

圓板에서 同心圓上을 移動하는 熱源에 依한 過渡的 熱應力解析

金 曉 哲*

Transient Thermal Stresses in a Thin Circular Disk due to a Moving Point Source of Heat on a Concentric Circle

Hyochul Kim*

Abstract

Analytical solutions for the transient temperature distribution and quasi-static thermal stresses which arise in a thin circular disk of finite radius subjected to an instantaneous point source acting in its interior have been obtained. And the solutions have been extended to the case of a moving heat source with the aid of the Duhamel's superposition integral.

The solutions given are in the form of double infinite series, and their numerical results have been compared with the experimental temperature histories.

It can be found out that the theoretical temperature histories show a good agreement with the experimental results and the theoretical histories of thermal stresses show a good qualitative agreement with a physical phenomena.

The solutions can be applied to the problems such as a flame hardening of the cylindrical machine elements and a circular patch welding or a circular cutting of the structural member.

記 號

- a_n, A_n : 級數의 常數係數
- b_0, b_1, B_n : 級數의 常數係數
- B : Biots 數
- C : 比熱
- e_p : $\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}$
- E : 彈性係數
- G : 剪斷彈性係數
- h : 熱傳達係數
- H : h/k
- I_n : n 次의 第 1 種 變形 Bessel 函數
- J_n : n 次의 第 1 種 Bessel 函數
- k : 熱傳導度
- K_n : n 次의 第 2 種 變形 Bessel 函數
- m, n : 陽의 整數
- p : $\sqrt{s/\kappa}$

- q : 熱源의 單位길이와 單位時間 當의 熱放出量
- q_0 : $\frac{q}{c\rho}$, 熱源의 세기
- Q : $\frac{q_0}{\kappa\pi}$
- r : 圓板의 中心으로부터 任意의 點까지의 距離
- r_d : 圓板의 半徑
- r_0 : 圓板의 中心으로부터 熱源까지의 距離, 또는 熱源이 그리는 圓板과 同心인 軌跡圓의 半徑
- R : $\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0)}$, 熱源으로부터 任意의 點까지의 距離
- s : Laplace 變換의 媒介變數
- t : 時間
- t' : $\frac{\kappa}{r_d^2}t$, 無次元化된 時間
- t'' : $\frac{\kappa}{r_d^2}\tau$, 無次元化된 作業終了後 經過된 時間
- t_w : 作業에 所要된 時間

- T : 初期溫度에 對한 溫度上昇
- T' : T/Q , 無次元化된 溫度
- T^o : 初期溫度에 對한 溫度上昇의 増分, 瞬間熱源에 依한 溫度上昇
- T_G : 無限板에서의 溫度에 關한 Green 函數
- T_G^* : Laplace 變換된 T_G
- T_L : 附加溫度 函數
- T_L^* : Laplace 變換된 T_L
- U : $\sqrt{\lambda/\kappa}$
- U_x, U_y : 變位成分
- x, y : 直交座標系에서의 座標
- α : 線膨脹係數
- α_{nm} : 特性方程式의 陽의 實根
- β_{nm} : $\alpha_{nm}r_d$, 無次元化된 特性方程式의 陽의 實根
- ϵ_n : $\epsilon_n|_{r=0} = 1, \epsilon_n|_{r=\infty} = 2$
- $\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yy}$: 變形度成分
- η : r/r_d , 無次元化된 r
- η_o : r_o/r_d , 無次元化된 r_o
- θ : 極座標系에서의 任意點의 角座標
- θ_o : 極座標系에서의 熱源의 位置를 나타내는 角座標
- κ : 熱擴散率
- λ : Laplace 逆變換의 媒介變數
- λ_p : $\frac{\nu E}{1-\nu^2}$
- μ_p : $\frac{E}{2(1+\nu)}$
- ν : Poisson 比
- ρ : 密度
- σ : $\frac{\alpha E Q_o}{\pi \kappa}$, 應力成分의 無次元化係數
- $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$: 直交座標系에서의 應力成分
- $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}$: 極座標系에서의 應力成分
- $\sigma_{rr}', \sigma_{r\theta}', \sigma_{\theta\theta}'$: 無次元化된 應力成分
- $\sigma_{rr}^o, \sigma_{r\theta}^o, \sigma_{\theta\theta}^o$: 應力成分의 増分($\sigma_{ij}^o = \overline{\sigma_{ij}} + \overline{\sigma_{ij}}$)
- $\overline{\sigma_{rr}}, \overline{\sigma_{r\theta}}, \overline{\sigma_{\theta\theta}}$: 變位 potential로부터 얻은 應力成分
- $\overline{\sigma_{rr}}, \overline{\sigma_{r\theta}}, \overline{\sigma_{\theta\theta}}$: Airy 의 應力函數로부터 얻은 應力成分
- τ : 作業終了後 經過된 時間
- ϕ : Airy 의 應力函數
- Φ : 變位 potential
- Φ^* : Laplace 變換된 Φ
- ω : 角速度
- ω' : $\frac{r_d^2}{\kappa} \omega$, 無次元化된 角速度

I. 序 論

熱應力은 構造物 및 機械部品에 溫度分布가 不均一

하게 주어졌을 때 그 溫度分布에 對應되는 熱變形이 形成되고 이 熱變形은 그와 隣接된 要素와 幾何學的인 適合條件을 維持하기 爲하여서 要素相互間에 拘束이 이루어지게 됨으로써 形成되는 應力이다. 이 熱應力은 熱變形과 同時에 形成되며 Hook의 法則에 依하여 相互從屬的인 關係를 갖고 있다. 따라서 熱應力의 原因이 되는 溫度分布의 形成時點에 따라서 部品の 製造工程 및 部品の 使用性能上에 影響을 주게 되는 境遇가 대단히 많다. 예컨대 部品の 精度가 問題되는 橋梁, 船舶等과 같은 長大한 構造物의 建造工程에서는 太陽의 輻射熱에 依한 溫度分布가 日照時間에 따라 變化하게 됨으로 그로 因한 熱變形은 建造工程에 影響을 주게 되며 나아가서는 部品の 精度뿐만 아니라 組立應力의 形態로 殘留應力을 남게하여 使用性能上에도 問題點을 提起하게 된다. 또 航空機의 高速運航에서 發生하는 空氣와의 摩擦熱 및 가스 터빈과 같은 熱機關에서의 燃燒熱等과 같이 使用中 必然的으로 發生되는 熱에 依한 不均一한 溫度分布로 因하여 形成되는 熱應力이 使用性能上에 問題를 提起할 뿐 아니라 때로는 致命的 結果를 가져오기도 한다. 따라서 比較的 近來에 이르러서 熱應力에 對한 理解가 必要하게 되어 研究가 活潑하게 되었다.

熱應力에 關한 研究는 熱傳達理論에 依한 溫度分布의 解析을 先行條件으로하여 그 結果를 熱彈性學에 導入하여 解析하고 이를 塑性理論에 依하여 塑性域까지 擴張하여 殘留應力을 解析함으로써 完結된다고 볼 수 있다. 그러나 現在까지의 研究는 殘留應力은 主로 實驗的으로 解析하고 있으며 理論解析은 大膽한 假定下에서 熱應力解析까지 이루어 지는 것을 大部分의 例에서 찾아볼 수 있다. 이러한 理論的 研究들에서 보면 그 原因이 되는 溫度分布가 定常狀態이거나 또는 準定常狀態로 取扱할 수 있는 境遇에 對하여 解析하고 있는 例는 極히 적다.

圓形素材의 火焰熱處理 또는 構造物에서 重量輕減을 爲하여 구멍을 뚫거나 補修를 目的으로 圓形의 구멍을 熔接하는 境遇等에서의와 같이 熱源이 圓軌道를 移動할 뿐 아니라 一定時間동안만 存在하는 境遇에 對하여 適用될 수 있는 理論的 解析은 이루어진바 없다. 단지 Melan[1], [2]이 圓板上에서 熱源이 半徑線上을 直線移動하는 境遇와 同心軌跡圓上을 移動하는 境遇에 對하여 準定常狀態로 熱應力을 解析하고 있다. 이 Melan의 研究는 直接的으로 加熱過程의 一部를 說明하는데 適用할 수 있으나 加熱初期 및 冷却過程에 對한 說明이 不可能하다는 問題點을 가지고 있다. 따라서 本 論文에서는 圓板의 周緣上의 한點에 熱衝擊이 주어지는 境

遇를 다룬 Hsu 의 研究 [3][4]를 圓板內部의 任意의 點에 熱衝擊이 주어지는 境遇로 擴張하고 이를 다시금 一定時間동안 移動하는 境遇로 擴張함으로써 圓形素材의 熱處理 및 圓形매움熔接等에서 熱應力을 類推할 수 있는 理論的인 根據를 마련코저 한다.

