Bull. Korean Math. Soc.
Vol. 12, No. 1, 1975

(解說) 코보디즘(cobordism)에 關하여

李 起 安

1. 序 論

現代數學에서 硏究對象으로 登場한 位相空間中 가장 代表的인 것은 CW 複體(complex)와 多樣體(manifold)라고 말 할 수 있을 것이며 이 中 多樣體는 各點의 近傍에 座標를 導入 할 수 있어서 硏究에 매우 便利함은 周知의 事實이다. 코보디즘論은 微分可能多樣體(differentiable manifold)가 갖는 特徵을 抽象化하므로써 얻어진 理論이며, 그 싹은 H. Poincare의 論文 "Analysis Situs, Journal de l' École Polytechnique, 1(1895)"속의 同値關係를 論한 部分에서 찾을 수가 있고, L.S. Pontrjagin에 이어 V.A. Rohlin을 거쳐, R. Thom의 論文 "Quelques propriétés globales des variétés differentiables, Comn. Math. Helv., 28(1954), pp. 17-86"에서 體系化된 學問이다. 이 뒤를 이어 J. Milnor 및 R.E. Stong 등의 硏究로 지금은 數學의 各分野에 이 理論을 活用하고 있는 段階에 이르고 있다.

이 理論이 꾀하고 있는 것은 코보디즘 카테고리(cobordism category)를 適切히 形成하고 그 對象(object)들을 가장 一般的인 立場에서 類別하는 것이다. 換言하면, 하나의 코보디즘 카테고리를 同値關係로 끊어, 對象들을 類別하고 코보디즘半群을 만들며, 逆元을 갖는 것들로 만들어진 코보디즘 群의 性質을 찾는 것이며 그 活用을 試圖한 것이다.

그런데 n次元 (B,f)多樣體들의 코보디즘 群은 하나의 安定호모토피群(stable homotopy group)과 同型임이 證明되어 지고(§4), 安定호모도피群은 一般化된 (코)-호모로지群(generalized (co)-homology group)의 一例가 되고(§2), 뿐만 아니라 一般化된 (코)-호모로지 論은 패라콤팩트(paracompact) 空間上의 벡터 束(vector bundle)과 束寫像(bundle mapping)들로 된 카테고리를 安定同値關係(stable equivalence relation)로 끊어서 얻어 진 K群에서 誘發한 것이므로, 코보디즘論은 安定호모토피論의 一般化라고 말 할 수도 있다.

이 글에서 가장 重要한 槪念은 法束(normal bundle)이다 지금 M^n을 n次元微分可能(C^∞) 多樣體(實數體 $\boldsymbol{R}$上의)라고 하자. 이때 充分히 큰 r에 對하여 매장사상(imbedding map) $\nu : M^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^{n+r}$가 존재하여 다음의 可換圖를 얻는다.

$$\begin{array}{ccc} T(M^n) & \xrightarrow{\nu_*} & T(\boldsymbol{R}^{n+r}) \cong \boldsymbol{R}^{n+r} \times \boldsymbol{R}^{n+r} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M^n & \xrightarrow{\nu} & \boldsymbol{R}^{n+r} \end{array}$$

여기서 $T(M^n)$은 M^n 上의 接束(tangent bundle)이다. ν의 풀백(pull-back)은 M^n 上의 벡터束

$$\nu^*(T(\boldsymbol{R}^{n+r})) \longrightarrow M^n$$

이며, 이때 包含寫像(inclusion) $T(M^n) \hookrightarrow \nu^*(T(\boldsymbol{R}^{n+r}))$가 있고 이것의 商束(quotient bundle)

$$\nu^*(T(\boldsymbol{R}^{n+r}))/T(M^n) \longrightarrow M^n$$

는 M^n 上의 r次元 벡터束이 된다. 이것을 法束이라 부르며 그 全空間 (total space)을 $N(M^n)$로 表示한다. 같은 要領으로 $\boldsymbol{R}^{n+r}$ 代身 充分히 큰 次元의 微分可能多様體를, ν 代身 박아넣기(immersion)를 取하여 法束을 定義할 수 있다. 法束 $N(M^n)$로 돌아가자. $\boldsymbol{R}^{n+r}$의 r次元 部分空間들로 된 Grassmann 多様體를 $G_{r,n}$로 表示하고, $G_{r,n}$ 上의 標準 r次元 벡터束(canonical r-dimensional vector bundle)을

$$\gamma_n{}^r(E(\gamma_n{}^r) \longrightarrow G_{r,n})$$

로 表示하자([2]). $m \in M^n$에서의 $N(M^n)$의 프아이바(fibre) $N(M^n)_m$는 $\boldsymbol{R}^{n+r}$의 n次元 部分空間 $\nu_*(T(M^n)_m)$과 直交되는 x들에 對하여 (m, x)들로 되어 있다. 이때 이 x들의 모두는 $\boldsymbol{R}^{n+r}$의 r次元 部分空間 N_m를 만들어 준다. 따라서 다음의 可換圖를 얻는다.

$$\begin{array}{ccc} N(M^n) & \longrightarrow & E(\gamma_n{}^r) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (m, x) & \longrightarrow & (N_m, x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ m & \longmapsto & N_m \\ \Cap & & \Cap \\ M^n & \longrightarrow & G_{r,n} \end{array}$$

여기서,

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n{}^r = \gamma^r, \quad \lim_{n\to\infty} G_{r,n} = BO_r$$

等으로 놓으면 $E(\gamma_n{}^r) \subset E(\gamma^r)$, $G_{r,n} \subset BO_r$를 얻고 法束 $N(M^n)$의 類別寫像(classification map)

$$i(\nu) : M^n \longrightarrow BO_r$$

(연속함수(map) : $M^n \longrightarrow G_{r,n}$와 包含寫像 $G_{r,n} \hookrightarrow BO_r$와의 結合)를 얻게 된다([2]).

다음은 코보디즘에 관하여 記述할 것이다. 3角組의 微分可能多様體(triad)

$(W;V_0,V_1)$는 컴팩트(compact) n次元 微分可能多樣體 W와 $\partial W=V_0\cup V_1$인 것을 말한다. 여기서 ∂W는 W의 境界(boundary)를 表示한다. 두개의 3角組 $(W;V_0,V_1)$와 $(W';V_0',V'_1)$ 및 微分同相寫像(diffeomorphism) $h:V_1\longrightarrow V_0'$가 주어지면 새로운 3角組의 微分可能多樣體$(W\cup_h W';V_0,V_1')$를 形成할 수 있다. 이때 $W\cup_h W'$는 h에 의하여 V_1과 V_0'의 點을 同一視하므로써 W와 W'에서 얻어진 多樣體이며 臨界點(critical point)등에 관한 Morse 函數를 利用하므로써 $W\cup_h W'$의 微分可能多樣體의 構造는 W및 W'의 그것과 共立(compatible)임이 증명되어 진다([4]).

두개의 閉 n次元 微分可能多樣體 M_0와 M_1을 생각하자 (M_0, M_1은 컴팩트이며 $\partial M_0=\phi=\partial M_1$). M_0에서 M_1에의 **코보듸즘**은$(W;V_0,V_1;h_0,h_1)$를 말한바, 이때 $(W;V_0,V_1)$는 3角組이며 $h_i:V_i\longrightarrow M_i$ $(i=0,1)$은 微分同相寫像이다. M_0에서 M_1에의 두개의 코보듸즘$(W;V_0,V_1;h_0,h_1)$, $(W';V_0',V_1';h_0',h_1')$는 만약 V_0를 V_0'으로 V_1을 V_1'으로 가져가는 微分同相寫像 $g:W\longrightarrow W'$가 존재하며, 圖形

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[rr, "g|V_i"] \arrow[dr, "h_i"'] & & V_i' \arrow[dl, "h_i"] \\ & M_i & \end{tikzcd} \qquad (i=0,1)$$

가 可換이면 **同値**라고 말한다. 閉微分可能多樣體를 對象(object)으로 하고, 두개의 閉多樣體사이의 모피즘(morphism)으로 이 두개의 閉多樣體로 形成된 코보듸즘의 同値類로 取할 때 하나의 캬테고리를 얻는 바, 이것은 퍽 興味있는 캬테고리인 것이다.

h-코보듸즘은 코보듸즘$(W;V_0,V_1;h_0,h_1)$에서 V_0,V_1이 모두 W의 變位레트락트(deformation retract)가 되는 경우의 W를 말한다. h-코보듸즘論의 커다란 수확의 하나는, "h-코보듸즘$(W;V_0,V_1)$에 있어서 만약 V_0,V_1이 單純連結(simply connected)이고 次元이 4보다 크면 W와 $V_0\times[0,1]$ 사이에 微分同相寫像이 존재하고 V_0와 V_1도 微分同相(diffeomorphic)이다" 인 것이다([4]). h-코보듸즘$(W;V_0,V_1)$에 있어서 V_0와 V_1은 **h-코볼단트**(h-cobordant)라고 말하며, 이 同値關係를 利用하여 擬코보듸즘 캬테고리(pseudo-cobordism category)를 形成할 수 있는 것이다.

