韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1975. 6 Vol. XIII No. 3

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Jun. 1975. Vol. XIII No. 3

Young의 不等式에 關하여

江原大學 金 道 相

Young의 不等式은 數學敎育的인 面에서 보면 定積分의 應用이라는 點에서 意義가 있다.

不等式의 內容은 다음과 같다.

函數 $f(x)$가 $x\geqq 0$에서 連續인 單調增加函數이고 $f(0)=0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$일때 $f(x)$의 逆函數를 $g(x)$라 하면

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b g(x)dx \geqq ab \quad (a\geqq 0,\ b\geqq 0)$$

但 等號는 $b=f(a)$인 경우이다.

이 不等式에 對한 證明은 直觀的으로 간단히 해결된다.

即 위의 條件을 만족하는 함수 $y=f(x)$가 表示하는 曲線이 點$(a, 0)$을 지나 y軸에 平行인 直線 및 點$(0, b)$를 지나 x軸에 平行인 直線과 各各 만나는 點을 P, Q라 하고 AP와 BQ의 交點을 R라 하면 面積關係에서 $\triangle$OAP$+\triangle$OBQ$\geqq$ □OARB가 成立한다는 事實에서 쉽게 證明되므로 高等學校에서도 指導할 수 있다.

그러나 定理의 逆은 쉽게 證明되지 않는다.

이 論文에서는 定理의 逆을 증명하고자 한다. 方法은 現代解析學의 觀點에서 Operator를 사용한다는 것이다.

〔定理〕 $0\leqq t<\infty$인 모든 t에 對하여 定義되고 다음 條件을 만족하는 實數値函數 f의 Collection을 F라고 表示하자.

i) $f(0)=0$

ii) f는 $0\leqq t<\infty$에서 連續인 單調增加函數이고 $\lim_{t\to\infty} f(t)=+\infty$

그리고 T : F→F는 다음을 만족하는 Operator라 하자.

(1) $T[f](0)=0,\ f\in F$

(2) $xy\leqq T[f](x)+T[f](y),\ f\in F,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$

(3) $^{\forall}f\in F,\ b=f(a)$이면 $ab=T[f](a)+T[f](b)$

그러면

$$T[f](x)=\int_0^x f(t)dt,\quad x\geqq 0$$

〈證明〉 (3)으로부터

$$T[f^{-1}](f(x))=xf(x)-T[f](x) \tag{4}$$

또 $f(f^{-1}(x))=x$이므로

$$T[f](f^{-1}(x))=xf^{-1}(x)-T[f^{-1}](x) \tag{5}$$

(2)에서 y에 $f(x)$를, x에 $x+h$를 代置하여 (4)를 사용하면

$$\begin{aligned}(x+h)f(x)&\leqq T[f](x+h)+T[f^{-1}](f(x))\\&=T[f](x+h)+xf(x)-T[f](x)\end{aligned}$$

따라서

$$hf(x)=(x+h)f(x)-xf(x)\leqq T[f](x+h)-T[f](x) \tag{6}$$

(6)은 $x>0$, 充分히 적은數 h에 對하여 成立한다.

한편 $f^{-1}(t)=x+h$라 하고 (5)를 적용하면

$$\begin{aligned}T[f](x+h)-T[f](x)&=T[f](f^{-1}(t))-T[f](x)\\&=tf^{-1}(t)-T[f^{-1}](t)-T[f](x)\\&=(x+h)f(x+h)-T[f^{-1}](t)-T[f](x)\\&=hf(x+h)+xf(x+h)-T[f](x)-T[f^{-1}](t)\end{aligned}$$

그런데 (2)에 의하여

$$xf(x+h)-T[f](x)\leqq T[f^{-1}](f(x+h))$$

이므로

$$\begin{aligned}&T[f](x+h)-T[f](x)\\&\leqq hf(x+h)+T[f^{-1}](f(x+h))-T[f^{-1}](t)=hf(x+h)\end{aligned} \tag{7}$$

(6)과 (7)을 결합하면

$x\geqq 0$와 充분히 적은 陽數 h에 對하여

$$f(x)\leqq \frac{T[f](x+h)-T[f](x)}{h}\leqq f(x+h)$$

分明히 $x>0$와 充分히 적은 陰數 h에 대하여는 反對의 不等式이 成立한다.

이때 f의 連續性은 $dT[f](x)/dx$가 存在하고

〔page 4로 계속〕