}}{p_{hi}}-x_h\right)^2$$
$$+\frac{1}{m_h}\sum_i^{M_h}\frac{1}{p_{hi}}\frac{1}{m_{hi}}\sum_j^{M_{hi}}p_{hij}\left(\frac{x_{hij}}{p_{hij}}-x_{hi}\right)^2=V(X_h)$$

마찬가지로

$$E\hat{V}(Y_h)=V(Y_h)$$

$$\therefore\ E\hat{V}(\hat{T})=\sum_h^L\{E\hat{V}(X_h)+E\hat{V}(Y_h)\}=\sum_h^L\{V(X_h)+V(Y_h)\}=V(\hat{T})$$

定理 Ⅱ-4. A_q에 있어서

$$\text{費用函數}: C=C_0+\sum_h^L(C_{1h}m_h+C_{2h}m_h\bar{m}_h) \tag{23}$$

$$m_{hi}/M_{hi}=\bar{m}_h/\bar{M}_h \tag{24}$$

$$\text{但,}\ \bar{m}_h=\sum_i^{M_h} p_{hi}m_{hi},\qquad \bar{M}_h=\sum_i^{M_h} p_{hi}M_{hi}$$

라 하고, 總費用 C를 固定했을 때, $\sum_h^L V(X_h)$의 값을 最小로 하는 m_h, m_{hi}는 다음과 같다.

$$m_h=\frac{(C-C_0)\sqrt{A/(C_{2h}\bar{m}_h^2)}}{\sum_h^L (C_{1h}+C_{2h}\bar{m}_h)\sqrt{A/(C_{2h}\bar{m}_h^2)}}$$

$$m_{hi}=\frac{M_{hi}}{\bar{M}_h}\sqrt{\frac{C_{1h}\cdot A}{C_{2h}\,\sigma_{Xh}^2}}$$

$$\text{但,}\ \left\{\begin{array}{ll}\sigma_{Xh}^2=\sum_i^{M_h} p_{hi}\left(\dfrac{x_{hi}}{p_{hi}}-x_h\right)^2, & A=\sum_i^{M_h}\dfrac{1}{p_{hi}}\cdot\dfrac{\bar{M}_h}{M_{hi}}\cdot\sigma_{Xhi}^2\\ \sigma_{Xhi}^2=\sum_j^{M_{hi}} p_{hij}\left(\dfrac{x_{hij}}{p_{hij}}-x_{hi}\right)^2 & \end{array}\right.$$

證明 (18)에서 $\sum_h^L V(X_h)=\sum_h^L \frac{1}{m_h}\left\{\sigma_{Xh}^2+\sum_i^{M_h}\frac{1}{p_{hi}}\cdot\frac{1}{m_{hi}}\sigma_{Xhi}^2\right\}$ (25)

(24)에서

$$m_{hi}=(\bar{m}_h/\bar{M}_h)M_{hi} \tag{26}$$

(26)을 (25)에 代入하여

$$\sum_h^L V(X_h)=\sum_h^L\frac{1}{m_h}\left\{\sigma_{Xh}^2+\frac{1}{\bar{m}_h}\sum_i^{M_h}\frac{1}{p_{hi}}\frac{\bar{M}_h}{M_{hi}}\sigma_{xhi}^2\right\}$$
$$=\sum_h^L\left\{\frac{1}{m_h}\sigma_{Xh}^2+\frac{A}{\bar{m}_h}\right\},\ \text{但}\ A=\sum_i^{M_h}\frac{1}{p_{hi}}\frac{\bar{M}_h}{M_{hi}}\sigma_{Xhi}^2$$

Lagrangian을 $F(m_h, \bar{m}_h)$라 하면

$$F(m_h,\bar{m}_h)=\sum_h^L\frac{1}{m_h}\left(\sigma_{Xh}^2+\frac{A}{\bar{m}_h}\right)$$
$$+\lambda\left\{\sum_h^L(C_{1h}m_h+C_{2h}m_h\bar{m}_h)+(C_0-C)\right\}$$

$$\frac{\partial F}{\partial m_h}=-\frac{1}{m_h^2}\left(\sigma_{Xh}^2+\frac{A}{\bar{m}_h}\right)+\lambda(C_{1h}+C_{2h}\bar{m}_h)=0 \tag{27}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\bar{m}_h}=-\frac{A}{m_h\bar{m}_h^2}+\lambda C_{2h}m_h=0 \tag{28}$$

