母數制約 單一方程式 推定에 관한 試論

尹　錫　範*

I

本論文은 單一方程式 推定에 있어서 事前的으로 주어진 母數에 대한 制約을 推定前의 情報로써 被說明變數(explained variables)에 適用하여 回歸하였을 때 推定量이 어떻게 바뀌게 되는가 하는 것을 考察하고 이를 發展시켜서 反復的인 計算方法을 適用하는 特定의 推定技法에 대하여 試論的으로 接近하는 데에 目的이 있다.

一部 母數에 대하여 事前的인 制約을 前提하고 이를 推定前에 被說明變數로부터 除去하는 方法은 흔히 多共線性(multicollinearity) 또는 自由度(degree of freedom)의 問題가 있을 때, 採擇되는 方法의 하나가 된다.

다음과 같은 線型 單一方程式 模型을 考慮하여 試論의 出發을 삼기로 한다.

$$Y = X\beta + u \tag{1}$$

여기에서 Y는 $n\times1$ 벡타, X는 $n\times(k+1)$ 行列, β는 $(k+1)\times1$ 벡타, 그리고 u는 $n\times1$ 벡타로서, Y는 被說明變數, X는 說明變數, β는 母數, u는 誤差, 그리고 n은 觀察值의 標本規模가 된다. 式 (1)에서 母數 β의 通常最少自乘推定量(ordinary least square estimators, OLS)은 다음과 같이 얻어진다.

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \tag{2}$$

論文의 展開 必要上 式 (1)과 (2)를 各各 分割된 行列(partitioned matrix)로 表示하면 다음과 같다.

$$Y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_1'Y \\ X_2'Y \end{pmatrix} \tag{4}$$

* 延世大學校 經濟學科 副敎授

여기에서 行列의 分割은 다음과 같이 이루어졌다.

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{X}_1\ \boldsymbol{X}_2], \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

式 (3)과 (4)는 式 (1)과 (2)의 單純한 再表現에 不過하다. 이 경우 誤差에 관하여 다음과 같은 前提가 주어졌을 때 $\hat{\beta}$은 最良線型不偏推定量(best linear unbiased estimators)이 되며 最尤推定量이 된다.

$$E(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$$
$$E(\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}) = \sigma$$
$$E(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$$

II

推定될 母數 β에 대하여 部分的으로 事前的인 制約(a priori restrictions)을 加해야 할 必要가 發生하게 된다든지 또는 事前的인 情報가 正確하게 存在하기 때문에 推定이 不必要하게 될 때 가장 簡單한 方法으로 흔히 採擇되는 것이 被說明變數에 이러한 制約을 反映하는 所謂 푸리휠터링 方法(prefiltering procedures)이라고 할 수 있다[1). 이 경우 푸리휠터링 方法은 다음과 같이 要約될 수 있다. 式 (3)에서 β_2에 대하여 事前的인 制約이 $\boldsymbol{b}_2$로 주어졌다고 하자. 그러면 被說明變數 $\boldsymbol{Y}$는 다음과 같이 處理될 수 있다.

$$\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{b}_2 \tag{5}$$

따라서 $\boldsymbol{Y}^*$을 $\boldsymbol{X}_1$만에 回歸하여 β_1의 OLS 推定量은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_1 &= (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{Y}^* \\ &= (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{b}_2)\end{aligned} \tag{6}$$

이렇게 얻어진 推定量은 誤差에 관하여 通常의 前提條件이 維持되는 限 不偏推定量이 되며 또한 最尤推定量이 된다. 卽 이는 다음과 같이 바로 說明된다.

$$\begin{aligned}E(\tilde{\beta}) &= E[(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{b}_2)] \\ &= E[(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'(\boldsymbol{X}_1\beta_1+\boldsymbol{u})\end{aligned}$$

1) Phoebus J. Dhrymes, *Distributed Lags: Problems of Estimation and Formulation*, San Francisco: Holden-Day, Inc., 1971, pp. 101~102.

$$= \beta_1 + E(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{u}$$
$$= \beta_1$$

또한 다음과 같이 尤度函數가 얻어지므로 最尤推定量은 바로 式 (6)과 같이 얻어진다.

$$L = k - \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{X}_1\beta_1)'(\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{X}_1\beta_1) \tag{7}$$

式 (7)에서 k는 一定 常數임을 表示하며 其他의 定義는 앞에서와 같다. 다만 式 (7)은 對數로 置換된 尤度函數임을 밝힌다.

