韓國數學教育學會誌〈數學教育〉
1975. 12 Vol.XIV No. 1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1975. Vol XIV No. 1

INVERTIBILITY OF FREDHOLM OPERATORS IN $H^\infty+C$

by

Kil-Woung Jun

Seoul National University, Seoul, Korea.

1. Introduction

Let L denote the algebra of bounded operators on H^2, K the uniformly clesed two-sided ideal of compact operators in L, and π the homomorphism of L onto L/K. An operator A in L is said to be a Fredholm operator if A has a closed range and both a finite dimensional kernel and cokernel.

Let $H^\infty+C$ be the linear span of H^∞ and C. Sarason shows in [1] that $H^\infty+C$ is a closed subalgebra of L^∞. This paper shows the characterization of the invertibility of Fredholm operators in $H^\infty+C$.

2. Main theorem

Lemma 1 [2]. If φ is a function in $H^\infty+C$, then $T\varphi$ is a Fredholm operator iff φ is invertible in $H^\infty+C$.

Theorem1 If φ is a function in $H^\infty+C$, then $T\varphi$ is a Fredholm operator iff there exist $\delta, \varepsilon>0$ such that $|\varphi(re^{it})|\geq\varepsilon$ for $1-\delta<r<1$, where φ is the harmonic extension φ to unit disc D.

proof. Let φ be a function in $H^\infty+C$ such that

$$|\hat{\varphi}(re^{it})|\geq\varepsilon>0 \text{ for } 1-\delta<r<1$$

Choose Ψ in H^∞ and an integer n such that $||\varphi-z^{-n}\Psi||_\infty<\varepsilon/3$. Then there exists $\delta_1>0$ such that for $1-\delta_1<r<1$, we have

$$|z^{-n}\Psi(re^{it})-\hat{z}^{-n}\hat{\Psi}(re^{it})|<\varepsilon/3.$$

Therefore, for $1-\delta_1<r<1$ we have that

$$|\hat{\varphi}(re^{it})-r^ne^{-int}\hat{\Psi}(re^{it})|<2\varepsilon/3.$$

and hence $|\Psi(re^{it})|\geq\varepsilon/3$ if we also assume $r>1-\delta$. Let $z_1,\cdots,z_n$ be the zeros of the analytic function $\hat{\Psi}(z)$ on D counting multiplicities. Then we can find a function θ in H^∞ such that $\Psi=p\theta$, where $p=(z-z_1)\cdots\cdots(z-z_n)$, Since $\hat{\Psi}=\hat{p}\hat{\theta}$, we conclude that θ dose not vanish on D and is bounded away from zero in a neighborhood of the boundary. Therefore, θ is invertible in H^∞. Since p is invertible, it follows that $\Psi=pe$, and hence $z^{-n}\Psi$ is invertible in $H^\infty+C$. Since $\lim\limits_{r\to1^-}||\varphi-\varphi_r||_2=0$, where $\varphi_r(e^{it})=\varphi(re^{it})$, we have $|\varphi(e^{it})|\geq\varepsilon$ a.e. and hence $|z^{-n}\Psi|\geq2\varepsilon/3$ a.e. Therefore, $||(z^{-n}\Psi)^{-1}||<3/2\varepsilon$ and hence φ is invertible in $H^\infty+C$. By Lemma 1, $T\varphi$ is a Fredholm operator. Conversely we again approximate φ by a function of the form $z^{-n}\Psi$ with Ψ in H^∞ and analyze the inner and outer factors of Ψ. We obtain the desired result.

Reference

1. D.E.Sarason, Generalized interpolation on H^∞, Trans. Amer. Math. Soc. 127(1967), 179-203.

2. R.G.Douglas, Toeplitz and Wiener-Hopf operaors in $H^\infty+C$. Bull. Amer. Mtcath. So. 74(1968). 895-899.

<雜 報>

人文系 高等學校 數學科 敎育課程

文 敎 部

I. 일반 목표

1. 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해시켜서, 수학의 체계를 명확하게 파악하고 논리적으로 사고하는 태도와 능력을 기른다.

2. 수학의 용어와 기호 사용에 대한 뜻을 깊이 이해시켜서, 수학적인 사실을 간결하고 명확하게 표현할 수 있는 능력을 기른다.

3. 수학의 기본적인 지식과 기능을 습득시키고, 이를 능률적으로 활용하여 창의적으로 문제를 발견, 해결하는 힘을 길러서, 국가 사회 발전에 기여할 수 있게 한다.

II. 수 학(I)

1. 목 표

가. 집합적인 고찰에 의한 개념 파악을 바탕으로 명제의 합성이나, 상호 관계 등을 이해시켜서, 논리적으로 사고할 수 있는 능력을 기른다.