II. 理論解析

1. 溫度分布

等方性인 材質을 갖는 얇은 圓板上的 任意의 點에 瞬間的으로 點熱源에 의한 熱衝擊이 주어졌다고 假定하면 圓板의 周緣을 除外한 모든 表面은 斷熱되어 있고 周緣에서 外氣와 對流에 의한 熱損失이 이루어지는 境遇에는 圓板內部에서 溫度分布가 두께 方向으로는 均一하게 發生되게 된다. 따라서 Fig. 1과 같은 極座標系로서 問題를 表示하면 任意點에 瞬間的으로 存在하였던 點熱源에 의한 溫度分布는, 그로 因한 溫度上昇이 대단히 작아서 溫度變化에 의한 材料의 物理的 性質의 變化를 無視할 수 있다고 할때, (1)式으로 주어진 熱傳導方程式을 滿足해야 한다.

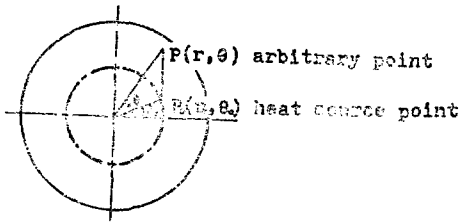


Fig. 1. Coordinate system

$$\frac{\partial^2 T^o}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^o}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T^o}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T^o}{\partial t} = 0 \quad (0 \leq t < \infty) \quad (1)$$

또한 (1)式의 解는 初期條件으로서

$$T^o(r, \theta, t)|_{t=0} = 0 \quad (r \neq r_0) \quad (2)$$

境界條件으로서

$$\left. \frac{\partial T^o}{\partial r} \right|_{r=r_d} + HT^o \Big|_{r=r_d} = 0 \quad (t \geq 0) \quad (3)$$

그리고 熱源周圍에서는

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left(-2\pi R \frac{\partial T^o}{\partial R} - k \right) = q \quad (4)$$

$$R^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)$$

等の 條件을 滿足하여야 한다.

여기서 (1)式의 解를 (5)式과 같은 型으로 表示하면

$$T^o = T_G + T_L \quad (0 \leq t < \infty) \quad (5)$$

T_G 는 任意點에 주어진 線狀瞬間熱源에 의한 (1)(2)(4)式을 滿足하는 無限板에서의 解가 되는 Green 函數이다. 또 T_L 은 (1)(2)(3)式을 滿足시켜주는 函數이다 그런데 T_G 는 (6)式으로 表示되는 것이 이미 알려져

있다.

$$T_G = -\frac{q_0}{4\pi\kappa t} e^{-R^2/4\kappa t} \quad (6)$$

T_L 을 求하기 爲하여 (1)式과 (3)式을 Laplace 變換하여 (7)式과 (8)式을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} - p^2 T^* = 0 \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial r} \right|_{r=r_d} + HT^* \Big|_{r=r_d} = 0 \quad (8)$$

$$p = \sqrt{\frac{s}{\kappa}}, \quad H = \frac{h}{k}$$

(7)式의 解는 原點에서 有限한 溫度를 가지야 함으로 (9)式으로 表示된다.

$$T_L^* = \sum_{n=0}^{\infty} A_n I_n(pr) \cos n(\theta - \theta_0) \quad (9)$$

여기서 常數 A_n 을 決定하기 爲하여 (6)式을 Laplace 變換하여 (10)式을 얻고

$$T_G^* = \int_0^{\infty} \frac{q_0}{4\pi\kappa t} \exp\left\{-\frac{R^2}{4\kappa t}\right\} \exp\{-st\} dt = \frac{q_0}{2\pi\kappa} K_0(pR) \quad (10)$$

$$p = \sqrt{\frac{s}{\kappa}}, \quad R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)}$$

(10)式에 Bessel 函數의 加法定理을 適用하면 (11a)와 (11b)가 얻어진다.

$$T_G^* = -\frac{q_0}{2\pi\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n I_n(pr) K_n(pr_0) \cos n(\theta - \theta_0) \quad (11a)$$

但, $0 < r < r_0$

$$T_G^* = -\frac{q_0}{2\pi\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n I_n(pr_0) K_n(pr) \cos n(\theta - \theta_0) \quad (11b)$$

但, $r_0 < r < r_d$

(9)式과 (11b)式의 合은 (8)式을 滿足하여야 함으로 A_n 은 (12)式으로 表示된다.

$$A_n = \frac{-\varepsilon_n q_0}{2\pi\kappa} \frac{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] K_n(pr_d) - p K_{n+1}(pr_d)}{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] I_n(pr_d) + p I_{n+1}(pr_d)} \times I_n(pr_0) \quad (12)$$

따라서 Laplace 變換된 溫度分布는

$$T^* = -\frac{q_0}{2\pi\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta - \theta_0) \left\{ K_n(pr_0) \frac{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] K_n(pr_d) - p K_{n+1}(pr_d)}{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] I_n(pr_d) + p I_{n+1}(pr_d)} I_n(pr_0) \right\} \times I_n(pr) \quad (13a)$$

但, $0 < r < r_0$

$$T^* = \frac{q_0}{2\pi\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cos n(\theta - \theta_0) \left\{ K_n(pr) \right. \\ \left. - \left[\frac{H + \frac{n}{r_d}}{H + \frac{n}{r}} \right] \frac{K_n(pr_d) - pK_{n+1}(pr_d)}{I_n(pr_d) + pI_{n+1}(pr_d)} I_n(pr) \right\} I_n(pr_0) \\ \text{但, } r_0 < r < r_d \quad (13b)$$

따라서 Laplace 變換의 逆變換定理로부터 圓板內部の 溫度分布은 (14a)와 (14b)로 얻어진다.

$$T^0 = \frac{q_0}{4\pi\kappa i} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cos n(\theta - \theta_0) \int_{v_{-i\infty}}^{v_{+i\infty}} \left\{ K_n(Ur_0) \right. \\ \left. - \left[\frac{H + \frac{n}{r_d}}{H + \frac{n}{r}} \right] \frac{K_n(Ur_d) - UK_{n+1}(Ur_d)}{I_n(Ur_d) + UI_{n+1}(Ur_d)} I_n(Ur) \right\} \\ \times I_n(Ur) e^{it} d\lambda \quad (14a)$$

但, $0 < r < r_0, \quad U = \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}$

$$T^0 = \frac{q_0}{4\pi\kappa i} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cos n(\theta - \theta_0) \int_{v_{-i\infty}}^{v_{+i\infty}} \left\{ K_n(Ur) \right. \\ \left. - \left[\frac{H + \frac{n}{r_d}}{H + \frac{n}{r}} \right] \frac{K_n(Ur_d) - UK_{n+1}(Ur_d)}{I_n(Ur_d) + UI_{n+1}(Ur_d)} I_n(Ur) \right\} \\ \times I_n(Ur_0) e^{it} d\lambda \quad (14b)$$

但, $r_0 < r < r_d, \quad U = \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}$

그런데 (14d)와 (14b)는 $\lambda = -\kappa\alpha_{nm}^2$ 일때 單極을 가지므로 複素函數에 관한 Cauchy의 定理을 適用하고 Lommel의 公式와 特性方程式 (16)式을 使用하여 簡單히 整理하면 (15)式을 얻는다.

$$T^0 = \frac{q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cos n(\theta - \theta_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nm}^2 e^{-\kappa\alpha_{nm}^2 t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \\ \times \frac{J_n(\alpha_{nm}r_0) J_n(\alpha_{nm}r)}{[J_n(\alpha_{nm}r_d)]^2} \quad (15)$$

여기서 α_{nm} 은 (16)式을 滿足하는 陽의 實根들이다.

$$\left[H + \frac{n}{r_d} \right] J_n(\alpha_{nm}r_d) - \alpha_{nm} J_{n+1}(\alpha_{nm}r_d) = 0 \quad (16)$$