이렇게 式 (6)에서 얻어진 β_1의 推定量 $\tilde{\beta}_1$은 式 (4)에서와 같이 얻어진 $\hat{\beta}_1$과 반드시 同一한 것은 아니다. 式 (4)를 좀 더 展開하면 이事實은 分明하게 밝혀진다.

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{u} \end{pmatrix} \tag{8}$$

式 (8)은 式 (4)를 한 段階 더 展開시킨 結果로서 式 (8)의 右邊 第二項의 (2×1) 벡타에서 첫번째 小行列(submatrix)이 式 (6)에서 展開되는 $(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{u}$와 언제나 一致하지는 않는 것을 쉽게 알 수 있다.

이러한 事實을 單純한 경우에서 再確認하면 다음과 같다.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_t \tag{9}$$

式 (9)는 스칼라로 表示된 二變數 線型方程式으로 이 式의 推定을 위한 正規方程式은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_2 & \sum x_1 x_2 & \sum x_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum y \\ \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{pmatrix} \tag{1\ }$$

한편 $\beta_2 x_2$에 의하여 푸리훨터링된 正規方程式은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\beta}_0 \\ \tilde{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum x_1 \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum (y - \beta_2 x_2) \\ \sum x_1 (y - \beta_2 x_2) \end{pmatrix} \tag{11}$$

따라서 $\hat{\beta}_1 = \tilde{\beta}_1$과 $\hat{\beta}_2 = \tilde{\beta}_2$가 成立하려면 다음과 같은 條件이 具備되어야 한다[1].

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_1 \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum u \\ \sum x_1 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_0 \\ \tilde{\beta}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

1) 이 경우 이 條件이 必要・充分條件인지의 與否는 究明되지 못하였다.

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_1x_2 \\ \sum x_2 & \sum x_1x_2 & \sum x_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum u \\ \sum x_1u \\ \sum x_2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

式 (12)와 式 (13)의 첫 두 元素가 一致될 때 $\tilde{\beta}_i = \hat{\beta}_i$ $(i=0,1)$이 成立되므로 다음 두 組의 等式이 成立되어야 한다[1].

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta_1}(\sum u \sum x_1^2 - \sum x_1 \sum x_1u) \\ &= \frac{1}{\Delta_2}[\sum x_1^2 \sum x_2^2 \sum u - \sum u(\sum x_1x_2)^2 - \sum x_1u \sum x_1 \sum x_2^2 \\ &\quad + \sum x_1u \sum x_2 \sum x_1x_2 + \sum x_1 \sum x_1x_2 - \sum x_2u - \sum x_2u \sum x_2 \sum x^2] \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta_1}(n\sum x_1u - \sum x_1 \sum u) \\ &= \frac{1}{\Delta_2}[-\sum u \sum x_1 \sum x_2^2 + \sum u \sum x_2 \sum x_1x_2 + n\sum x_1u \sum x_2^2 \\ &\quad - \sum x_1u(\sum x_2)^2 - n\sum x_1x_2 \sum x_2u + \sum x_2u \sum x_1 \sum x_2] \end{aligned} \tag{15}$$

여기에서 Δ_1와 Δ_2는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= n\sum x_1^2 - (\sum x_1)^2 \\ \Delta_2 &= n\sum x_1^2 \sum x_2^2 - n(\sum x_1x_2)^2 + 2\sum x_1 \sum x_2 \sum x_1x_2 \\ &\quad - \sum x_1^2(\sum x_2)^2 - (\sum x_1)^2 \sum x_2^2 \end{aligned}$$

以上의 두 等式 關係가 成立하려면 兩邊이 零이 되는 경우를 除外하고는 다음의 條件이 成立되어야 한다.

$$\sum x_2 = 0 \tag{16-a}$$

$$\sum x_2^2 = 1 \tag{16-b}$$

$$\sum x_1x_2 = 0 \tag{16-c}$$

式 (16)은 x_2 變數가 零을 平均値로 하고 $1/n$을 分散으로 하며 x_1 變數와 確率的으로 獨立이 維持되어야 한다는 것을 말하고 있다. 따라서 x_2 變數가 標準化된 獨立變數일 때에 $\tilde{\beta}_i$는 $\hat{\beta}_i$과 一致하는 것을 알게 되었다. 即 $\tilde{\beta}_i$는 x_2가 標準化된 獨立變數가 아닌 限 언제나 OLS 推定量과 一致하지 않는다. 마찬가지로 推定量의 分散도 언제나 一致하지 않는다.