2. 一般化된 (코)-호모로지 論

一般化된 코호모로지論은 一般化된 호모로지論의 定義에서 화살표를 反對로 하므로써 얻어지기 때문에 여기서는 于先 一般化된 호모로지論에 관하여 記할 것이다. 이 一般化된 호모로지論 (가령 特異호모로지函手(singular homoogy functor)의 특징으로 定義된 호모로지)의 7個의 公理中 7番째의 次

元公理 (dimension axiom)를 無視하므로써 얻어 진다.

C^2를 호모토피 擴張性質(homotopy extension property) (앞으로는 HEP로 略記)를 갖는 位相空間의 組(X, A)와 이들 사이의 寫像들의 호모토피로 된 카테고리라고 하고 C^*를 基點(base point)를 갖는 位相空間과 그 들 사이의 寫像들의 호모토피類로 된 카테고리라 하자. 位相空間 X를 (X, ϕ)로 쓰면 하나의 函手

$$\begin{array}{ccc} \sigma : C^2 & \longrightarrow & C^* \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (X, A) & \longmapsto & A = (A, \phi) \end{array}$$

가 존재한다. A_b를 아벨群(abelian group)들의 카테고리라 하자.

定義 1 하나의 C^2上에서의 **一般化된 호모로지論** H^*는 다음을 만족하는 函手의 列 $H_n : C^2 \longrightarrow A_b$와 自然變換(natural transformation)의 列 $\partial_n : H_n \longrightarrow H_{n-1} \cdot \sigma$를 말한다.

1) 모든 組 $(X, A) \in C^2$에 對하여

$$\cdots\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) = H_n(A, \phi) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots\cdots$$

는 完全列(exact sequence)이다. 여기서 $(A, \phi) \overset{i}{\hookrightarrow} (X, \phi) \overset{j}{\hookrightarrow} (X, A)$.

2) 모든 組 $(X, A) \in C^2$와 射影(projection) $P : (X, A) \longrightarrow (X/A, *)$에 對하여

$$H_n(X, A) \xrightarrow{P_*} H_n(X/A, *)$$

는 同型이다.

注意點은 $X/\phi = X \cup *$이며, X에 새로 添加된 點$*$는 基點이며 $X/\phi \in C^2$이다.

定義 2 C^*上의 **一般化된 誘導(reduced)호모로지 論** $\tilde{H}_*$는 다음을 만족하는 函手의 列 $\tilde{H}_n : C^* \longrightarrow A_b$와 自然變換의 列 $\sigma_n : \tilde{H}_n \longrightarrow \tilde{H}_{n+1} \cdot \Sigma$이다.
여기서 Σ는 懸垂(suspension)이다.

1) $A \subset X$가 C^*의 對象이고 (X, A)가 HEP를 가지면 $A \longrightarrow X \longrightarrow X/A$에서 얻은

$$\tilde{H}_n(A) \longrightarrow \tilde{H}_n(X) \longrightarrow \tilde{H}_n(X/A)$$

는 完全이다.

2) C^*의 모든 對象 X에 對하여

$$\sigma_n(X) : \tilde{H}_n(X) \longrightarrow \tilde{H}_{n+1}(\Sigma X)$$

는 同型이다.

만약 $* \in X \in C^*$에 對하여 $\tilde{H}_n(X) = H_n(X, *)$라 하면 一般化된 호모로지 論으로 부터 一般化된 誘導호모로지論을 얻을 수 있고 逆으로 $H_n(X, A) = \tilde{H}_n(X/A)$라 하면 誘導호모로지論을 얻을 수 있다. (詳細한 證明은 [1]).

定義 3 **스펙트람**(spectrum) $\underset{\sim}{X}$ 는 位相空間의 列 $\{X_n\}$과 寫像의 列 $\{\varepsilon_n : \Sigma X_n \longrightarrow X_{n+1}\}$ 또는 $\{\bar{\varepsilon}_n : X_n \longrightarrow \Omega X_{n+1}\}$, Ω는 루프函手(loop junctor)를 말한다.

例 1 (G, n)型 $(G$: 群$)$인 Eilenberg-MacLane 空間 $K(G, n)$는 CW-空間으로써

$$\pi_i(K(G, n)) = \begin{cases} 0, & i \neq n \\ G, & i = n \end{cases}$$

인 것을 뜻한다. 이때
$K(G, n) \simeq \Omega K(G, n+1)$ $([S^i, K(G, n)] = [S^{i+1}, K(G, n-1)] = [S^i, \Omega K(G, n+1)])$ 이므로, $X_n = K(G, n)$라 하면 스펙트람 $K(G)$을 얻는다.

例 2 $X_n = S^n$ 라 하자. $\Sigma S^n = S^{n+1}$ 이므로 $\varepsilon_n : \Sigma S^n = S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$ 를 恒等寫像으로 取하여 스펙트람 $\underset{\sim}{S}$ 를 얻는다.

例 3 位相空間 X에 對하여 $X_n = \Sigma^n X$ 라하면 $\varepsilon_n : \Sigma X_n = \Sigma^{n+1} X \longrightarrow X_{n+1} = \Sigma^{n+1} X$를 恒等寫像으로 하여 스펙트람 $\underset{\sim}{S}X$를 얻는다.

例 4 두개의 스펙트람 $\underset{\sim}{X} = \{X_n, x_n\}$, $\underset{\sim}{Y} = \{Y_n, y_n\}$가 있을때 0次寫像 $\alpha : \underset{\sim}{X} \longrightarrow \underset{\sim}{Y}$는 寫像의 列 $\{\alpha_n : X_n \longrightarrow Y_n\}$로 다음의 可換圖를 만족하는 것이다.

$$\begin{tikzcd} \Sigma X_n \arrow[r, "x_n"] \arrow[d, "\Sigma\alpha_n"'] & X_{n+1} \arrow[d, "\alpha_{n+1}"] \\ \Sigma Y_n \arrow[r, "y_n"] & Y_{n+1} \end{tikzcd}$$

環스펙트람(ring spectrum)은 $\underset{\sim}{X} = \{X_n, x_n\}$로써 寫像 $\alpha : \underset{\sim}{S} \longrightarrow \underset{\sim}{X}$와 組寫像(pairing) $m : (\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{X}) \longrightarrow \underset{\sim}{X}$, 即 各 p, q에 對하여

$$m_{p,q} : X_p \wedge X_q \longrightarrow X_{p+q}$$

인 것으로써 다음을 만족하는 것들을 갖는 것을 말한다($\wedge$: 스마쉬積 (smash product)).

圖形

$$\begin{tikzcd} (\Sigma X_p) \wedge X_q \arrow[r, "x_p \wedge 1"] & X_{p+1} \wedge X_q \arrow[dr, "m_{p+1,q}"] & \\ \Sigma(X_p \wedge X_q) \arrow[u, "\lambda"] \arrow[d, "\mu"'] \arrow[r, "\Sigma m_{p,q}"] & \Sigma(X_{p+q}) \arrow[r, "x_{p+q}"] & X_{p+q+1} \\ X_p \wedge (\Sigma X_q) \arrow[r, "1 \wedge x_q"] & X_p \wedge X_{q+1} \arrow[ur, "m_{p,q+1}"'] & \end{tikzcd}$$

은 可換圖

$$\begin{array}{ccccc} S^p\wedge X_q & \xrightarrow{\alpha_p\wedge 1} & X_p\wedge X_q & \xleftarrow{1\wedge\alpha_q} & X_p\wedge S^q \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle m_{p,q}(-1)^{pq}\tilde{x}} & & \downarrow \\ \Sigma^p X_q & \xrightarrow{x} & X_{p+q} & \longleftarrow & S^q\wedge X_p \end{array}$$

를 만족하는 것으로 $[m_{p+1,q}\cdot x_p\wedge 1\cdot\lambda]=[x_{p+q}\cdot\Sigma m_{p,q}]=(-1)^p[m_{p,q+1}\cdot 1\wedge x_q\cdot\mu]$의 意味에서 可換이다. $S^p\wedge X_q=\Sigma^p X_q$, $\tilde{x}$는 다음의 結合이다.

$$\Sigma^p X_q \xrightarrow{\Sigma^{p-1}x_q} \Sigma^{p-1}X_{q+1} \xrightarrow{\Sigma^{p-2}X_{q+1}} \longrightarrow \Sigma X_{p+q-1} \xrightarrow{x_{q+p-1}} X_{p+q}$$

R를 單位元이 있는 環이라하면 스펙트람 $\underset{\sim}{K}(R)$는 環스펙트람이 된다([5]).