2. 熱應力

求하여진 溫度分布로부터 熱應力을 理論解析함에 있어서는 溫度分布로부터 熱應力이 形成되는데 所要되는 時間遲延效果 및 溫度分布로부터 熱應力이 形成될 때 나타나는 溫度分布와 熱應力의 相乘效果等이 考慮되어야 한다. 時間遲延效果를 考慮하여 一次元的인 熱應力을 解析한 Mura [5]의 研究에 依하면 熱衝擊이 주어지는 初期에 相當한 效果가 熱應力에 미칠것이 分明하다. 그러나 熱源의 移動을 取扱하는 本研究에서는 全 加熱過程을 熱衝擊으로 보기 어려우므로 또 鋼材에 對한 그

의 計算例에서와 같이 動的效果가 工學的으로 充分히 無視할 수 있으므로 이를 無視한다. 또한 熱應力과 溫度分布 相互間의 相乘效果는 工學的으로 無視할 수 있음이 이미 알려져있음으로 [6],[7] 이를 無視하기로 한다. 이러한 假定들을 設定하면 주어진 問題는 準靜的 熱應力問題가 된다. 따라서 熱衝擊以外的 外力이 주어지지 않았다고 생각하면 體積力等을 無視할 수 있음으로 二次元 平面應力條件으로서 問題를 解析할 수 있게 된다. 따라서 應力 成分은 (17)式으로 주어지는 平衡條件이 充足되어야 한다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^0}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^0}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}^0}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^0}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

또 變形度와 應力과의 關係로서 (18)式의 條件이 滿足되어야 한다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^0 &= \lambda_p e_p + 2\mu_p \epsilon_{xx} - 2(\lambda_p + \mu_p) \alpha T^0 \\ \sigma_{yy}^0 &= \lambda_p e_p + 2\mu_p \epsilon_{yy} - 2(\lambda_p + \mu_p) \alpha T^0 \\ \sigma_{xy}^0 &= 2\mu_p \epsilon_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

但, $\lambda_p = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}, \quad \mu_p = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G, \quad e_p = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}$

그리고 變形과 變位사이에서는 (19)式의 關係가 成立되어야 한다.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial U_x^0}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial U_y^0}{\partial y} \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x^0}{\partial y} + \frac{\partial U_y^0}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

따라서 (17), (18), (19)式을 使用하면 (20)式을 얻을 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_p + \mu_p) \frac{\partial e_p}{\partial x} + \mu_p \Gamma^2 U_x - 2(\mu_p + \lambda_p) \alpha \frac{\partial T^0}{\partial x} &= 0 \\ (\lambda_p + \mu_p) \frac{\partial e_p}{\partial y} + \mu_p \Gamma^2 U_y - 2(\mu_p + \lambda_p) \alpha \frac{\partial T^0}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

여기서 Φ 를 (21)式의 關係를 滿足하는 變位 potential 이라 하면

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= U_x^0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= U_y^0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(20)式은 (22)式으로 變換된다.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = (1 + \nu) \alpha T^0 \quad (22)$$

(22)式의 兩邊을 時間에 關하여 偏微分하고 極座標系로 變換하면 (23)式을 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = (1 + \nu) \alpha \frac{\partial T^0}{\partial t} \quad (23)$$

따라서 (23)식과 (1)식으로 부터 變位 potential Φ 는 (24)식으로 表示된다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = (1+\nu)\alpha\kappa T^o \quad (24)$$

즉

$$\Phi = (1+\nu)\alpha\kappa \int_0^t T^o dt + \Phi_0 + \Phi_{1t} \quad (25)$$

여기서 Φ_0 는 初期條件을 滿足하는 熱彈性變位 potential이고 Φ_{1t} 은 調和函數의 解이다.

(25)식의 Φ 를 求하기 爲하여 (25)식을 Laplace 變換하면 自然狀態로 놓여 있다는 初期條件으로부터 $\Phi_0=0$ 의 關係가 成立되게 됨으로 (26)식이 얻어진다.

$$\Phi^* = (1+\nu)\alpha\kappa \frac{T^*}{s} + \Phi_{1t}^* \frac{1}{s^2} \quad (26)$$

여기서 Nowacki[6]에서와 같이 積分變換에 關한 Abel의 定理을 適用하면 (27)식이 얻어진다.

$$\Phi_{1t} = -(1+\nu)\alpha\kappa T_{\infty} \quad (27)$$

$$\text{但, } T_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} T^o$$

따라서

$$\Phi^* = \frac{(1+\nu)}{s^2} \alpha\kappa (sT^* - T_{\infty}) \quad (28)$$

그런데 (15)식으로부터 $T_{\infty}=0$ 이 됨으로

$$\begin{aligned} \Phi^* &= \frac{(1+\nu)\alpha\kappa_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta-\theta_0) \left\{ K_n(pr_0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] K_n(pr_d) - pK_{n+1}(pr_d)}{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] I_n(pr_d) + pI_{n+1}(pr_d)} I_n(pr_0) \right\} \\ &\quad \times \frac{I_n(pr)}{s} \quad (29a) \end{aligned}$$

但, $0 < r < r_0$

$$\begin{aligned} \Phi^* &= \frac{(1+\nu)\alpha\kappa_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta-\theta_0) \left\{ K_n(pr) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] K_n(pr_d) - pK_{n+1}(pr_d)}{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] I_n(pr_d) + pI_{n+1}(pr_d)} I_n(pr) \right\} \\ &\quad \times \frac{I_n(pr_0)}{s} \quad (29b) \end{aligned}$$

但, $r_0 < r < r_d$

(29a)와 (29b)식을 逆變換하여 變位 potential Φ 를 求하면 領域 $0 < r < r_0$ 에서는 (30a)식으로 그리고 領域 $r_0 < r < r_d$ 에서는 (30b)식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{(1+\nu)\alpha\kappa_0}{2\pi} \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \left\{ \left[H + \frac{n}{r_d} \right] (r_d^{2n} - r_0^{2n}) r_d + 2nr_0^{2n} \right\} r^n}{2 \left[H + \frac{n}{r_d} \right] r^n r_d^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \cos n(\theta-\theta_0) - \frac{(1+\nu)\alpha\kappa_0}{2\pi} \left\{ \log \frac{r_d}{r_0} + \frac{1}{Hr_d} \right\} \\ &\quad - \frac{(1+\nu)\alpha\kappa_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta-\theta_0) \\ &\quad \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\kappa\alpha_{nm}2t}}{(r_d^2(H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2) \frac{J_n(\alpha_{nm}r_0)J_n(\alpha_{nm}r)}{[J_n(\alpha_{nm}r_d)]^2}} \end{aligned} \quad (30a)$$

但, $0 < r < r_0$

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{(1+\nu)\alpha\kappa_0}{2\pi} \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \left\{ \left[H + \frac{n}{r_d} \right] (r_d^{2n} - r^{2n}) r_d + 2nr^{2n} \right\} r_0^n}{2 \left[H + \frac{n}{r_d} \right] r^n r_d^{n+1}} \\ &\quad \times \cos n(\theta-\theta_0) - \frac{(1+\nu)\alpha\kappa_0}{2\pi} \left\{ \log \frac{r_d}{r} + \frac{1}{Hr_d} \right\} \\ &\quad - \frac{(1+\nu)\alpha\kappa_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta-\theta_0) \\ &\quad \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\kappa\alpha_{nm}2t}}{r_d^2(H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm}r)J_n(\alpha_{nm}r_0)}{[J_n(\alpha_{nm}r_d)]^2} \quad (30b) \end{aligned}$$

但, $r_0 < r < r_d$

여기서 (30a)와 (30b)식을 比較하여 보면 $r=r_0$ 에서 導函數가 不連續이 되고 있음을 알 수 있다. 따라서 (31)식으로 주어진 變位 potential과 應力과의 關係식을 適用하여 應力成分을 求하여 보면 두 領域의 境界가 되는 $r=r_0$ 에서 應力の 不連續이 나타나게 된다.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr} &= \frac{-E}{1+\nu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta} &= \frac{-E}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) \\ \bar{\sigma}_{r\theta} &= \frac{-E}{1+\nu} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \right) \quad (31) \end{aligned}$$

또한 (30a)와 (30b)로 주어진 變位 potential Φ 는 (27)식의 條件만을 使用하여 求하여졌기 때문에 周緣에서의 境界條件이 充足되지 못한다. 따라서 求하고자하는 問題의 解가 變位 potential로부터 直接的으로 얻어질 수 없다. 그런데 熱應力이 準靜的으로 주어진다라고 假定하였기 때문에 靜의 問題에 對한 一般解로 얻어진 應力函數를 導入하여 附加應力函數로 使用할 수 있고 따라서 問題의 解決이 可能하게 된다.