1) 이 部分은 延世大學校 大學院 應用統計學科 金秉洙君에 의하여 計算되고 確認되었다.

또한 $\hat{\beta}$와 $\tilde{\beta}$의 分散을 比較하면 다음과 같다.

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}) = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \tag{17}$$

$$\mathrm{var}(\tilde{\beta}) = \sigma^2(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1} \tag{18}$$

式 (17) 및 式 (18)을 式 (9)와 같은 경우로 制限하면 $\hat{\beta}_0$와 $\hat{\beta}_1$의 分散은 式 (16)으로 表示되는 條件이 成立할 때 $\tilde{\beta}_0$와 $\tilde{\beta}_1$의 分散과 同一하여 진다.

이는 곧 事前的인 母數制限을 加할 경우 얻어지는 推定量은 特殊한 狀況아래에서만 OLS 推定量과 同一하여 지며 또한 各各의 標準誤差도 相異하게 推定된다는 것을 말해주고 있다.

III

앞에서 論議된 一般的인 경우를 延長하여 여러가지의 特殊한 條件을 考慮에 넣고 다시 두 推定量의 性格을 分析하기로 하자.

첫째로 흔히 單一方程式의 경우에 當面하게 되는 變數에 包含된 誤差(errors in variables)의 경우를 보기로 하자. 式 (3)에서 母數에 制約이 주어진 變數가 誤差와 獨立的으로 分布를 가지고 있지 못하다고 하면 이 狀況은 다음과 같이 表示될 수 있다.

$$E(\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{u}) \neq 0 \tag{19}$$

式 (19)는 곧 $\hat{\beta}$의 期待値가 β와 一致하지 않음을 말한다. 即

$$\begin{aligned} E\begin{pmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\end{pmatrix} &= E\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{Y}\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} + E\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}'_1\boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{u}\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

式 (20)에서 η_i $(i=1, 2)$는 偏奇이다.

그러나 만일 β_2에 대하여 事前的인 制約이 주어지고 그 事前的인 制約이 正確하다면 $\boldsymbol{X}_1$이 誤差와 獨立的인 分布를 維持하는 限 $\tilde{\beta}_1$은 不偏推定量임을 쉽게 알 수 있다. 即 다음 式 (21)이 成立하게 된다.

$$E(\tilde{\beta}_1) = E[(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\ \boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{Y}^*]$$

$$= \beta_1 + E[(X_1'X_1)^{-1}X_1'u]$$
$$= \beta_1 \qquad (21)$$

이 경우 正確하게 주어진 事前的인 毋數制約은 푸리휠터링을 通하여 不偏推定量을 保障하는 것으로 알게 되었다.

둘째로 誤差에 대한 前提를 다음과 같이 一般化하였을 경우를 살펴보기로 하자.

$$E(uu') = \Omega \qquad (22)$$

여기에서 Ω는 非對角行列(non-diagonal full matrix)이다. 이 경우에 얻어지는 $\hat{\beta}$와 $\tilde{\beta}_1$의 一般化最小自乘 推定量(generalized least square estimators, GLS)은 各各 다음과 같다.[1)]

$$\hat{\beta} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y \qquad (23)$$

$$\tilde{\beta}_1 = (X_1'\Omega^{-1}X_1)^{-1}X_1'\Omega^{-1}Y^* \qquad (24)$$

또한 $\hat{\beta}$와 $\tilde{\beta}_1$의 各各의 分散은 다음과 같이 얻어진다.

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}) = (X'\Omega^{-1}X)^{-1} \qquad (25)$$

$$\mathrm{var}(\tilde{\beta}_1) = (X_1'\Omega^{-1}X_1)^{-1} \qquad (26)$$

式 (23)~(26)에 提示되고 있는 바와 같이 誤差의 分散共分散 行列이 非對角(non-diagonal)일 경우에도 $\hat{\beta}_1$과 $\tilde{\beta}_1$는 반드시 一致되지 않을 뿐만 아니라 各各의 標準誤差의 推定量도 相互 一致되지 않는 것을 알 수 있다.

셋째로 β_2의 事前制約이 잘못 주어졌을 경우 各各의 推定量을 比較하면 다음과 같다. 이미 앞에서 考察된 바와 같이 β_2에 대하여 正確한 制約이 주어졌을 경우에는 $E(X'u) \neq 0$의 特殊한 경우를 除外하고는 $\hat{\beta}_1$과 $\tilde{\beta}_1$는 모두 不偏推定量이 되는 것을 보았다. 그러나 β_2에 대한 事前制約이 式 (27)과 같이 잘못 주어졌다고 생각하자.

$$b_2 = \beta_2 + \epsilon \qquad (27)$$

여기에서 ϵ은 잘못 주어진 差異이다. 이 경우 β_1은 式 (28)과 같이 推定된다.