스펙트람에 係數를 둔 一般化된 (코)-호모로지群(앞으로는 單純히 (코)-호모로지群이라 함)을 定義하자. 두개의 스펙트람 $\{X_n, x_n\}$, $\{Y_n, y_n\}$이 있을 때 **r 次寫像** $\alpha:\underset{\sim}{X}\longrightarrow\underset{\sim}{Y}$는 다음의 可換圖를 만족하는 寫像의 列 $\{\alpha: X_n\longrightarrow Y_{n+r}\}$이다.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma X_n & \xrightarrow{x_n} & X_{n+1} \\ {\scriptstyle\Sigma\alpha_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_{n+1}} \\ \Sigma Y_{n+r} & \xrightarrow{y_{n+r}} & Y_{n+r+1} \end{array}$$

r 寫像 : $\underset{\sim}{X}\longrightarrow\underset{\sim}{Y}$ 들의 호모토피 類의 集合을 $[\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}]^r$ 또는 $[\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}]_{-r}$ 등으로 表示하기로 하자. 스펙트람 E와 공간의 組 $(X, A)\in\boldsymbol{C}^2$가 주어졌을 때 E 上에 係數를 둔 호모로지와 코호모로지를 다음과 같이 定義한다.

$$H_n(X, A;\underset{\sim}{E})=[\underset{\sim}{S}, (X/A)\wedge\underset{\sim}{E}]=\pi_n((X/A)\wedge\underset{\sim}{E})$$
$$=\underset{\overrightarrow{i}}{lim}\,\pi_{n+i}((X/A)\wedge E_i)$$

$$H^n(X, A;\underset{\sim}{E})=[\underset{\sim}{S}(X/A),\underset{\sim}{E}]^n=\underset{\overrightarrow{i}}{lim}[\Sigma^i(X/A),\ E_{i+1}]$$

여기서 $\{H_n\}$, $\{H^n\}$는 앞서 말하였던 (코)-호모로지論의 條件 1), 2)를 만족함의 證明은 容易하다. 任意의 공간 X에 對하여

$$H_*(X;\underset{\sim}{E})=H_*(X,\phi;\underset{\sim}{E}),\quad H^*(X;\underset{\sim}{E})=H^*(X,\phi;\underset{\sim}{E})$$

라 놓으면 $*\in X\in\boldsymbol{C}^*$에 對하여

$$\tilde{H}_*(X;\underset{\sim}{E})=H_*(X,*;\underset{\sim}{E}),\quad \tilde{H}^*(X;\underset{\sim}{E})=H^*(X,*;\underset{\sim}{E})$$

을 定義한다. 이들은 §4에서 使用되어진 호모로지 및 코호모로지이다.

3. 코보디즘 캬테고리

$\boldsymbol{R}$ 上의 微分可能(C^∞)多樣體 M_1, M_2를 생각하자. 이때 M_1과 M_2의 素合(disjoint union)을 $M_1\cup M_2$로 表示하면 이것은 또한 微分可能多樣體가 된다. M_1, M_2의 境界를 各各 $\partial M_1, \partial M_2$로 表示하면 $\partial(M_1\cup M_2)=\partial M_1\cup\partial M_2$이다. 特히 微分可能($C^\infty$)寫像(differentiable map)$f: M_1\rightarrow M_2$이 $f(\partial M_1)\subset\partial M_2$를 만

즉 할때 $f|\partial M_1$ 도 微分可能寫像이 되고 $f|\partial M_1$ 도 또한 微分可能多樣體가 된다.

여기서 우리는 카테고리 $\boldsymbol{D}$ 를 定義한다. 그 對象은 컴팩트 微分可能(C^∞) 多樣體($\boldsymbol{R}$ 上의)이고 모피즘들은 多樣體들 사이의 微分可能(C^∞)寫像으로 境界를 境界로 보낸 것 만을 取한다. 이때 $\boldsymbol{D}$ 는 有限合을 가지며,

$$\begin{array}{c}\partial : \boldsymbol{D} \longrightarrow \boldsymbol{D} \\ \quad \Cup \qquad \Cup \\ \quad M \longrightarrow \partial M\end{array}$$

는 加法函手(additive functor) $(\partial \subset M_1 \cup M_2) = \partial M_1 \cup \partial M_2$ 의 뜻)가 된다. 여기서 $\partial M = \phi$ 도 許容되며, 空集合으로 된 多樣體는 $\boldsymbol{D}$ 에서 始對象(initial object)인 것이다. 恒等函手 $I : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{D}$ 도 앞서의 意味에서 加法函手이다. $\boldsymbol{D}$ 의 모피즘 $f : M_1 \to M_2$ 에 對하여 可換圖

$$\begin{tikzcd} \partial M_1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f|\partial M_1"'] & M_1 \arrow[d, "f"] \\ \partial M_2 \arrow[r, hook, "i"] & M_2 \end{tikzcd}$$

를 얻기 때문에 包含寫像 $i : \partial \to I$ 는 自然變換이 된다. 뿐만 아니라 **Whitney 매장 定理**(Whitney imbedding theorem)에 의하면 微分可能多樣體는 어떤 可算次元의 유크릿드 공간의 部分多樣體와 同型이 되므로 $\boldsymbol{D}$ 는 小部分카테고리(small subcategory) $\boldsymbol{D}_0$ 를 가지며, $\boldsymbol{D}$ 의 各 對象은 $\boldsymbol{D}_0$ 의 어느 對象과 同型이 된다. 以上의 性質을 抽象化하여

定義 3 코보디즘 카테고리$(\boldsymbol{C}, \partial, i)$는 다음을 만족함을 말한다.

1) $\boldsymbol{C}$ 는 카테고리이고, 有限合 및 始對象을 갖는다.

2) $\partial : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ 는 加法函手이고 $X \in \boldsymbol{C}$ 에 對하여 $\partial\partial X$ 는 始對象이다.

3) ∂ 와 恒等函手 $I : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ 에는 自然變換 $i : \partial \to I$ 가 있다.

4) $\boldsymbol{C}$ 는 小部分카테고리 $\boldsymbol{C}_0$ 을 가지며 $\boldsymbol{C}$ 의 對象은 $\boldsymbol{C}_0$의 어느 對象과 同型이다.

例 5 $(\boldsymbol{D}, \partial, i)$ (앞서 記述하였듯이)는 코보디즘 카테고리의 代表的인 것이다.

例 6 $(\boldsymbol{C}, \partial, i)$를 코보디즘 카테고리라 하자. 이것으로 부터 새로운 코보디즘 카테고리를 다음과 같이 形成할 수 있다.

i) $\boldsymbol{B}$ 를 有限合과 始對象을 갖는 카테고리라 하자 加法函手 $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}$ 와 $\boldsymbol{B}$ 의 對象 X 에 대하여 새로운 카테고리 $\boldsymbol{C}/X$ 를 만든다. $\boldsymbol{C}/X$ 의 對象은 $\boldsymbol{C}$ 의 對象 C와 $f \in \boldsymbol{B}(F(C), X)$로 된 組 (C, f)이며 모피즘 $\tau : (C, f) \to (C', f')$는 $\tau \in \boldsymbol{C}(C, C')$로써 다음의 可換圖를 만족하는 것이다.

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{F(i)} & F(C') \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f'} & \\ & X & \end{array}$$

ϕ를 $\boldsymbol{C}$의 始對象이라 하면 唯一의 寫像 $\psi: F(\phi)\to X$가 있고 (ϕ,ψ)는 $\boldsymbol{C}/X$의 始對象이다. $(C,f),(C',f')$를 $\boldsymbol{C}/X$의 두개의 對象이라 하면 $C+C'$는 $\boldsymbol{C}$의 對象, $F(C+C')=F(C)+F(C')$는 $\boldsymbol{B}$에서의 $F(C),F(C')$의 合이 된다. 故로 $(C,f)+(C',f')=(C+C',f+f')$는 $\boldsymbol{C}/X$의 合이 된다. 即 $\boldsymbol{C}/X$는 有限合을 갖는다. $(C,f)\in\boldsymbol{C}/X$에 對하여 $\bar{\partial}(C,f)=(\partial C,f\cdot F(i_C))$되게 定義하면 $(i_C: \partial c\to c)$ 可換圖

$$\begin{array}{ccc} F(\partial C) & \xrightarrow{F(i_c)} & F(C) \\ & {\scriptstyle f\cdot F(i_C)}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f} & \\ & X & \end{array}$$

로부터 包含寫像 $i_C: \bar{\partial}(C,f)=(\partial C,f\cdot F(i_C))\to(C,f)$를 얻게된다. 故로 $(\boldsymbol{C}/X, \bar{\partial},\bar{i})$는 코보디즘 카테고리이다. 여기서 $\bar{i}: \bar{\partial}\to I$는 $\bar{i}_{(C,f)}=i(C): \partial C\to C$이다.