즉 $r=r_0$ 에서의 應力の 連續條件인 (32a)식과 周緣에서의 境界條件인 (32b)식을 滿足시켜야 됨으로 이들을 充足시키기 爲하여 Airy의 應力函數를 附加應力函數로서 導入하면 領域 $0 < r < r_0$ 에서는 (33a)로 表示되며 領域 $r_0 < r < r_d$ 에서는 (33b)로 表示된다.

$$\sigma_{rr}^o \Big|_{r=r_0}^{0 < r < r_0} - \sigma_{rr}^o \Big|_{r=r_0}^{r_0 < r < r_d} =$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^o \Big|_{r=r_o}^{0 < r < r_o} - \sigma_{\theta\theta}^o \Big|_{r=r_o}^{r_o < r < r_d} &= \\ \sigma_{r\theta}^o \Big|_{r=r_o}^{0 < r < r_o} - \sigma_{r\theta}^o \Big|_{r=r_o}^{r_o < r < r_d} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (32a)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^o \Big|_{r=r_d}^{r_o < r < r_o} &= 0 \\ \sigma_{r\theta}^o \Big|_{r=r_d}^{r_o < r < r_d} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (32b)$$

$$\phi = b_o r^2 + b_1 r^3 \cos(\theta - \theta_o) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{n+2}) \cos n(\theta - \theta_o) \quad (33a)$$

但, $0 < r < r_o$

$$\phi = o a_o' \log r + o b_o r^2 + (o a_1' r^{-1} + o b_1 r^2) \cos(\theta - \theta_o) + \sum_{n=0}^{\infty} (o a_n r^n + o b_n r^{n+2} + o a_n' r^{-n}) \cos n(\theta - \theta_o) \quad (33b)$$

但, $r_o < r < r_d$

여기서 (34)式的關係를 使用하여 應力成分을 求하고 (31)式을 使用하여 變位 potential ϕ 로부터 應力成分을 求하면 이들이 同時에 (32a)式과 (32b)式을 滿足해야 함으로 (32a)式과 (32b)式으로부터 5元聯立方程式이 얻어진다. 따라서 級數의 各項들을 項別로 等置하면 (35)式들로서 表示되는 級數의 係數들을 얻을 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$a_n \Big|_{n \geq 2} = \frac{\alpha E q_o}{2\pi} \frac{\left\{ \left[H + \frac{n}{r_d} \right] (r_d^{2n} - r_o^{2n}) r_d + 2n r_o^{2n} \right\}}{n \left[H + \frac{n}{r_d} \right] r_d^{2n+1} r_o^n} - \frac{\alpha E q_o}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 e^{-\kappa \alpha_{nm} 2t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm} r_o)}{[J_n(\alpha_{nm} r_d)]^2} \left\{ \frac{1}{r_d^n} J_n(\alpha_{nm} r_d) + \frac{\alpha_{nm}}{2 r_d^{n-1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) \right\} \quad (35a)$$

$$o a_n' \Big|_{n \geq 1} = \frac{\alpha E q_o}{2\pi} \frac{r_o^n}{n}, \quad o a_0' = \frac{\alpha E q_o}{2\pi} \quad (35b)$$

$$b_n \Big|_{n \geq 0} = \frac{\alpha E q_o}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n e^{-\kappa \alpha_{nm} 2t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm} r_o)}{[J_n(\alpha_{nm} r_d)]^2} \frac{\alpha_{nm}}{r^{n+1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) \quad (35c)$$

$$\begin{aligned} o a_n \Big|_{n \geq 2} &= \frac{\alpha E q_o}{2\pi} \frac{\left\{ \left[H + \frac{n}{r_d} \right] (r_d^{2n} - r_o^{2n}) r_d + 2n r_o^{2n} \right\}}{n \left[H + \frac{n}{r_d} \right] r_d^{2n+1} r_o^n} - \frac{\alpha E q_o}{2\pi} \frac{1}{r_o^n} \frac{1}{n} \\ &\quad - \frac{\alpha E q_o}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 e^{-\kappa \alpha_{nm} 2t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm} r_o)}{[J_n(\alpha_{nm} r_d)]^2} \left\{ \frac{1}{r_d^n} J_n(\alpha_{nm} r_d) + \frac{\alpha_{nm}}{2 r_d^{n-1}} J_{n-1}(\alpha_{nm} r_d) \right\} \end{aligned} \quad (35d)$$

$$o b_n \Big|_{n \geq 0} = \frac{\alpha E q_o}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n e^{-\kappa \alpha_{nm} 2t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm} r_o)}{[J_n(\alpha_{nm} r_d)]^2} \frac{\alpha_{nm}}{r_d^{n+1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) \quad (35e)$$

따라서 이들 係數들을 適用하여 式을 整理하고 (16) 및 (36c)로 주어진다. 이 (36a), (36b) 및 (36c)式은 領域 $0 < r < r_o$ 와 領域 $r_o < r < r_d$ 에서 同時에 適用된 間的으로 주어진다. 따라서 點熱源에 依한 應力成分은 (36a), (36b) 다.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^o &= \frac{-\alpha E q_o}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ \frac{n(1-n)r^{n-2}}{r_d^n} (2 + H r_d + n) + \frac{(n-2)(n+1)r^n}{r_d^{n+2}} (H r_d + n) \right\} \cos n(\theta - \theta_o) \\ &\quad \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\kappa \alpha_{nm} 2t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm} r_o)}{[J_n(\alpha_{nm} r_d)]^2} + \frac{\alpha E q_o}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta - \theta_o) \\ &\quad \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\kappa \alpha_{nm} 2t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm} r_o)}{[J_n(\alpha_{nm} r_d)]^2} \left\{ \frac{n(1-n)}{r^2} J_n(\alpha_{nm} r) - \frac{\alpha_{nm}}{r} J_{n+1}(\alpha_{nm} r) \right\} \end{aligned} \quad (36a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^o &= \frac{\alpha E q_o}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ \frac{n(1-n)r^{n-2}}{r_d^n} (2 + H r_d + n) + \frac{(n+1)(n+2)r^n}{r_d^{n+2}} (H r_d + n) \right\} \cos n(\theta - \theta_o) \\ &\quad \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\kappa \alpha_{nm} 2t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm} r_o)}{[J_n(\alpha_{nm} r_d)]^2} + \frac{\alpha E q_o}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta - \theta_o) \end{aligned}$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\kappa\alpha_{nm}2t}}{r_d^2(H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm}r_0)}{[J_n(\alpha_{nm}r_d)]^2} \left\{ \frac{n^2 - n - r^2\alpha_{nm}^2}{r^2} J_n(\alpha_{nm}r) + \frac{\alpha_{nm}}{r} J_{n+1}(\alpha_{nm}r) \right\} \quad (36b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{,\theta} = & \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left\{ \frac{n(1-n)r^{n+2}}{r_d^n} - (2 + Hr_d + n) + \frac{(n+1)nr^n}{r_d^{n+2}} (Hr_d + n) \right\} \sin n(\theta - \theta_0) \\ & \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\kappa\alpha_{nm}2t}}{r_d^2(H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm}r_0)}{[J_n(\alpha_{nm}r_d)]^2} + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \sin n(\theta - \theta_0) \\ & \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\kappa\alpha_{nm}2t}}{r_d^2(H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm}r_0)}{[J_n(\alpha_{nm}r_d)]^2} \left\{ \frac{n(n-1)}{r^2} J_n(\alpha_{nm}r) - \frac{n\alpha_{nm}}{r} J_{n+1}(\alpha_{nm}r) \right\} \end{aligned} \quad (36c)$$

工學的인 應用例에서는 一定時間동안만 熱源이 熱供給을 하면서 移動하고 나머지 時間에는 熱供給이나 移動이 이루어지지 않는 例가 대단히 많다. 만일 t_0 秒 동안 作業이 이루어지고 作業終了後 τ 秒가 經過되어 現在에 이르렀다고 생각하면 (15)式으로 주어진 瞬間의 存在하였던 點熱源에 依한 溫度分布와 (36a), (36b) 및 (36c)로 주어진 熱應力은 移動熱源에 依한 溫度分布와 熱應力의 任意瞬間에서의 増分이 됨으로 이