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_1 &= (X_1'X_1)^{-1}X_1'(Y - X_2b_2)\\ &= (X_1'X_1)^{-1}X_1'(X_1\beta_1 - X_2\epsilon + u)\\ &= (X_1'X_1)^{-1}X_1'X_1\beta_1 - (X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2\epsilon + (X_1'X_1)^{-1}X_1'u\\ &= \beta_1 - (X_1'X_1)^{-1}X_1X_2\epsilon + (X_1'X_1)^{-1}X_1'u \qquad (28)\end{aligned}$$

따라서 式 (28)에서 $\tilde{\beta}_1$의 數學的 期待値는 β_1이 되지 못하는 것을 卽時 알 수 있다. 이는

1) 計量經濟學敎科書에 흔히 「에잇킨」推定量(Aitken's estimators)이라고 通稱되는 推定方法을 말한다.

곧 다음이 成立되지 않기 때문이다.

$$E[(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2\epsilon] = 0 \tag{29}$$

따라서 $\tilde{\beta}_1$은 $E[(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2\epsilon]$ 만큼의 偏奇를 不可避하게 갖게 된다. 흔히 恣意的으로 一部 母數에 대하여 加하여지는 制約은 餘他 母數의 推定量까지도 偏奇를 갖게하는 弱點을 招來하게 된다. 따라서 一部 母數에 대하여 事前的인 制約을 주어 被說明變數에서 푸리휠터링하는 경우는 대부분의 경우 通常最小自乘法에 比하여 相對的으로 弱點을 갖는 推定量을 算出케 한다고 말할 수 있다.

IV

一部 母數에 대하여 事前的인 制約을 주고 이를 被說明變數에 反映하여 나머지 母數를 推定하는 方法은 이상에서와 같이 몇가지 弱點을 가지고 있으나, 正確한 制約이 주어질 경우 多共線性, 變數속의 誤差, 크로스 섹숀 資料의 時系列 資料와의 混用 等에서 發生하는 여러가지의 問題를 쉽게 解決해 주는 長點도 또한 지니고 있다. 特히 多共線性의 問題로 因하여 母數의 推定이 不可能하거나 또는 可能하다고 하더라도 推定量이 偏奇를 갖는 경우, 그리고 自由度의 問題 때문에 파라메타의 推定이 不可能할 경우, 이미 앞에서 分析한 바 있는 푸리휠터링의 方法을 反復的으로 適用하여 推定이 可能하다고 하면 이러한 方法에 의한 推定은 바람직하다고 할 수 있다.[1]

다음에서 展開되는 反復計算에 의한 推定方法을 單一方程式 푸리휠터 反復自乘法(Single Equation Prefiltered Iterative Least Square Method, SPILS)이라고 부르기로 하고 이의 推定方法을 考案하자. 推定될 基本模型과 誤差의 性格은 다음과 같다.

$$Y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$$

$$E(u) = 0$$

$$E(u'u) = \sigma^2$$

$$E(X'u) = 0$$

이 式들은 이미 앞에서 提示된 바 있다. 우선 첫 段階로 β_2에 대하여 다음과 같이 任意의 값으로 事前的인 制約을 준다.

$$\beta_2 = b_2^{(0)} \tag{30}$$

1) 反復的인 計算方法(iteration methods)의 適用에 관하여서는 H. Wold, "A Fixed Point Theorem with Econometric Background," *Arkiv för Mathematik* 6, (1966) 209~240, P. Dhrymes, *op.cit.*, S.M. Goldfeld and R.E. Quandt, *Nonlinear Methods in Econometrics*, Amsterdam: North-Holland, 1972, *passim* 參照할 수 있다.