(ii) $\boldsymbol{S}$를 小카테고리(small category)라 하자. 카테고리 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{C})$는 對象으로 函手 $F: \boldsymbol{S}\to\boldsymbol{C}$를 取하며, 모피즘으로는 函手사이의 自然變換을 取한다. $\boldsymbol{C}$ 始對象 ϕ에 對하여 恒等函手(constant functor)

$$\begin{array}{rcl} O: \boldsymbol{S} & \longrightarrow & \boldsymbol{C} \\ \Cup & & \Cup \\ S & \longmapsto & \phi \end{array}$$

는 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{C})$의 始對象이 된다. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{C})$의 두개의 對象 F,G에 對하여 $(F+G)(S)=F(S)+G(S)$로 定義하면 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{C})$는 有限合을 가지며,

$$\begin{array}{rcl} \bar{\partial}: \boldsymbol{F}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{C}) & \longrightarrow & \boldsymbol{F}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{C}) \\ \Cup & & \Cup \\ F & \longmapsto & \partial\cdot F \end{array}$$

되게 定義하고 $\lambda: F\to G$에 對하여 $\bar{\partial}(\lambda)=\partial(\lambda): \partial\cdot F\to\partial\cdot G$, $\bar{i}: \bar{\partial}\to I$ 를

$$\bar{i}_F: \partial\cdot F\to F, \quad i_{F(S)}: \partial F(S)\to F(S)$$

로 定義하면 $(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{C}),\ \bar{\partial},\bar{i})$는 코보디즘 카테고리가 된다.

例 7 **(B,f)-多様體의 코보디즘카테고리** 이 코보디즘카테고리는 §4에서 使用할 것이다.

定義 4 位相空間 B_r에 對하여 프아이브레이숀(fibration) $f_n: B_n\to BO_n$를 생각하자, 패라컴팩트 位相空間 X上의 n次元 벡터 束 ξ $(E(\xi)\to X)$ ($\boldsymbol{R}$上의)가 類別寫像 $g: X\to BO_n$을 갖는다면, ξ 上의 (B_n,f_n) 構造(structure)는 다음의 可換圖를 만족하는 寫像 $\bar{g}$의 호모도피類를 말한다.

$$\begin{tikzcd} & B_n \arrow[d, "f_n"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"] \arrow[r, "g"] & BO_n \end{tikzcd}$$

$\boldsymbol{R}$ 上의 n 次元 微分可能(C^∞) 多樣體 M^n 의 法束(§1)에 對한 (B_r, f_r)構造에 關하여 다음의 主張이 있다.

命題 1 充分히 큰 r에 對하여 두개의 매장寫像 $\nu_1, \nu_2 : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$를 생각하자. 이것들에 대한 類別寫像을 各各 $i(\nu_1)$, $i(\nu_2)$ (§1)라 하면, 이들로써 얻어진 M^n 上의 두개의 法束上의 (B_r, f_r)構造사이에는 1-1 對應이 있다.

이 命題의 證明은 圖形

$$\begin{tikzcd} & B_r \arrow[d, "f_r"] & \\ M^n \arrow[ur, "\overline{i(\nu_1)}"] \arrow[r, "i(\nu_1)"'] & BO_r & M^n \arrow[ul, "\overline{i(\nu_2)}"'] \arrow[l, "i(\nu_2)"] \end{tikzcd}$$

에서 $[\overline{i(\nu_1)}]$ ($\overline{i(\nu_1)}$의 호모토피 類)와 $[\overline{i(\nu_2)}]$ 사이에 1-1 대응이 있다는 것을 밝히는 것인바, 이것은 r가 充分히 크기 때문에 매장 사상 $\nu_1, \nu_2 : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ 사이에 正則호모토피(regular homotopy) ($H : M^n \times I \to \boldsymbol{R}^{n+r}$는 $H(\ ,t) : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$가 밖아·넣기이며 $H(\ ,t)_* :\ T(M^n) \to T(\boldsymbol{R}^{n+r})$가 $\nu_{1*}, \nu_{2*} : T(M^n) \to T(\boldsymbol{R}^{n+r})$의 호모토피)가 있고 이 호모토피로 부터 $i(\nu_1), i(\nu_2)$ 사이의 호모토피가 誘導되고 $f_r : B_r \to BO_r$의 호모토피引上性質(homotopy lifting property)에 의하여 곧 證明되어 진다.

定義 5 프아이브레숀 $f_r : B_r \to BO_r$의 列 (B, f)는 다음의 可換圖를 만족하는 사상 $g_r : B_r \to B_{r+1}$ 들의 列과 (B_r, f_r)의 列을 合한 것을 말한다.

$$\begin{tikzcd} B_r \arrow[r, "g_r"] \arrow[d, "f_r"'] & B_{r+1} \arrow[d, "f_{r+1}"] \\ BO_r \arrow[r] & BO_{r+1} \end{tikzcd}$$

여기서 j_r는 通常的 包含寫像이다. M^n 의 $\boldsymbol{R}^{n+r}$에의 法束上의 (B_r, f_r)構造는 $\boldsymbol{R}^{n+r} \to \boldsymbol{R}^{n+r+1}$을 通하여 唯一의 (B_{r+1}, f_{r+1})構造가 定義되어 진다. (B, f)가 주어졌을 때 M^n 上의 (B, f) 構造는 M^n 의 法束上의 (B_r, f_r) 構造의 列의 同値類를 말한다. 여기서 同値類라 함은 充分히 큰 r에 對하여 (B_r, f_r) 構造가 一致됨을 말한다.

$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{f})$**多樣體**는 多樣體 M^n과 M^n 上의 (B, f)構造를 合하여 말한다.

$\boldsymbol{R}$ 上의 ω 次元 微分可能 (C^∞)多樣體 W^w와 이것의 部分多樣體 M^m로써 包含寫像 $M^m \to W^w$에 의한 法束 (M^m 上의)가 $N(M^m) \cong M^m \times \boldsymbol{R}^{w-m}$인 것이라고 생각하자. 이 경우 W^w 上의 (B, f)構造는 M^m上의 (B, f)構造를 유도한다.

定義 6 (B,f)多様體들의 코보디즘 카테고리는 對象으로 (B,f)構造를 갖는 컴팩트 微分可能多様體를 가지며, 모피즘으로는 境界를 保存하는 微分可能의 매장 寫像으로써 이것의 法束이 자명(trivial)하고, 이 寫像으로 유도되는 (B,f)構造가 變域多様體(domain manifold)上의 (B,f)構造와 一致된 것만을 갖는다. 函手를 ∂ (이 카테고리에서)는 (B,f) 多様體 W를 (B,f)構造를 갖는 多様體 ∂W로 보내며 (이 때 ∂W上의 法束은 自明이지만, 內法自明性 (inner normal trivialization)을 갖는다), 모피즘을 ∂W上의 制限(restriction)으로 보낸다. 自然變換 i는 內法自明性을 갖는 境界의 包含寫像인 것이다. 우리는 이 카테고리를 $(\boldsymbol{C}(B,f),\partial,i)$로 쓸 것이다. 以上의 說明으로 $(\boldsymbol{C}(B,f),\partial,i)$는 코보디즘 카테고리이다.

以上의 記述로 코보디즘 카테고리의 槪念을 把握하였을 것이다. 코보디즘카테고리에 同値關係를 도입하여 코보디즘半群을 形成하기로 하자.

定義 7 $(\boldsymbol{C},\partial,i)$를 코보디즘 카테고리라 하자. $\boldsymbol{C}$의 두개의 對象 X,Y에 對하여, 만약 $\boldsymbol{C}$의 對象 U,V가 존재하여서 $X+\partial U$와 $Y+\partial V$가 $\boldsymbol{C}$의 對象으로써 同型이면 X와 Y는 **코볼단트**(cobordant)라고 한다. 여기서 "+"는 $\boldsymbol{C}$속에 定義되어져 있는 合이다. 이 경우 우리는 $X\sim Y$로 表示한다. 그리고 "$\cong$"는 $\boldsymbol{C}$의 對象들의 同型을 表示하기로 한다.