를 (37)式의 關係를 使用하여 Duhamel의 積分重量原理에 依하여 重量함으로서 (38a)의 移動熱源에 依한 溫度分布와 (38b), (38c) 및 (38d)로 주어지는 熱應力成分들을 얻을 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} t &= t_0 + \tau \\ \theta_0 &= \omega t_0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$T = \frac{q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nm}^2 J_n(\alpha_{nm}r_0) J_n(\alpha_{nm}r)}{[J_n(\alpha_{nm}r_d)]^2} C_{nm} \quad (38a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & \frac{-\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{n(1-n)r^{n-2}}{r_d^n} (2 + Hr_d + n) + \frac{(n-2)(n+1)r^n}{r_d^{n+2}} (Hr_d + n) \right\} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\alpha_{nm}r_0)}{J_n(\alpha_{nm}r_d)} C_{nm} \\ & + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\alpha_{nm}r_0)}{[J_n(\alpha_{nm}r_d)]^2} \left\{ \frac{n(1-n)}{r^2} J_n(\alpha_{nm}r) - \frac{\alpha_{nm}}{r} J_{n+1}(\alpha_{nm}r) \right\} C_{nm} \end{aligned} \quad (38b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{n(1-n)r^{n-2}}{r_d^n} (2 + Hr_d + n) + \frac{(n+1)(n+2)r^n}{r_d^{n+2}} (Hr_d + n) \right\} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\alpha_{nm}r_0)}{J_n(\alpha_{nm}r_d)} C_{nm} \\ & + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\alpha_{nm}r_0)}{[J_n(\alpha_{nm}r_d)]^2} \left\{ \frac{n^2 - n - r^2\alpha_{nm}^2}{r^2} J_n(\alpha_{nm}r) + \frac{\alpha_{nm}}{r} J_{n+1}(\alpha_{nm}r) \right\} C_{nm} \end{aligned} \quad (38c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} = & \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{n(1-n)r^{n-2}}{r_d^n} (2 + Hr_d + n) + \frac{n(n+1)r^n}{r_d^{n+2}} (Hr_d + n) \right\} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\alpha_{nm}r_0)}{J_n(\alpha_{nm}r_d)} S_{nm} \\ & + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\alpha_{nm}r_0)}{[J_n(\alpha_{nm}r_d)]^2} \left\{ \frac{n(n-1)}{r^2} J_n(\alpha_{nm}r) - \frac{\alpha_{nm}}{r} J_{n+1}(\alpha_{nm}r) \right\} S_{nm} \end{aligned} \quad (38d)$$

여기서 C_{nm} 과 S_{nm} 은 (39a)와 (39b)를 滿足하는 값이다.

$$C_{nm} = \frac{\epsilon_n}{r_d^2(H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \frac{e^{-\kappa\alpha_{nm}2\tau}}{\kappa^2\alpha_{nm}^4 + n^2\omega^2} \left\{ \kappa\alpha_{nm}^2 [\cos n(\theta + \omega\tau) e^{-\kappa\alpha_{nm}\tau} - \cos n(\theta + \omega t) e^{-\kappa\alpha_{nm}2t}] - n\omega [\sin n(\theta + \omega\tau) e^{-\kappa\alpha_{nm}\tau} - \sin n(\theta + \omega t) e^{-\kappa\alpha_{nm}2t}] \right\} \quad (39a)$$

$$S_{nm} = \frac{\epsilon_n}{r_d^2(H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \frac{e^{-\kappa\alpha_{nm}2\tau}}{\kappa^2\alpha_{nm}^4 + n^2\omega^2} \left\{ \kappa\alpha_{nm}^2 [\sin n(\theta + \omega\tau) e^{-\kappa\alpha_{nm}\tau} - \sin n(\theta + \omega t) e^{-\kappa\alpha_{nm}2t}] + n\omega [\cos n(\theta + \omega\tau) e^{-\kappa\alpha_{nm}\tau} - \cos n(\theta + \omega t) e^{-\kappa\alpha_{nm}2t}] \right\} \quad (39b)$$

3. 理論式의 無次元化

圓形素材의 熱處理 및 圓形구멍의 熔接이나 切斷과 같은 工學的인 應用例에서는 素材의 材質 및 幾何學的인 形狀이 作業條件을 決定하게 됨으로 部材의 性質을 代表하는 값으로서 熱擴散率 그리고 幾何學的인 形態를 代表하는 값으로서 圓板의 半徑을 擇하면 (40)式으로 주어지는 無次元化된 變數들을 設定할 수 있게 된다

$$\left. \begin{aligned} t' &= \frac{\kappa}{r_d^2} \tau & \eta_0 &= \frac{r}{r_d} & \sigma_{\theta\theta}' &= \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma} \\ \omega' &= \frac{r_d^2}{\kappa} \omega & Q &= \frac{q_0}{\pi\kappa} & \sigma_{r\theta}' &= \frac{\sigma_{r\theta}}{\sigma} \\ B &= Hr_d & T' &= \frac{T}{Q} & C_{nm}' &= \frac{\kappa}{r_d^2} C_{nm} \\ \beta_{nm} &= \alpha_{nm}r_d & \sigma &= \frac{\alpha E q_0}{\pi\kappa} & S_{nm}' &= \frac{\kappa}{r_d^2} S_{nm} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

(40)式의 關係를 適用하면 (38a), (38b), (38c) 및 (38d)式은 (41a), (41b), (41c) 및 (41d)로 變換된다.

$$\left. \begin{aligned} t' &= \frac{\kappa}{r_d^2} t & \eta_0 &= \frac{r_0}{r_d} & \sigma_{rr}' &= \frac{\sigma_{rr}}{\sigma} \end{aligned} \right\}$$

또 (39a)와 (39b)식은 (42a)와 (42b)로 變換된다.

$$T' = \frac{T}{Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_{nm}^2 J_n(\beta_{nm} \eta_0) J_n(\beta_{nm} \eta)}{[J_n(\beta_{nm})]^2} C_{nm}' \quad (41a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}' = \frac{\sigma_{rr}}{\sigma} = & -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ n(1-n)\eta^{n-2}(2+B+n) + (n-2)(n+1)\eta^n(B+n) \right\} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\beta_{nm} \eta_0)}{J_n(\beta_{nm})} C_{nm}' \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\beta_{nm} \eta_0)}{[J_n(\beta_{nm})]^2} \left\{ \frac{n(1-n)}{\eta^2} J_n(\beta_{nm} \eta) - \frac{\beta_{nm}}{\eta} J_{n+1}(\beta_{nm} \eta) \right\} C_{nm}' \end{aligned} \quad (41b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}' = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma} = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ n(1-n)\eta^{n-2}(2+B+n) + (n+1)(n+2)\eta^n(B+n) \right\} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\beta_{nm} \eta_0)}{J_n(\beta_{nm})} C_{nm}' \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\beta_{nm} \eta_0)}{[J_n(\beta_{nm})]^2} \left\{ \frac{n^2 - n - \eta^2 \beta_{nm}^2}{\eta^2} J_n(\beta_{nm} \eta) + \frac{\beta_{nm}}{\eta} J_{n+1}(\beta_{nm} \eta) \right\} C_{nm}' \end{aligned} \quad (41c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}' = \frac{\sigma_{r\theta}}{\sigma} = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ n(1-n)\eta^{n-2}(2+B+n) + n(n+1)\eta^n(B+n) \right\} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\beta_{nm} \eta_0)}{J_n(\beta_{nm})} S_{nm}' \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\beta_{nm} \eta_0)}{[J_n(\beta_{nm})]^2} \left\{ \frac{n(n-1)}{\eta^2} J_n(\beta_{nm} \eta) - \frac{n\beta_{nm}}{\eta} J_{n+1}(\beta_{nm} \eta) \right\} S_{nm}' \end{aligned} \quad (41d)$$

$$C_{nm}' = \frac{\epsilon_n}{B^2 + \beta_{nm}^2 - n^2} \frac{e^{-\beta_{nm} 2t''}}{\beta_{nm}^4 + (n\omega')^2} \left\{ \beta_{nm}^2 [\cos n(\theta + \omega' t'') e^{-\beta_{nm} 2t''} - \cos n(\theta + \omega' t') e^{-\beta_{nm} 2t'}] \right. \\ \left. - n\omega' [\sin n(\theta + \omega' t'') e^{-\beta_{nm} 2t''} - \sin n(\theta + \omega' t') e^{-\beta_{nm} 2t'}] \right\} \quad (42a)$$

$$S_{nm}' = \frac{\epsilon_n}{B^2 + \beta_{nm}^2 - n^2} \frac{e^{-\beta_{nm} 2t''}}{\beta_{nm}^4 + (n\omega')^2} \left\{ \beta_{nm}^2 [\sin n(\theta + \omega' t'') e^{-\beta_{nm} 2t''} - \sin n(\theta + \omega' t') e^{-\beta_{nm} 2t'}] \right. \\ \left. + n\omega' [\cos n(\theta + \omega' t'') e^{-\beta_{nm} 2t''} - \cos n(\theta + \omega' t') e^{-\beta_{nm} 2t'}] \right\} \quad (42b)$$