(28)에서

$$\lambda m_h^2=\frac{A}{C_{2h}\bar{m}_h^2} \tag{29}$$

또 (27), (28) 에서 C_{2h}를 消去하고 λm_h^2에 對하여 풀면

$$\lambda m_h^2=\frac{\sigma_{Xh}^2}{C_{1h}} \tag{30}$$

(29), (30)에서

$$\bar{m}_h=\sqrt{\frac{C_{1h}\,A}{C_{2h}\,\sigma_{Xh}^2}} \tag{31}$$

(29)에서

$$m_h=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\frac{A}{C_{2h}\bar{m}_h^2}} \tag{32}$$

(30), (32)를 (23)에 代入하여 $\sqrt{\lambda}$에 對하여 풀면

$$\sqrt{\lambda}=\frac{\sum_h^L (C_{1h}+C_{2h}\bar{m}_h)\sqrt{A/(C_{2h}\bar{m}_h^2)}}{C-C_0} \tag{33}$$

(33)를 (32)에 代入하면

$$m_h=\frac{(C-C_0)\sqrt{A/(C_{2h}\bar{m}_h^2)}}{\sum_h^L (C_{1h}+C_{2h}\bar{m}_h)\sqrt{A/(C_{2h}\bar{m}_h^2)}}$$

또 (31)을 (24)에 代入하면

$$m_{hi}=\frac{M_{hi}}{\bar{M}_h}\sqrt{\frac{C_{1h}}{C_{2h}}\cdot\frac{A}{\sigma_{Xh}^2}}$$

系 D_{q-1}에서

$$\text{費用函數}: C'=C_0'+\sum_h^L (C_{1h}'n_h+C_{2h}'n_h\bar{n}_h)$$

$$n_{hi}/N_{hi}=\bar{n}_h/\bar{N}_h$$

$$\text{但},\ \bar{n}_h=\sum_i^{N_h} q_{hi}n_{hi},\qquad \bar{N}_h=\sum_i^{N_h} q_{hi}N_{hi}$$

라 하고, 總費用 C'를 固定했을 때, $\sum_h^L V(Y_h)$의 값을 最小로 하는 n_h, n_{hi}는 다음과 같다.

$$n_h=\frac{(C'-C_0')\sqrt{A'/(C_{2h}'\bar{n}_h^2)}}{\sum_L^h (C_{1h}'+C_{2h}'\bar{n}_h)\sqrt{A'/(C_{2h}'\bar{n}_h^2)}}$$

$$n_{hi}=\frac{N_{hi}}{\bar{N}_h}\sqrt{\frac{C_{1h}'A'}{C_{2h}'\sigma_{Yh}^2}}$$

$$\text{但}\begin{cases}\sigma_{Yh}^2=\sum_i^{N_h} q_{hi}\left(\dfrac{x_{hi}}{q_{hi}}-x_h\right)^2, & A'=\sum_i^{N_h}\dfrac{1}{q_{hi}}\dfrac{\bar{N}_h}{N_{hi}}\sigma_{Yhi}^2\\ \sigma_{Yhi}^2=\sum_i^{N_h} q_{hij}\left(\dfrac{y_{hij}}{q_{hij}}-y_{hi}\right)-y_{hi} & \end{cases}$$

參 考 文 獻

[1] Choi, Chun Ho, *Sequential Sampling Estimation for True Population on the Stratified Sampling*, The Journal of the Korean Statistical Society Ⅱ (December, 1973).

[2] Cochran, W. G., *Sampling Techniques*, New-York: John Wiley and Sons, 1964,

pp. 252-254, 260 and 292-308.

[3] Deming, W. E., *Some Theory of Sampling*, New York: John Wiley and Sons, 1961, pp. 73 and 156.

[4] Hansen, M. H., Hurwitz, W. H., and Madow, W. G., *Sampling Survey Method and Theory*, New-York: John Wiley and Sons, 1956, pp. 56, 96, 144-150, 187, 194-199, 208 and 217.

[5] Kendall, M. G., and Stuart, A., *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 3, London: Charles Griffin, 1968, pp. 177, 179 and 191.

〔本研究는 產學協同財團의 支援에 의함〕

梨花女子大學校