式 (30)에 의하여 $\boldsymbol{Y}$를 다음과 같이 푸리휠터한다.

$$\boldsymbol{Y}^{*(0)}=\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{b}_2^{(0)} \tag{31}$$

$\boldsymbol{X}_1$만을 $\boldsymbol{Y}^{*(0)}$에 다음과 같이 回歸하여 $\boldsymbol{b}_1^{(1)}$을 求한다.

$$\boldsymbol{b}_1^{(1)}=(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'(\boldsymbol{Y}^{*(0)}) \tag{32}$$

式 (32)로 얻어진 $\boldsymbol{b}_1^{(1)}$에 의하여 $\boldsymbol{Y}$를 다시 式 (31)과 같이 푸리휠터하여 다음과 같이 다시 $\boldsymbol{b}_2^{(1)}$를 求한다.

$$\boldsymbol{b}_2^{(1)}=(\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{X}_2'(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{b}_1^{(1)}) \tag{33}$$

이렇게 얻어진 $\boldsymbol{b}_2^{(1)}$를 다시 式 (31)과 (32)처럼 利用하여 $\boldsymbol{b}_1^{(2)}$를 求한다. 이렇게 反復하여 다음과 같이 $\boldsymbol{b}_1$과 $\boldsymbol{b}_2$가 收斂할 때 그렇게 얻어진 $\boldsymbol{b}_1^{(r)}$과 $\boldsymbol{b}_2^{(r)}$을 β_1과 β_2의 推定量으로 삼는다.

$$\frac{\boldsymbol{b}_1^{(r)}-\boldsymbol{b}_1^{(r-1)}}{\boldsymbol{b}_1^{(r-1)}}<\zeta \tag{34}$$

$$\frac{\boldsymbol{b}_2^{(r)}-\boldsymbol{b}_2^{(r-1)}}{\boldsymbol{b}_2^{(r-1)}}<\zeta \tag{35}$$

여기에서 ζ는 事前에 決定된 任意의 적은 小數를 말한다. 이러한 計算節次가 任意의 $\boldsymbol{b}_2^{(0)}$의 값과 關係없이 收斂할지의 與否는 確實하지 않다. SPILS推定量은 最少限 $\boldsymbol{b}_2^{(0)}$의 값이 β_2의 近傍(neighbourhood)에서 選擇될 때 β_2를 向하여 收斂하고 또한 그 屬性이 다른 경우에 比하여 改善되리라고 믿어진다. 그러나 이 점도 「몬테・칼로」方法 (Monte Carlo method) 等에 의하여 實驗되어야만 確信할 수 있다.

參 考 文 獻

〔1〕 Dhrymes, Phoebus J., *Distributed Lags: Problems of Estimation and Formulation*, San Fransisco: Holden-Day, Inc., 1971.

〔2〕 __________, *Econometrics: Statistical Foundations and Applications*, New York: Harpe rand Row, 1970.

〔3〕 Goldfeld, S.M. and Quandt, R.E., *Nonlinear Methods in Econometrics*, Amsterdam: North-Holland, 1972.

〔4〕 Hurwicz, Leonid, "Prediction and Least Squares," *Statistical Inference in Dynamic Economic Models*, ed, by T.C. Koopmans, New York: John Wiley, 1950, pp. 266~300.

〔5〕 Klein, L.R., *A Textbook of Econometrics* 2nd ed., Englewood Cliff, N.J.: Prentice-

Hall, 1974.

[6] Koopmans, T.C., "The Equivalence of Maximum Likelihood and Least Squares Estimates of Regression Coefficient," in Koopmans, *op. cit.*, pp. 301~304.

[7] Wold, H., "A Fixed Point Theorem with Econometric Background," *Arkiv för Mathematik*, 6 (1966) pp. 209~240.

SUMMARY

Notes on Single Equation Estimations with Prefiltered A Priori Restrictions on Parameters

Suk Bum Yoon*

When a priori informations are available on the sizes of parameters of a single equation, the informations may be utilized as a priori restrictions on the parameters in estimations of other parameters in the equation. A usual method of applying the restrictions is prefiltering the explained variables by the given informations in the following manner:

$$\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{b}_2$$

where

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}_1\beta_1 + \boldsymbol{X}_2\beta_2 + \boldsymbol{u},$$

$\boldsymbol{X}_2$ is a matrix of part of explained variables, $\boldsymbol{b}_2$ a vector of a priori given parameters, and $\boldsymbol{u}$ disturbances. When $\boldsymbol{Y}^*$ is regressed only on $\boldsymbol{X}_1$ to estimate β_1, we have $\tilde{\beta}_1$ as follows:

$$\tilde{\beta}_1=(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'(\boldsymbol{Y}^*)$$

* Associate Professor of Economics and Statistics, Yonsei University.

The estimators $\tilde{\beta}_1$ is compared with the usual OLS estimators $\hat{\beta}_1$ of $\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y$ under various conditions. And a further extension is made to obtain a Wold-type iterative least squares estimator with a single equation restriction, which is named "single equation prefiltered iterative least squares estimator" (SPILS). The convergence of the iteration is not proved in the paper.