그리고 (16)식으로 주어진 特性方程式은 (43)식으로 變換된다.

$$[B+n] J_n(\beta_{nm}) - \beta_{nm} J_{nm}(\beta_{nm}) = 0 \quad (43)$$

4. 理論式的 檢討

앞에서 일어진 移動熱源에 依한 過渡的 溫度分布 및 熱應力の 理論解의 特性을 確認하기 爲하여 다음의 몇 가지 條件을 適用하여 보면 다음의 事實들을 알 수 있다.

熱源이 圓板의 原點에 持續的으로 주어지는 境遇는 (44)식의 條件으로 表示된다.

$$\eta_0 = 0, \omega' = 0, t'' = 0 \quad (44)$$

따라서 (44)식의 條件下에서는 溫度分布와 熱應力은 (45a), (45b), (45c) 및 (45d)로 變換된다.

$$T' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\beta_{0m} 2t'}}{B^2 + \beta_{0m}^2} \frac{J_0(\beta_{0m} \eta)}{[J_0(\beta_{0m})]^2} \quad (45a)$$

$$\sigma_{rr}' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\beta_{0m} 2t'}}{B^2 + \beta_{0m}^2} \frac{J_1(\beta_{0m}) - \eta^{-1}(\beta_{0m} \eta)}{[J_0(\beta_{0m})]^2} \quad (45b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}' = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\beta_{0m} 2t'}}{B^2 + \beta_{0m}^2} \\ & \times \frac{J_1(\beta_{0m}) + \eta^{-1} J_1(\beta_{0m} \eta) - \beta_{0m} J_0(\beta_{0m} \eta)}{\beta_{0m} [J_0(\beta_{0m})]^2} \end{aligned} \quad (45c)$$

$$\sigma_{r\theta}' = 0 \quad (45d)$$

이들 溫度分布와 應力成分은 (38a), (38b), (38c) 및 (38d)로 주어지는 溫度分布와 應力成分들의 初項 即 n=0일때가 되며 軸對稱인 條件을 表示하고 있다. 또 n>0인 項들은 非對稱條件을 表示하는 項들임을 알 수 있다.

熱源이 圓板의 圓緣上의 一點에 持續的으로 주어지는 境遇는 Hsu[4]에 依하여 研究된바 있으며 (46)식의 條件으로 表示될 수 있다.

$$\eta_0 = 1, \omega = 0, t'' = 0 \quad (46)$$

(46)식의 條件을 適用하면 溫度分布와 熱應力은 (47a), (47b), (47c) 및 (47d)로 變換된다. 여기서 C_{nm}''과 S_{nm}''은 (48a)와 (48b)로 表示된다.

$$T' = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_{nm}^2 J_n(\beta_{nm} \eta)}{J_n(\beta_{nm})} C_{nm}'' \quad (47a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ n(1-n)\eta^{n-2}(2+B+n) + (n-2)(n+1)\eta^n(B+n) \right\} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm}'' \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{J_n(\beta_{nm})} \left\{ \frac{n(1-n)}{\eta^2} J_n(\beta_{nm} \eta) - \frac{\beta_{nm}}{\eta} J_{nm}(\beta_{nm}) \right\} C_{nm}'' \end{aligned} \quad (47b)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ n(1-n)\eta^{n-2}(2+B+n) + (n+1)(n+2)\eta^n(B+n) \right\} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm}''$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{J_n(\beta_{nm})} \left\{ \frac{n^2-n-\eta^2\beta_{nm}^2}{\eta^2} J_n(\beta_{nm}\eta) + \frac{\beta_{nm}}{\eta} J_{n+1}(\beta_{nm}\eta) \right\} C_{nm}'' \quad (47c)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ n(1-n)\eta^{n-2}(2+B+n) + n(n+1)\eta^n(B+n) \right\} \sum_{m=1}^{\infty} S_{nm}''$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{J_n(\beta_{nm})} \left\{ \frac{n(n-1)}{\eta^2} J_n(\beta_{nm}\eta) - \frac{n\beta_{nm}}{\eta} J_{n+1}(\beta_{nm}\eta) \right\} S_{nm}'' \quad (47d)$$

$$C_{nm}'' = \frac{\varepsilon_n(1-e^{-\beta_{nm}2t'})}{(B^2+\beta_{nm}^2-n^2)\beta_{nm}^2} \cos n(\theta-\theta_0) \quad (48a)$$

$$S_{nm}'' = \frac{\varepsilon_n(1-e^{-\beta_{nm}2t'})}{(B^2+\beta_{nm}^2-n^2)\beta_{nm}^2} \sin n(\theta-\theta_0) \quad (48b)$$

(47a)로 주어진 溫度分布와 (47b), (47c) 및 (47d)로 주어지는 應力成分들은 Hsu[4]의 研究結果를 簡單히 整理하여 얻어지는 式과 完全히 一致되는 것을 確認할 수 있다. 마찬가지로 點熱源이 圓板의 周緣上의 一點에 瞬間的으로 주어진 境遇를 解析한 Hsu[3]의 研究結果를 簡單히 整理하면 本 研究에서 얻어진 圓板上 任意의 點에 주어진 瞬間點熱源에 依한 溫度分布인 (15)式 그리고 熱應力을 表示하는 (36a), (36b) 및 (36c)式에 $\eta=1$ 인 條件을 適用하여 整理한 式과 完全히 一致되는 것을 確認할 수 있다.

(41a), (41b) 및 (41c)로 주어진 應力成分을 보면 $\eta=0$ 일때 特異點이 되는 것을 確認할 수 있다. 따라서 Bessel 函數의 漸近公式를 使用하여 $\eta=0$ 에서의 極限值를 取하고 簡單히하면 (49a), (49b) 및 (49c)式이 얻어진다.

$$\sigma_{rr}]_{\eta=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_{0m}\eta_0)}{[J_0(\beta_{0m})]^2} \left\{ \frac{\beta_{0m}^2}{2} + BJ_0(\beta_{0m}) \right\} C_{0m}'$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\beta_{2m}\eta_0)}{[J_2(\beta_{2m})]^2} \left\{ \frac{-\beta_{2m}^2}{4} + (B+4)J_2(\beta_{0m}) \right\}$$

$$\times C_{2m}' \quad (49a)$$

$$\sigma_{\theta\theta}]_{\eta=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_{0m}\eta_0)}{[J_0(\beta_{0m})]^2} \left\{ \frac{-\beta_{0m}^2}{2} - BJ_0(\beta_{0m}) \right\} C_{0m}'$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\beta_{2m}\eta_0)}{[J_2(\beta_{0m})]^2} \left\{ \frac{-\beta_{2m}^2}{4} + (B+4)J_2(\beta_{0m}) \right\}$$

$$\times C_{2m}' \quad (49b)$$

$$\sigma_{r\theta}]_{\eta=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\beta_{2m}\eta_0)}{[J_2(\beta_{0m})]^2} \left\{ \frac{\beta_{0m}^2}{4} - (B+4)J_2(\beta_{0m}) \right\}$$

$$\times S_{2m}' \quad (49c)$$

이 (49a), (49b) 및 (49c)式을 $\eta=0$ 에서 適用함으로써 Karleker의 研究 [8]에서와 같은 原點에서의 不連續를 除去할 수 있다.