나. 수를 복소수 범위로 확장하고, 수 집합의 대수적 구조를 규명하여 수 체계를 파악하게 하고, 수식의 기본적인 개념법칙의 이해와 아울러 이를 정확하게 효율적으로 활용할 수 있는 능력을 기른다.

다. 좌표에 대한 개념을 깊이 이해시켜서, 기본적인 도형의 성질이나 관계를 고찰할 수 있는 능력을 기른다.

라. 함수의 개념과 성질을 파악하고, 함수의 극한 및 미적분의 기본적인 개념, 법칙 등을 이해시켜서, 간단한 다항함수의 범위에서 이를 활용할 수 있는 능력을 기른다.

마. 확률, 통계의 기본적인 개념, 법칙 등을 이해시켜서, 통계적인 사고 방법을 적극 활용할 수 있는 능력을 기른다.

2. 내 용

가. 집 합

(1) 집합의 연산 법칙

(2) 명제의 연산

(가) 명제의 합성

(나) 조건문

(다) 진리값과 진리표

(3) 용어와 기호

드·모르강의 법칙, 합성명제, 논리곱, $p \wedge q$, 논리합, $p \vee q$, 부정 $\sim p$, 조건문, $p \Rightarrow q$, 쌍조건문, $p \leftrightarrow q$, 진리값, 참, T(true), 거짓, F(false), 진리표, 필요조건, 충분조건, 필요충분조건, 이대우, 동치명제, $p \equiv q$, 항진명제, 모순명제, 진리집합.

나. 대 수

(1) 지수와 로그

(가) 거듭제곱과 거듭제곱근

(나) 지수의 확장(유리수 지수까지)

(다) 지수 법칙

(라) 로그의 뜻

(마) 로그의 성질

(바) 상용 로그

(사) 로그자의 원리

(2) 수 체계

(가) 실수 체계

(나) 복소수의 체계

① 복소수의 연산

② 상등 관계

③ 연산에 관한 성질

(3) 다항식

(가) 다항식의 성질

(나) 다항식의 연산
(다) 인수분해
(라) 약수, 배수(일변수다항식)
(마) 나머지정리

(4) 유리식과 무리식
(가) 유리식의 성질
(나) 유리식의 연산
(다) 간단한 무리식의 연산

(5) 방정식
(가) 삼원일차연립방정식
(나) 이차방정식
① 이차방정식의 해법
② 판별식(실근, 중근, 허근)
③ 근과 계수와의 관계
(다) 삼, 사차방정식의 인수분해에 의한 해법

(6) 부등식
(가) 이차부등식의 해법
(나) 간단한 절대부등식

(7) 수 열
(가) 등차수열
(나) 등비수열
(다) 간단한 잡수열
(라) 수학적 귀납법

(8) 순서도
(가) 순서도의 규약
(나) 순서도에 의한 문제 해법

(9) 용어와 기호

거듭제곱근, $\sqrt[n]{a}$, 밑, 로그, $\log_a X$, 상용로그, 진수, 지표, 가수, 로그자, 허수단위, i, 복소수, $a+bi$, 켤레복소수, $\overline{a+bi}$, 복이차식, 항등식, 미정계수법, 나머지정리, 인수정리, 조립젯법, 판별식, 실근, 중근, 허근, 조건부등식, 절대부등식, 수열, 첫째항, 끝항, 일반항, 등차수열, 공차, 등차중항, 등비수열, 공비, 등비중항, $\sum$, 수학적 귀납법, 순서도.

다. 기 하

(1) 도형의 방정식
(가) 평면상의 좌표
① 두 점 사이의 거리
② 선분의 분점
(나) 직선의 방정식
① 직선의 방정식
② 평행 관계
③ 수직 관계
④ 점과 직선 사이의 거리
(다) 원의 방정식(표준형)
(라) 포물선의 방정식(표준형)
(마) 타원의 방정식(표준형)
(바) 쌍곡선의 방정식(표준형)
(사) 간단한 변환
① 평행 이동
② 대칭 이동(원점, 축, $y=x$)
(아) 부등식의 영역

(2) 용어와 기호

타원, 쌍곡선, 준선, 촛점, 점근선, 내부, 외부

라. 해 석

(1) 함수 관계
(가) 대응 관계
(나) 함수
① 역함수
② 합성함수
③ 함수의 연산
(다) 다항함수
(라) 간단한 유리함수
(마) 간단한 무리함수