命題 2 위 記號등을 使用하면

i) $\sim$는 同値關係이다. ii) $X\sim Y \Rightarrow \partial X\cong\partial Y$ iii) $X\in\boldsymbol{C}$ $\partial X\sim\phi$ (ϕ는 始對象) iv) $X\sim X'$, $Y\sim Y' \Rightarrow X+Y\sim X'+Y'$.

證明 $X\sim X$ 및 $X\sim Y\Rightarrow Y\sim X$는 自明. $X\sim Y$, $Y\sim Z$이면, $X+\partial U\cong Y+\partial V$, $Y+\partial W\cong Z+\partial T$이고 이것은 $X+\partial(U+W)\cong X+\partial U+\partial W\cong Y+\partial V+\partial W\cong Z+\partial T+\partial V\cong Z+\partial(T+V)$이다. $X\sim Y$는 $X+\partial U\cong Y+\partial V$를 뜻하며 兩邊에 ∂를 作用하여 $\partial X\cong\partial X+\phi\cong\partial X+\partial\partial U\cong\partial Y+\partial\partial V\cong\partial Y+\phi\cong\partial Y$를 얻는다.

$\partial\phi\cong\phi$임에 留意할 때 $\partial x+\partial\phi\cong\phi+\partial X$를 얻는다. $X\sim X'$, $Y\sim Y'$로 부터 $X+\partial U\cong X'+\partial U'$, $Y+\partial V\cong Y'+\partial V'$를 얻고, 따라서$X+Y+\partial(U+V)\cong X'+Y'+\partial(U'+V')$가 유도되어서 $X+Y\sim X'+Y'$이다.

定義 8 **閉多様體**는 境界가 空集合인 것(컴팩트인 조건을 必要로 할 때가 있다)을 말한다. 이것에 類似하게 任意의 코보디즘 카테고리 $(\boldsymbol{C},\partial,i)$의 對象들에 閉(closed)와 반드(bund)의 槪念을 다음과 같이 定義한다. $\boldsymbol{C}$의 對象 X는 ∂X가 始對象 일때 閉라고 말하며 $X\sim\phi$일때 반드라고 한다.

命題 3 위의 記號를 使用하여 :

i) X가 閉이고 $Y\sim X$이면 Y도 閉이다. ii) X,Y가 閉이면 $X+Y$도 閉이다. iii) X가 반드이면 X는 閉이다. iv) X,Y가 반드이면 $X+Y$도 반드이다

v) X가 반드이고 $Y\sim X$이면 Y도 반드이다.

證明 i)은 ii)의 特殊한 경우이다. X, Y가 閉이면 $\partial(X+Y)\cong\partial X+\partial Y\cong\phi+\phi\cong\phi$이다. X가 반드이면 $X\sim\phi$ 곧 $X+\partial U\cong\phi+\partial V$ 이다. 兩邊에 ∂를 作用하여 $\partial X\cong\phi$ 이다. iv), v)도 거이 自明,

위 命題로 우리는 다음을 알 수 있다. $\boldsymbol{C}$의 閉對象들의 同値類들은 集合이 되고 $\boldsymbol{C}_0$는 小카테고리 이기 때문에) $\boldsymbol{C}$의 合算을 이 集合에 도입하면 閉가 되고, 結合 및 可換律을 만족하며 單位元(unit)으로 반드對象의 同値類를 가짐을 알수 있다.

定義 9 코보딕즘카테고리$(\boldsymbol{C},\partial,i)$의 **코보딕즘半群**은 $\boldsymbol{C}$의 閉對象들의 同値類로 된 集合으로 $\boldsymbol{C}$의 合算을 合算으로 갖는 것을 말한다. 이것은 $\Omega(\boldsymbol{C},\partial,i)$로 表示되며, $\Omega(\boldsymbol{C},\partial,i)$가 半群임은 위記述로 分明하다.

例 5의 코보딕즘카테고리$(\boldsymbol{D},\partial,i)$의 $\Omega(\boldsymbol{D},\partial,i)$는 其實 群이 되며 閉多様體들의 2를 法으로 한 同境類(unoriented cobordism class)들로 된 Thom의 코보딕즘群 η_*과 同型임을 알 수 있다([5]). 例 6의 (i)에서 $(\boldsymbol{C},\partial,i)$代身에 $(\boldsymbol{D},\partial,i)$를 取하면 코보딕즘 카테고리$(\boldsymbol{D}/x,\bar{\partial},\bar{i})$를 얻는다. 이때 $\Omega(\boldsymbol{D}/\bar{\partial},\bar{i})$는 群이 되며, Atiyah가 처음 形成하였든 **2를 法으로 한 보딕즘 群**(unoriented bordism group) $\eta_*(X)$와 同一하다([5]).

例 7에서 形成하였든 (B,f)多様體의 코보딕즘 카테고리$(\boldsymbol{C}(B,f),\partial,i)$의 코보딕즘半群을 $\Omega(B,f)$로 表示하면 다음이 成立한다.

定理 1 $\Omega(B,f)$는 아벨群(abelian group)이다.

證明 M^n을 閉多様體라 하고 充分히 큰 r에 對하여 $\nu: M^n\to\boldsymbol{R}^{n+r}$는 매장사상이라 하자. 이 때 그림에서

$$\begin{array}{ccc} & & B_r \\ & \overset{\overline{i(\nu)}}{\nearrow} & \downarrow f_r \\ M^n & \xrightarrow{i(\nu)} & BO_r \end{array}$$

$\overline{i(\nu)}$는 $i(\nu)$의 B_r에의 引上寫像(lifting map)이다. 이 경우 $\nu+I: M^n\times I\to\boldsymbol{R}^{n+r}\times\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{n+r+1}$는 $M^n\times I$의 매장사상(imbedding)이며, $M^n\times I$의 法束은 r次元 벡터束이다. $M^n\times I$에서 M^n에의 射影과 $i(\nu)$ 및 $\overline{i(\nu)}$와의 結合은 $M^n\times I$의 類別寫像 및 B_r에의 引上사상을 各各 定義하여 준다. 이것에 의한 $M^n\times I$의 法束上의 (B,f)構造는 $M^n\times O$上에서 M^n의 그것과 同一하며, $M^n\times 1$에 따른 內法束(inner normal bundle)上의 (B,f)構造를 준다. 이 構造下에서 $M^n\times M^n\times 1\cong\partial(M^n\times I)$임을 알고, 따라서 $M^n+M^n\times 1\sim\phi$이다. 따라서 $\Omega(B,f)$上에서 $M^n\times 1$의 (B,f)構造는 M^n上의 (B,f)構造의 逆이 된다. 곧 $\Omega(B,f)$는 群이며, $M^m+W^w\cong W^w+M^m$는 $\Omega(B,f)$가 아벨群임을 보여 준다.

호모토피論에서는 相對호모토피(relative homotopy)를 定義하여 호모토피完全列을 유도하므로써 이 理論의 華麗함을 보여 준다. 코보디즘論은 호모토피論의 擴大이므로 相對코보디즘 半群을 定義할 수 있으며 호모토피 完全列에 類似한 完全列을 만들 수 있다(§4).

定義 10 相對코보디즘半群 S는 有限合을 가지며, 對象들의 同型類의 모임이 集合인 캬테고리라 하자 S의 對象의 組(X, X')와 (Y, Y')는 S 內에 A가 있어 $X+Y'+A\cong Y+X'+A$을 만족하는 경우 **同値**라 하며, 對象들의 同型類의 集合을 이 同値關係로 끊으면 **Grothendieck 群** $K(S)$ (代數的 K理論에서 나오는)를 얻는다. 即 (X, X'), $(Y, Y')\in K(S)$에 對하여 $(X, X')+(Y, Y')=(X+Y, X'+Y')$이고 (X, X')의 逆元은 (X', X)이며, 單位元은(X, X)인 것이다. $K(S)$가 아벨群임은 곧 알 수 있다.