Ⅲ. 數值計算

理論解析된 結果의 妥當性을 確認하기 爲하여 서울 大學校 工科大學이 保有하고 있는 電子計算組織 IBM 1130을 使用하여 數值計算을 實施하였다. 主要한 計算 要領은 다음과 같다.

1. 프로그램의 構成

理論解析된 溫度分布와 熱應力成分들은 Bessel 函數를 包含한 無限級數形으로 주어지고 있다. 그런데 IBM에서 開發한 SSP(Scientific Subroutine Package)에 收錄되어 있는 Subroutine BESJ에서는 第1種 Bessel 函數의 값을 求함에 있어서 0次와 1次的 Bessel 函數의 값을 求하고 이로부터 循環公式에 依하여 n次的 Bessel 函數의 값을 求하는 方法을 使用하고 있다. 그런데 이 方法으로서의 變數가 작은 境況에 Bessel 函數의 次數가 높아짐에 따라 計算誤差가 累積되게 되어 높은 값을 求할 수 없게 되는 缺點이 있다. 또 뿐만 아니라 計算의 精度가 높아질수록 計算時間이 幾何級數의 으로 增加하게 된다. 따라서 計算에 所要되는 時間을 短縮하고 精度를 높일 目的으로 0次와 1次的 Bessel 函數값을 高精度로 計算하여 電子計算機의 補助記憶裝置에 記憶시키고 任意의 變數값에 對하여서는 Aitken의 高精度의 多點插問法에 依하여 函數值을 얻고 高次的 Bessel 函數값을 循環公式로 求하는 n次的 Bessel 函數에 關한 Subroutine인 BESJK를 새로히 만들어 使用하였다.

特性方程式 (43)의 根을 求함에 있어서는 根의 周期性을 考慮하여 2分割法을 補完하여 만든 프로그램 ALPIN을 使用하였으며 計算된 根은 計算組織의 補助記憶裝置에 記憶시켜 놓았다. 따라서 理論式의 計算에 있어서는 이러한 資料들을 使用함으로써 Extended Precision으로 計算함에 있어서도 計算所要時間을 SSP의 BESJ를 使用하는 境況에 比하여 約 1/4程度로 短縮하고도 보다 높은 精度의 計算이 可能하게 되었다.

2. 計算

(1) 收斂의 判定

理論式에서 $t''=0$ 인 境況에 있어서는 理論式의 收斂

性は t' 과 η 등에 의하여 달라지게 된다. $t'' > 0$ 인 境遇에 있어서는 收斂性이 t'' 이 커질수록 좋아지게 된다. 이와같이 收斂性을 支配하는 要因이 多樣하기 때문에 計算에 있어서나 $n=10$ 그리고 $m=15$ 로 하여 一次 計算하고 每 n 마다 計算結果를 出力으로 받아 收斂性을 直觀으로 判定하는 方法을 使用하였다. 이때 所要되는 時間은 每點當 約4分30秒 程度이었으며 收斂性이 나쁜 境遇에 있어서는 n 과 m 을 漸次 增加함으로써 收斂된 結果를 얻도록 하였다. 實際計算에 있어서는 特定한 몇

境遇를 除外하면 項數를 n 을 20 그리고 m 을 30으로 할 때 대체로 滿足스러운 程度로 收斂되는 것이 確認되었다.

(2) Biot 數의 影響

먼저 Biot 數가 溫度履歷에 미치는 影響을 確認하기 爲하여 (41a)式은 $\eta=0$ 에 對하여 簡單히 하고 η_0 와 B 를 變化시켜 計算함으로써 圓板의 中央點에서의 溫度履歷線圖인 Fig. 2를 얻었다. 이때 全加熱時間 t' 은 1로 取하였다.

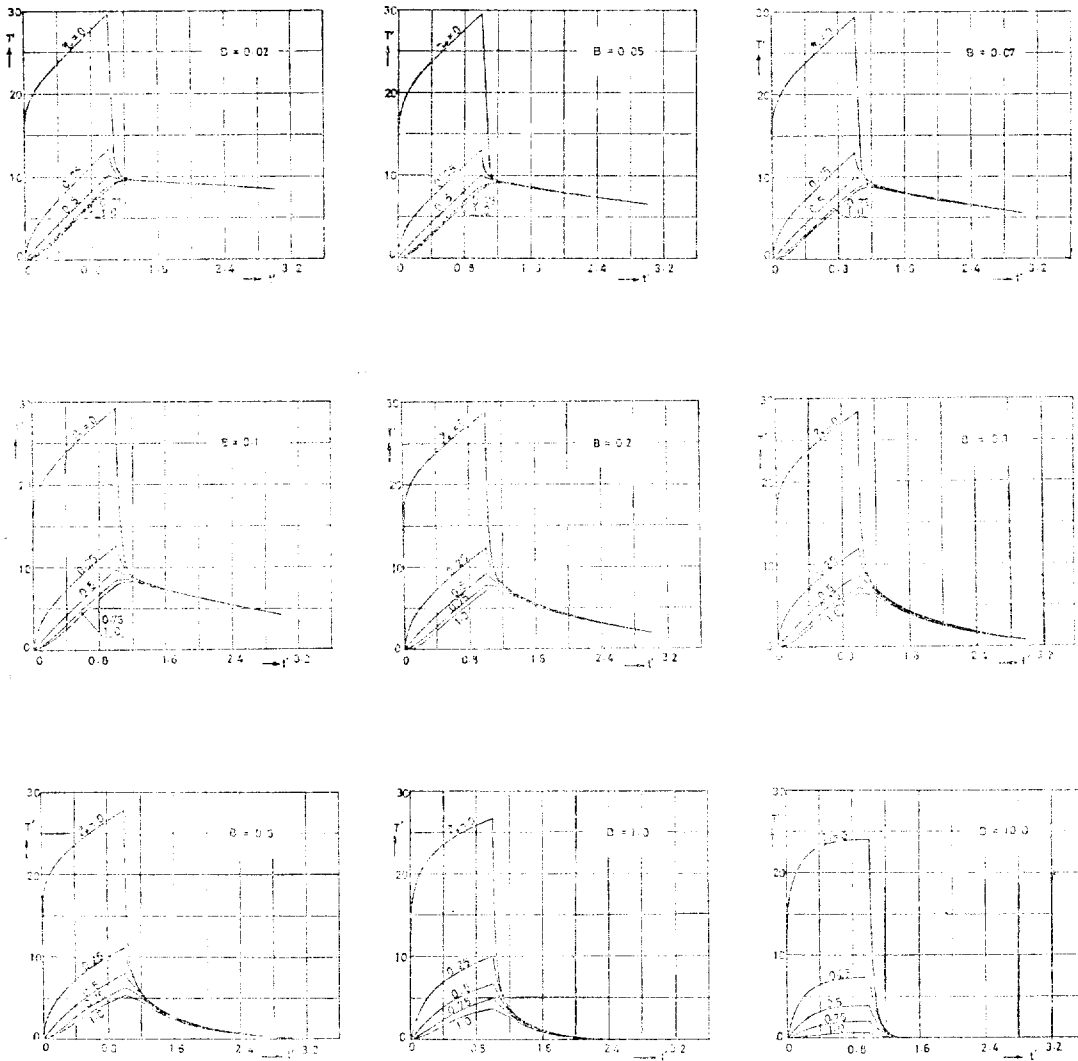


Fig. 2. Temperature histories at the center of disk

(3) 溫度分布 및 熱應力分布

Fig. 2에 주어진 中央點에서의 溫度履歷線圖에 依하면 加熱이 이루어지는 동안은 Biot 數의 影響이 적게 나타나고 熱供給이 遮斷된 후에는 그 影響이 比較的 크게 나타나게 된다. 圓板內의 溫度分布와 熱應力成分들

의 分布形態를 確認하기 爲하여 $B=0.1$ 로 놓고 $t''=0.505$ 이고 $t'=0.005$ 그리고 $w'=4\pi$ 인 境遇에 對하여 數值計算을 施行하여 Fig. 3과 같은 溫度分布 그리고 Fig. 4, Fig. 5 및 Fig. 6로 주어지는 熱應力 成分들의 分布를 求하였다.