(2) 삼각함수
(가) 원운동
(나) 삼각함수의 정의
(다) 삼각함수의 기본 성질
(라) 삼각형에의 응용

(3) 수열의 극한
(가) 수열의 극한
(나) 무한수열의 수렴, 발산
(다) 무한수열의 합
(라) 무한등비수열의 합

(4) 함수의 극한과 연속성
(가) 실수의 연속성
(나) 함수의 극한
(다) 연속함수의 극한값에 관한 연산
(라) 다항함수의 연속성

(마) 유리함수의 연속성

(5) 다항함수의 미분법

(가) 미분계수

(나) 도함수

① 도함수의 정의

② 합, 차, 곱의 도함수

(6) 도함수의 응용

(가) 접선의 기울기

(나) 함수의 증감

(다) 함수의 극대, 극소

(라) 속도

(7) 다항함수의 적분법

(가) 부정적분

(나) 정적분

(다) 적분의 기본 정리와 계산

(8) 정적분의 응용

(가) 면적

(나) 회전체의 체적

(다) 속도와 거리

(라) 근사값

(9) 용어와 기호

단사함수, 전사함수, 전단사함수, 항등함수, 역함수, 합성함수, 다항함수, $f: x \to y$, $f^{-1}: x \to y$, $f(x)$, $f^{-1}(x)$, 주기, 주기함수, 원함수, 삼각함수, 라디안, 일반각, 동경, 사인, sin, 코사인, cos, 탄젠트, tan, 코탄젠트, cot, 시이컨트, sec, 코시이컨트, cosec, 사인법칙, 코사인법칙, 해론의 공식, 극한, 극한값, lim, 수렴, 발산, 무한대, ∞, 무한수열, 무한등비수열, 무한등비급수, 증분, $\triangle x$, 미분계수, 도함수, $f(x)$, y, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{dy}{dx}$, 극대, 극소, 극치, 부정적분, 적분상수, $\int f(x)dx$, 구분구적분, 정적분, $\int_a^b f(x)dx$, $[F(x)]_a^b$

마. 통 계

(1) 순열과 조합

(가) 순열

(나) 조합

(다) 이항정리

(2) 확률

(가) 확률의 뜻

(나) 확률의 계산

(다) 기대값

(3) 통계

(가) 평균과 표준편차

(나) 확률분포

(다) 이항분포, 정규분포

(라) 추정과 검정

(4) 용어와 기호

순열, nPr, 계승, $n!$, 조합, nCr, 이항정리, 이항계수, 수확적 확률, 통계적 확률, 사건, 여사건, 배반사건, 독립사건, 종속사건, 독립시행, 기대값, 확률분포, 확률변수, 이산변수, 연속변수, 대수법칙, 이항분포, 정규분포, 임의추출, 표본평균, 모평균, 추정, 신뢰도, 신뢰구간, 검정, 유의수준.

3. 지도상의 유의점

가. 지도 내용은 영역별로 지도 항목만을 제시한 것이므로 지도 계획 작성에 있어서는 다음 사항을 유의하여 적절히 재구성하여야 한다.

(1) 내용에 제시된 순서대로 반드시 지도하여야 한다는 것은 아니나 지도 항목이 누락되어서는 아니 된다.

(2) 이미 학습한 내용을 토대로 전후 관계나 난이도를 충분히 고려하여 계통적으로 조직하여야 한다.

(3) 지역성이나 학교의 실정 및 학생의 능력, 적성 등을 충분히 고려하여야 한다.

나. 다른 교과와의 관련을 충분히 고려하여 전체적으로 유효한 학습이 이루어지도록 하여야 한다.

다. 내용 지도에 있어서는 학습 효과를 올리기 위하여 다음 사항을 유의하여 지도하여야 한다.

(1) 학생들이 흥미와 관심을 가지도록 실용적인 소재와 자료를 많이 활용하도록 한다.

(2) 직업 과정을 선택하는 학생들 지도에 있어서는 직업 교육을 주로 하는 교과목의 내용과 가급적 관련을 지어가며 지도하고, 취급 내용에 있어서는 기본 원리, 법칙의 뜻과 응용 방법 등을 이해시키는 데 중점을 두어야 한다.

III. 수　학 (II)

1. 목　표

가. 행렬에 대한 기본 개념, 성질 등을 이해시켜서, 이를 활용할 수 있는 능력을 기른다.

나. 평면 기하를 통하여 공리의 뜻과 공리적 구성 및 공간 도형의 기본 개념, 법칙을 이해시켜서, 논리적 사고 능력을 기른다.

다. 공간 좌표와 벡터의 기본 개념을 이해시켜서, 도형의 성질을 고찰하는 능력을 기른다.