두개의 코보디즘 캬테고리$(\boldsymbol{C}, \partial, i)$, $(\boldsymbol{C}', \partial', i')$를 생각하자. 이때 $K(\boldsymbol{C})$ 및 $K(\boldsymbol{C}_{ce})$등이 定義된다. 여기서 $K(\boldsymbol{C}_{ce})$는 $\boldsymbol{C}$의 閉對象들의 同型類로 만들어 진 Grothendieck 群이다. 지금 加法的函手 $F: \boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}'(F(C_1+C_2)=F(C_1)+F(C_2)$라는 뜻에서)와 自然變換 $t: \partial'F\to F\partial$는 自然同値(naturnal equivalence)로써 모든 $A\in\boldsymbol{C}$에 대하여 다음 可換圖를 만족한다고 하자.

$$
\begin{tikzcd}
\partial' F(A) \arrow[rr, "t(A)"] \arrow[dr, "i'_{F(A)}"'] & \cong & F(\partial A) \arrow[dl, "F(i_A)"] \\
& F(A) &
\end{tikzcd}
$$

캬테고리 $\boldsymbol{P}$를 다음과 같이 만든다 $\boldsymbol{P}$의 對象은 (X, Y, f)이며 $X\in\boldsymbol{C}'$, $Y\in\boldsymbol{C}$ 그리고 $f: \partial'X\longrightarrow FY$는 $\boldsymbol{C}'$에서의 同型寫像이다. (X, Y, f), $(X', Y', f')\in\boldsymbol{P}$ 사이의 모피즘은 (φ, ψ)로써 다음 可換圖를 만족시키는 것이다.

$$
\begin{tikzcd}
\partial' X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial'\varphi"'] & FY \arrow[d, "F\psi"] \\
\partial' X' \arrow[r, "f'"] & FY',
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{cases} \varphi: X\longrightarrow X' \\ \psi: Y\longrightarrow Y' \end{cases}
$$

그리고 $(X, Y, f)+(X', Y', f')=(X+X',\ Y+Y',\ f+f')$이므로 $\boldsymbol{P}$는 有限合을 가지며, 小캬테고리 $\boldsymbol{P}_0(X\in C_0',\ Y\in C_0)$가 존재한다. ($\boldsymbol{P}$의 對象은 $\boldsymbol{P}_0$의 어떤 對象과 同型이다)

$$\mathfrak{S}=\{((X, Y, f),\ (X', Y', f'))\in\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{P}\,|\,Y\cong Y'\}$$

를 定義하고 $\mathfrak{S}$에 同値關係를 다음과 같이 도입한다. 두개의 $\mathfrak{S}$의 元 (x, x'), (y, y')에 對하여 만약 $u\in\boldsymbol{P}$가 $x+u\cong y+u$, $x'+\boldsymbol{u}\cong y'+u$ 되게 존재하면 (x, x'), (y, y')는 **同値**라 하고 $(x, x')\sim(y, y')$로 쓰자. 이때 $\mathfrak{S}/\sim$는 아벨群을 만든다. 우리는 이 경우

$$\begin{array}{ccc} \beta : K(\boldsymbol{C}'_{ce}) & \longrightarrow & \mathfrak{S}/\sim \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (X, X') & \longrightarrow & ((X, \phi, j),\ (X', \phi, j')) \end{array}$$

를 가진다. 여기서 ϕ는 $\boldsymbol{C}$의 始對象 j, j'는 始對象들 사이의 唯一의 同型寫像이다. 만약에 다음의 準同型寫像의 結合

$$K(\boldsymbol{C}'_{ce}) \xrightarrow{\beta} \mathfrak{S}/\sim \xrightarrow{\alpha} K(\boldsymbol{C}'_{ce}) / \{\partial'_* K(\boldsymbol{C}') + F_* K(\boldsymbol{C}_{ce})\}$$

이 $K(\boldsymbol{C}'_{ce})$의 商準同型寫像(quotient homo.)이 되게 α가 존재한다면 相對 코보딕즘半群을 定義할 수 있다: (X, Y, f), $(Y', X', f') \in \boldsymbol{P}$에 同値關係$\sim$를 도입하자. $\alpha((X+FU,\ Y+\partial U,\ f+tU), (X'+FU',\ Y'+\partial U',\ f'+tU'))=0$을 만족하는 U, U'가 $\boldsymbol{C}$에 존재하는 경우 $(X, Y, f) \sim (X', Y', f')$라 하자 α는 群準同型寫像이므로 $\sim$는 同値관계임이 容易하게 證明되어 진다. 이때

$$\boldsymbol{P}/\sim = \Omega(F, t, \alpha)$$

를 **相對코보딕즘半群**이라 말한다. 다음과 같은 準同型寫像들이 있다.

$$\begin{array}{cccccc} \partial : \Omega(F, t, \alpha) \to & \Omega(\boldsymbol{C}, \partial, i), & F_* : \Omega(\boldsymbol{C}, \partial, i) \to & \Omega(\boldsymbol{C}', \partial', i'), & i : \Omega(\boldsymbol{C}', \partial', i') \to & \Omega(F, t, \alpha) \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ (X, Y, f) \mapsto & Y & Y' \longmapsto & FY & X \longmapsto & (X, \phi, j) \end{array}$$

特히 다음의 三角圖形에서 $\partial i = iF_* = F_*\partial = 0$임을 알 수 있다.

$$\begin{tikzcd} \Omega(\boldsymbol{C}, \partial, i) \arrow[rr, "F_*"] & & \Omega(\boldsymbol{C}', \partial', i') \arrow[dl, "i"] \\ & \Omega(F, t, \alpha) \arrow[ul, "\partial"] & \end{tikzcd}$$

4. 코보딕즘群

패라컴팩트空間 X上의 Y次元 벡터束을 ξ라하고 그 類別寫像을 $\nu_\xi : X \longrightarrow BO_r$라 하자. 이때 普遍束(universal bundle) r^r에 대하여 $\nu^*_\xi(E(\gamma^r)) \cong E(\xi)$ (벡터 束으로써 동형)이다 $E(r^r)$의 各點은 (N_r, x)로 表示되어 지고 N_r는 $\boldsymbol{R}^\infty$의 r-平面(r-plane)이며 $x \in N_r$이므로 (即 x의 좌표는 r개의 成分 또는 이보다 작은 개수의 成分을 除外하고 모두 0이다) $E(\xi)$의 任意의 두點 사이의 內積이 定義되어 지며, 따라서 리만距離(Riemannian metric)가 定義되어 진다. 故로 $E(\xi)$의 元인 벡터들에는 길이가 定義되어 진 셈이다. ξ의 **Thom 空間** $T\xi$는 ξ의 벡터의 길이가 1 또는 1보다 큰 것들을 1點∞에 축소(collapsing)하므로써 얻어 진 공간이다. 두 패라컴팩트 공간 사이의 사상 $g : Y \longrightarrow X$가 있고 Y上의 r次元벡터 束 η에 對한 類別寫像 $\nu_\eta = \nu_\xi \cdot g : Y \longrightarrow BO_r$이면 (즉 $\eta \cong g^*\xi$) $Tg : T\eta \longrightarrow T\xi$로, g로 부터 Thom 공간 사이의 사상 Tg을 얻을 수 있다.

一般的인 包含寫像 $j_r : BO_r \longrightarrow BO_{r+1}$은 BO_r上의 $(r+1)$次元 벡터束 j_r^*

(γ^{r+1}) (γ^r 과 直線束(line vector bundle 과의 Whitney 合과 同型)을 유도하며, 이때 이것과 BO_r 上의 r 次元 벡터束 r^r 의 Thom 공간사이에는 同型關係 Tj_r : $\Sigma T\gamma^r \cong Tj_r^*(\gamma^{r+1})$가 成立된다. 故로 프아브레이숀 $f_r : B_r \longrightarrow BO_r$ 로부터 유도된 벡터束 $f_r^*(\gamma^r)$의 Thom 공간을 $TB_r(=Tf_r^*(\gamma^r))$로 表示할 때 다음의 可換圖를 얻는다.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma TB_r & \xrightarrow{Tg_r} & TB_{r+1} \\ {\scriptstyle \Sigma Tf_r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Tf_{r+1}} \\ \Sigma TBO_r & \xrightarrow[\cong]{Tj_r} & TBO_{r+1} \end{array}$$

(g_r 에 대하여서는 §3의 例7을 보라.)

$\Omega(B,f)$는 아벨群 (定理1)이다. 이것의 部分群 $\Omega_n(B,f)$로 (B,f) 構造를 갖는 閉 n 次元多樣體들의 同値類의 集合으로 取하면 :

定理 2 $\Omega_n(B,f)$와 $\varinjlim_r \Pi_{n+r}(TB_r,\infty)$는 同型이다. (여기서

$$\begin{array}{ccccc} [S^{n+r}, TB_r] & \longrightarrow & [S^{n+r+1}, \Sigma TB_r] & \longrightarrow & [S^{n+r+1}, TB_{r+1}] \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ h_r & \longmapsto & \Sigma h_r & \longmapsto & Tg_r \cdot \Sigma h_r \end{array}$$

이므로 $\lim_{r\to\infty} h_r = \cdots\cdots \Sigma Tg_{r+1} \cdot \Sigma Tg_r \cdot \Sigma h_r$ 을 얻는다. 勿論 $\varinjlim_r \Pi_{n+r}(TB_r,\infty)$는 아벨 群이며, 故로 $\Omega_n(B,f)$도 아벨群이 되며 $\Omega(B,f)$의 部分群이다.)