라. 초등초월함수의 성질과 미적분의 개념, 법칙 등을 깊이 이해시켜서, 이를 활용할 수 있는 능력을 기른다.

2. 내　용

가. 대　수

(1) 방정식
　(가) 분수방정식
　(나) 무리방정식
(2) 부등식
　(가) 간단한 삼, 사차부등식
　(나) 간단한 유리부등식
(3) 행렬
　(가) 행렬의 뜻
　(나) 행렬의 연산(3×3 행렬의 범위)
　(다) 연립방정식
　(라) 간단한 일차변환(평면상에서 원점을 옮기지 않은 일차변환)
(4) 용어와 기호
무연근, 행렬, 행렬의 원소, $m \times n$, 행렬, 단위행렬, 역행렬, A^{-1}, 일차변환.

나. 기　하

(1) 평면 기하의 공리적 구성
　(가) 공리, 정의, 정리의 뜻
　　① 결합의 공리
　　② 합동의 공리
　　③ 평행성의 공리
　(나) 평면 기하의 구성
(2) 공간 도형
　(가) 공간에서의 두 직선
　(나) 공간에서의 두 평면
　(다) 간에서의 직선과 평면
　(라) 이면각
　(마) 삼수선의 정리
　(바) 정사영
(3) 평면상의 벡터
　(가) 벡터의 뜻
　(나) 벡터의 상등
　(다) 벡터의 덧셈, 뺄셈
　(라) 벡터의 실수와의 곱
　(마) 벡터의 내적
　(바) 벡터의 유향 직선상에의 사영
(4) 공간 좌표
　(가) 점의 좌표
　(나) 두 점 사이의 거리
　(다) 선분의 분점
　(라) 직선의 방정식
　(마) 직선의 방향코사인과 방향비
　(바) 평면의 방정식
　(사) 구의 방정식
(5) 공간 벡터
　(가) 공간 벡터의 뜻
　(나) 공간 벡터의 덧셈, 뺄셈
　(다) 공간 벡터의 실수와의 곱
　(라) 공간 벡터의 내적
(6) 용어와 기호
공리, 결합의 공리, 합동의 공리, 평행선의 공리, 이면각, 삼수선의 정리, 정사영, 벡터, $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, 영벡터, 단위벡터, 스칼라, 유향선분, 시점, 종점, 성분, 스칼라배, 스칼라적, 내적, 방향코사인, 방향비.

다. 해　석

(1) 삼각함수
　(가) 삼각함수의 덧셈정리
　(나) 복소수의 극 형식
(2) 지수함수
　(가) 지수함수의 정의
　(나) 지수함수의 성질
(3) 로그함수
　(가) 로그함수의 정의

(나) 로그함수의 성질

(4) 미분법

(가) 미분 공식(몫의 미분법 포함)

(나) 합성함수의 미분법

(다) 음함수의 미분법

(라) 고계도함수

(마) 삼각함수의 미분법

(바) 지수함수의 미분법

(사) 로그함수의 미분법

(5) 도함수의 응용

(가) 평균치의 정리

(나) 함수의 증감

(다) 함수의 극대, 극소

(라) 곡선의 개형

(마) 속도, 가속도

(6) 적분법

(가) 부정적분

(나) 치환적분법

(다) 부분적분법

(7) 적분의 응용

(가) 면적

(나) 체적

(다) 속도와 거리

(라) 함수의 다항식 근사

(8) 용어와 기호

덧셈정리, 복소평면, 실축, 허수축, 편각, am$P(z)$ 드·므와브르의 정리, 자연로그, e, 이계도함수, $f''(x)$, y', $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$, 로올의 정리, 평균치의 정리, 변곡점, 가속도, 치환적 분법, 부분적분법, 근사식

3. 지도상의 유의점

가. 내용은 영역별로 지도 항목만을 제시한 것이므로 지도 계획 작성에 있어서는 다음 사항을 유의하여 적절히 재구성 하여야 한다.

(1) 내용에 제시된 순서대로 반드시 지도하여야 한다는 것은 아니나 지도 항목이 누락되어서는 아니 된다.

(2) 수학 I에서 학습한 내용과 관련지어 전후 관계나 난이도를 충분히 고려하여 전통적으로 조직하여야 한다.

(3) 지역성이나 학교의 실정 및 학생의 능력 적성등을 충분히 고려하여야 한다.

나. 다른 교과와의 관련을 충분히 고려하여 전체적으로 유효한 학습이 이루어지도록 하여야 한다.

다. 내용 지도에 있어서는 학습 효과를 올리기 위하여 학생들이 흥미와 관심을 가질수 있는 실용적인 소재와 자료를 많이 취급하도록 한다.