證明의 概要만을 記하기로 한다. 于先 準同型寫像

$$\Theta : \Omega_n(B,f) \longrightarrow \varinjlim_r \Pi_{n+r}(TB_r,\infty)$$

를 定義하자. n 次元 (B,f)多樣體 M^n 는 $\sigma \in \Omega_n(B,f)$를 代表한 것으로 생각하고 M^n 上에 (B,f)構造를 주는 引上寫像$i(\nu)$를 갖는 장매사상 $\nu : M^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^{n+r}$ 라 하자. 이 경우의 M^n 의 法束의 全空間 $N(M^n)$는 $\boldsymbol{R}^{n+r} \times \boldsymbol{R}^{n+r}$ 의 部分空間이라 생각 할 수 있고 縮閉寫像(evolution map)

$$\begin{array}{ccc} e : \boldsymbol{R}^{n+r} \times \boldsymbol{R}^{n+r} & \longrightarrow & \boldsymbol{R}^{n+r} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$$

아래 $N(M^n)$는 微分可能하게 寫像되어 지며, $M^n = M^n \times O \subset N(M^n)$에는 매장사상 ν와 一致한다. 따라서 充分히 작은 ε에 對하여 벡터의 길이가 ε보다 작은 $N(M^n)$의 元들로 된 部分空間 N_ε은 $e|N(M^n)$에 의하여 $\boldsymbol{R}^{n+r}$ 속으로 매장이 된다. $S^{n+r} = \boldsymbol{R}^{n+r} \cup \infty$ 라 할 수 있기 때문에 $N_\varepsilon \subset \boldsymbol{R}^{n+r}$ 이므로, 사상 $C : S^{n+r} \longrightarrow N_\varepsilon/\partial N_\varepsilon$ 을 ∂N_ε 上 및 N_ε 의 밖에 있는 $\boldsymbol{R}^{n+r} \cup \infty$ 의 모든點을 한 點으로 축소시키므로써 定義한다. 그리고 다음의 寫像을 定義한다.

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon^{-1}: N_\varepsilon|\partial N_\varepsilon & \longrightarrow & TN(M^n) \\ \Cup & & \Cup \\ [a] & \longmapsto & [(1/\varepsilon)a] \end{array}$$

類別寫像 $i(\nu): M^n \longrightarrow BO_r$ 에 對하여 다음의 可換圖를 想起하자.

$$\begin{tikzcd} & B_r \arrow[d, "f_r"] \\ M^n \arrow[ur, dashed, "\overline{i(\nu)}"] \arrow[r, "i(\nu)"'] & BO_r \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N(M^n) \arrow[r, "i(\nu)_*"] \arrow[d, "\pi"'] & E(\gamma^r) \arrow[d] \\ M^n \arrow[r, "i(\nu)"] & BO_r \end{tikzcd}$$

故로 다음의 可換圖를 얻는다.

$$\begin{tikzcd} N(M^n) \arrow[r, "i(\nu)_*\times(\overline{i(\nu)}\cdot\Pi)"] \arrow[d, "\pi"'] & E(\gamma^r)\times B_r \cong E(f_r^*(\gamma^r)) \arrow[d] \\ M^n \arrow[r, "\overline{i(\nu)}"] & B_r \end{tikzcd}$$

故로 $T(i(\nu)_*)\times(\overline{i(\nu)}\cdot\pi): TN(M^n) \longrightarrow TB_r$ 를 얻고 $\theta_r = T(i(\nu)_*\times(\overline{i(\nu)}\cdot\pi)\cdot\varepsilon^{-1}\cdot C: (S^{n+r},\infty)\longrightarrow(TB_r,\infty)$을 얻는다 이때

$$\begin{array}{ccc} \Theta: \Omega_n(B,f) & \longrightarrow & \varinjlim_r \Pi_{n+r}(TB_r,\infty) \\ \Cup & & \Cup \\ \sigma & \longrightarrow & [\varinjlim_r \theta_r] \end{array}$$

로 定義한다. Θ 는 群同型寫像임을 證明하여야 하지만 省略한다([5]). 코보디즘 群 $\Omega_n(B,f)$사이에 完全列이 있음을 살펴보기로 하자. 다음 可換圖에서

$$\begin{tikzcd} B_r \arrow[r, "g_r"] \arrow[d, "C_r"'] \arrow[dd, bend right=60, "f_r"'] & B_{r+1} \arrow[d, "h_{r+1}"] \arrow[dd, bend left=60, "f_{r+1}"] \\ d_r \arrow[r, "k_r"] \arrow[d, "h_r"'] & C_{r+1} \arrow[d, "d_{r+1}"] \\ BO_r \arrow[r, "j_r"] & BO_{r+1} \end{tikzcd}$$

i) f_r 와 d_r 는 프아이브레이숀(fibrelation)이고 ii) g_r, k_r 는 프아이바(fibre)를 保存하는 寫像이며 iii) (B,f) 構造는 $\{h_r\}$에 의하여 (C,d) 構造를 유도한다고 하자. 이때 函手 $h: (\mathcal{C}(B,f),\partial,i)\longrightarrow(\mathcal{C}(C,d),\partial,i)$를 유도한다. $(n+1)$ 次元 多樣體 M^{n+1} 은 (C,d) 多樣體로써, ∂M^{n+1} 上에는 (B,f) 구조가 주어져 있고, 이것의 h 에 의한 (C,d)구조는 當初의 M^{n+1} 上의 (C,d)구조를 ∂M^{n+1} 에 制限한 것과 一致한다고 假定하자(매장사상 $\nu: M^{n+1}\longrightarrow R^{n+1+r}$ 을 생각하고 다음의 도형을 보라).

$$\begin{tikzcd} & & B_r \arrow[d, "h_r"] \\ & \ominus & C_r \arrow[d, "d_r"] \\ \partial M^{n+1} \arrow[uurr] \arrow[r] & M^{n+1} \arrow[ur, "i(\nu)"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "©", near end] & BO_r \end{tikzcd}$$

(⊖ : 호모도피를 除外하고 可換, © : 可換), 여기서 $f:\partial M^{n+1}\longrightarrow h(\partial M^{n+1})$를 取하면 $[(M^{n+1},\partial M^{n+1},f)]\in \boldsymbol{P}/\sim$(§3)임을 알게 되어 곧 $[(M^{n+1},\partial M^{n+1},f)]\in \Omega(h,t,\alpha)$로 相對코보디즘半群의 元을 얻는다(§3). ∂M^{n+1}는 n次元多樣體이고 매장사상 $\partial M^{n+1}\longrightarrow \boldsymbol{R}^{n+r}$의 擴張이 매장사상 $\nu: M^{n+1}\longrightarrow \boldsymbol{R}^{n+r}\times[0,\infty)\subset \boldsymbol{R}^{n+r+1}$인 것이다. Θ의 정의 方法과 거의 同一하게 다음의 同型寫像을 만들 수 있다([5]).

$$\bar{\Theta}:\Omega_{n+1}(h,t,\alpha)\longrightarrow \varinjlim_r \Pi_{n+1+r}(TC_r, TB_r,\infty)$$

直極限(direct limit)는 完全性(exactness)을 保存함에 留意하고 다음의 可換圖를 보라.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \Omega_{n+1}(B,f) \arrow[r, "h_*"] \arrow[d, "\Theta_{n+1}"] & \Omega_{n+1}(C,d) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\Theta_{n+1}"] & {} \\ \cdots \arrow[r] & \varinjlim_r \Pi_{n+r+1}(TB_r,\infty) \arrow[r] & \varinjlim_r \Pi_{n+1+r}(TC_r,d) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \Omega_{n+1}(h,t,\alpha) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\bar{\Theta}_{n+1}"] & \Omega_n(B,f) \arrow[r] \arrow[d, "\Theta_n"] & \cdots \\ \varinjlim_r \Pi_{n+1+r}(TC_r, TB_r,\infty) \arrow[r] & \varinjlim_r \Pi_{n+r}(TB_r,\infty) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

따라서 코보디즘群 $\Omega(B,f)$, $\Omega(C,d)$ 및 相對코보디즘群 $\Omega(h,t,\alpha)$ 사이에는 完全列이 존재함을 알게 된다.

$g_r: B_r\longrightarrow B_{r+1}$를 갖는 프아이브레이숀 $f_r: B_r\longrightarrow BO_r$의 列 (B,f)가 주어지면 $Tg_r:\Sigma TB_r\longrightarrow TB_{r+1}$인 사상이 있었다. 따라서 **Thom 스펙트람** $\underset{\sim}{TB}\{TB_r,\ Tg_r\}$를 얻는다. 특히 $Tj_r:\Sigma TBO_r\longrightarrow TBO_{r+1}$는 同型이기 때문에 $\underset{\sim}{TBO}=\{TBO_r, Tj_r\}$도 스펙트람이 되고 $Tf:\underset{\sim}{TB}\to\underset{\sim}{TBO}$는 스펙트람 사이의 사상이 된다.

定義 11 環 스펙트람 $\underset{\sim}{A}$가 주어 졌을때 스펙트람寫像 $U:\underset{\sim}{TB}\to\underset{\sim}{A}$는 **Thom 類**라고 일컫는다.

(B,f)多樣體 M^n는 매장寫像 $\partial M^n\to \boldsymbol{R}^{n+r-1}$의 通常的擴大(usual extension)인 $\nu: M^n\to \boldsymbol{R}^{n+r-1}\times[0,1]=H^{n+r}\subset \boldsymbol{R}^{n+r}$를 매장 寫像으로 갖는다고 하자. 이때

引上寫像(lifting map) $i(\nu): M^{n+1}\to B_r$ 는 $T(i(\nu)_*): TN(M^n)\to TB_r$ 를 유도한다. ∂M^n 上의 法束의 全空間을 $N(M^n)'$로 表示하면

$$N(M^n)\xrightarrow{\Delta}N(M^n)\times N(M^n)\longrightarrow M^n\times TN(M^n)\longrightarrow(M^n/\partial M^n)\wedge TN(M^n)$$

로부터

$$S^{n+r}\xrightarrow{c}TN(M^n)/T(N(M^n)')\xrightarrow{\psi}(M^n/\partial M^n)\wedge TN(M^n)\xrightarrow{1\wedge T_r i(\nu)_*)}$$
$$\longrightarrow(M^n/\partial M^n)\wedge TB_r\xrightarrow{1\wedge U_r}(M^n/\partial M^n)\wedge A_r$$

를 얻는다. 여기서 Δ 는 對角寫像(diagonal map) ψ 는 앞서의 寫像들의 結合으로부터 얻어 진 것이며, c 는 Θ 의 定義에서 使用했던 寫像이다. 그런데 둘째 줄의 寫像들의 結合은 $\Pi_{n+r}((M^n/\partial M^n)\wedge A_r)$의 元을 代表하는 寫像이기 때문에 $r\to\infty$ 로써 하나의 호모로지類 $[M^n,\partial M^n]\in H_n(M^n,\partial M^n\,;\,\underset{\sim}{A})$ (§2)를 定義하여 준다. $[M^n,\partial M^n]$는 $(M^n,\partial M^n)$의 **基本類**(fundamental class)라고 일컫는다. 만약 $\partial M^n=\phi$ 이면 $[M^n]\in H_n(M^n\,;\,\underset{\sim}{A})$와 같이 쓰고 M^n 의 基本類라고 부른다. 이 경우 境界作用素(boundary operation)

$$\begin{array}{ccc}\partial: H_n(M^n,\partial M^n\,;\,\underset{\sim}{A}) & \longrightarrow & H_{n-1}(\partial M^n\,;\,\underset{\sim}{A})\\ \Cup & & \Cup\\ [M^n,\partial M^n] & \longmapsto & [\partial M^n]\end{array}$$

가 存在한다([5]).

定義 12 $g_r: B_r\to B_{r+1}$ 을 갖는 프아이브레이숀(fibration) $f_r: B_r\to BO_r$ 의 列 (B,f)에 對하여 $B=\varinjlim_{r\to\infty}\{B_r,g_r\}$ (direct limit)라 놓자. (B,f)束의 係數를 $\underset{\sim}{A}$ 에 둔 **普遍特性類**(universal characteristic class)는 하나의 코호모로지類 $x\in H^*(B\,;\,\underset{\sim}{A})$를 말한다. 패라컴팩트 공간 X上의 r次元 벡터束 ξ는 引上寫像(lifting map)$\nu_\xi: X\to B_r$ 에 의하여 (B_r,f_r)구조를 갖는다고 생각하자. 이때

$$X\xrightarrow{\nu_\xi}B_r\xrightarrow{\bar g_r}B$$

에 대하여 $x(\xi)=\nu_\xi^*\cdot\bar g_r^*(x)\in H^*(X\,;\,\underset{\sim}{A})$를 얻고, $x(\xi)$를 (B_r,f_r)束 ξ의 x-特性類(x-characteristic class)라고 말한다. M^n은 (B,f)多樣體로써 引上寫像 $\overline{i(\nu)}: M^n\to B_r$ 을 갖는다고 하자. 이때 M^n의 x-法特性類 (x-normal characteristic class)는 다음과 같이 定義된 코호모지類 $x(M^n)$이다.

$$x(M^n)=\overline{i(\nu)}^*\cdot\bar g_r^*(x)\in H^*(M^n\,;\,\underset{\sim}{A})$$

特히 M^n이 閉(B,f)多樣體이면 $x\in H^p(B\,;\,\underset{\sim}{A})$에 對하여 M^n의 **x-特性數**(x-characteristic number) $x[M^n]$는 다음과 같이 定義되어 진 $H^{p-n}(pt\,;\,\underset{\sim}{A})$의 코호모로지類이다. 지금 $x(M^n)\in H^p(M^n\,;\,\underset{\sim}{A})$는 $\chi:\Sigma^i(M^n/\phi)\to A_{p+i}$에 의하여 $[M^n]\in H_n(M^n\,;\,\underset{\sim}{A})$는 $\mu: S^{n+r}\to(M^n/\phi)\wedge A_r$에 의하여 代表되어 진다고 하면

$x[M_n]=\langle x(M^n),\ [M^n]\rangle\in H^{p-n}(pt\ ;\ \underset{\sim}{A})$는 다음의 寫像들의 結合으로 代表되어진 코호모로지 類이다.

$$S^{n+r+i}\xrightarrow{\Sigma^i\mu}\Sigma^i(M^n/\phi)\wedge A_r\xrightarrow{\chi\wedge 1}A_{p+i}\wedge A_r\xrightarrow{m_{p+i,\,r}}A_{p+i+r}.$$

여기서 $m_{p+i,r}$은 §2의 環스펙트람의 定義에서 使用하였던 寫像이다.

定理 3 閉 (B,f)多樣體 M^n과 $x\in H^p(B\ ;\ \underset{\sim}{A})$에 對하여 M^n의 x-特性數는 M^n의 (B,f)코보딕즘類에 의하여 決定된다.

證明 x-特性數는 加法的 $(x[M_1+M_2]=x[M_1]+x[M_2])$이기 때문에 $M=\partial W$인 M에 對하여 $x[M]=0$임을 증명하여야 한다. 包含寫像 $i:M\hookrightarrow W$에 대하여 $x(M)=i^*x(W)$이므로

$$\langle x(M),[M]\rangle=\langle i^*x(W),\ \partial[W,\partial W]\rangle=\langle \delta i^*x(W),\ [W,\partial W]\rangle.$$

여기서 δ는 코호모로지 完全列

$$H^p(W\ ;\ \underset{\sim}{A})\xrightarrow{i^*}H^p(\partial W=M\ ;\ \underset{\sim}{A})\xrightarrow{\delta}H^{p+1}(W,\partial W\ ;\ \underset{\sim}{A})$$

에서 온 것이므로 $\delta_i{}^*=0$이며, 故로 $\delta_i{}^*x(W)=0$이고 $x[M]=0$이다.

위 x-特性數를 利用하여 우리는

$$\Omega_n(B,f)\otimes H^p(B\ ;\ \underset{\sim}{A})\longrightarrow H_n(B\ ;\ \underset{\sim}{A})\otimes H^p(B\ ;\ \underset{\sim}{A})$$
$$\longrightarrow H^{p-n}(pt\ ;\ \underset{\sim}{A})$$

$(\otimes\times\otimes\boldsymbol{R})$인 寫像을 얻기 때문에 $\Omega_n(B,f)\to H_n(B\ ;\ \underset{\sim}{A})$인 寫像이 定義되어 진다.

參 考 文 獻

[1] Joel M. Cohen; *Stable Homopy*, Springer-Verlarg (1970)

[2] Dale Husemoller: *Fibre Bundles*, McGraw-Hill Book Company (1966)

[3] John Milnor: *A Survey of Cobordism, Theory*, Enseignement Mathematique, 9 (1962), 16-23

[4] ______: *Lectures on The h-Cobordism Theorem*, Princeton Univ. Press (1955)

[5] Robert E. Stong: *Notes on Cobordism Theory* (1968)

[6] Andrew H. Wallance: *Differential Topology*, W. A. Benjamin, INC. (1968)

全北大學校