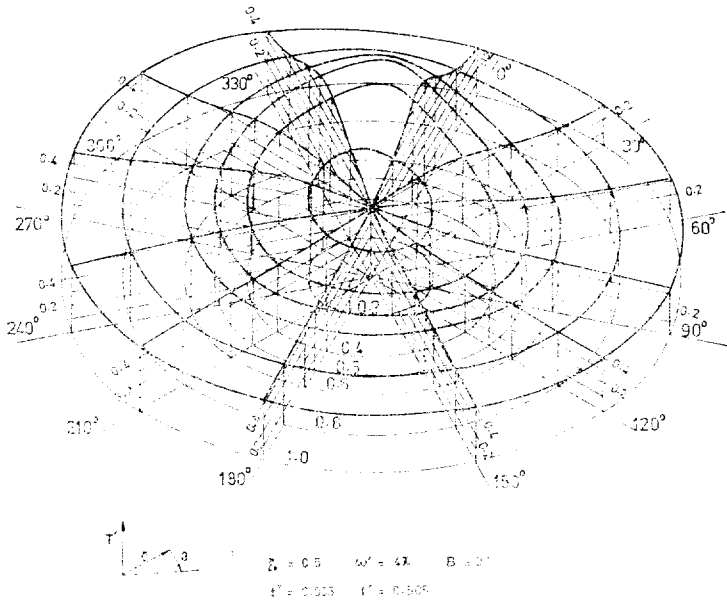


Fig. 3. Temperature distribution in a disk

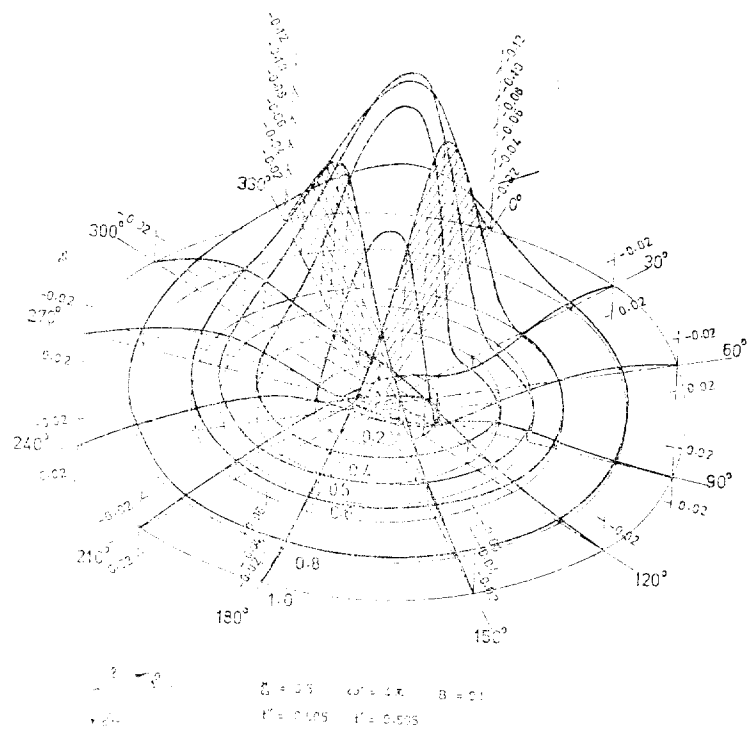


Fig. 4. Radial stress distribution in a disk

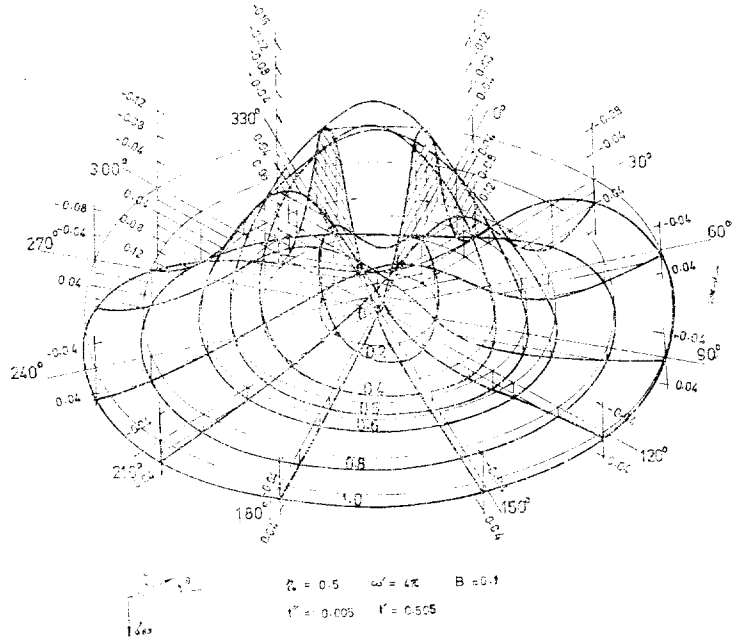


Fig. 5. Tangential stress distribution in a disk

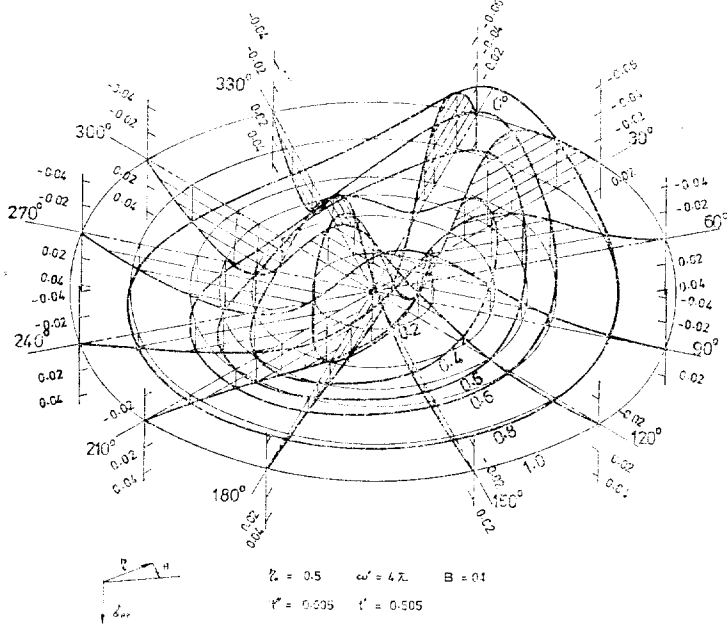


Fig. 6. Shear stress distribution in a disk

3. 計算結果의 檢討

圓板의 中央點에서의 溫度 變遷을 表示하고 있는 Fig.2의 新區들을 보면 Biot數가 同一한 境況에 있어서는 圓板의 中央에서의 溫度는 加熱過程中에는 熱源까지의 半徑 r_0 에 따라 큰 차이를 보이고 冷却過程中에는 時間이 經過됨에 따라 r_0 의 影響이 無視된 수 있을 程度

로 差가 없어지는 것을 볼 수 있다. 이러한 事實은 加熱過程中에는 板內의 溫度가 繼續上昇되며 溫度分布가 均一하게 될 수 없는데 反하여 冷却過程中에는 熱供給이 없기 때문에 圓板內部의 溫度가 平準化되며 r_0 의 크기에 關係없이 同一한 時間동안 加熱하였기 때문에 總入熱이 同一하다는 點을 考慮하면 熔融이 이루어지

않는 範圍內에서는 物理的인 現象과 잘 符合되는 것을 알 수 있다. η_0 가 一定한 境遇에 있어서는 B가 增加함에 따라 圓板의 原點에서의 溫度上昇이 작아지는 것을 볼 수 있으며 이러한 事實은 η_0 가 클수록 잘 나타났고 있다. 이러한 點 亦是 物理的 現象과 잘 符合된다고 볼 수 있다.

加熱過程이 끝난 後의 圓板內部的 溫度分布를 보인 Fig. 3을 보면 熱源이 주어졌던 軌跡圓上의 溫度가 다른 位置에 比하여 높은 溫度를 보이는 것을 볼 수 있으며 특히 加熱過程이 끝난 點보다 약간 뒤쪽인 350° 近處에서 最大溫度가 나타나는 것을 볼 수 있는데 이는 物理的 現象과 잘 一致되는 것으로 생각 할 수 있다.

圓板內에서 半徑方向으로의 應力 σ_{rr} 의 分布를 보인 Fig. 4를 보면 그 最大値는 溫度分布에서와 같이 熱源이 주어졌던 軌跡圓上에서 約 350° 程度되는 곳에서 나타나고 壓縮應力이 되는 것을 알 수 있다. 이것은 熱膨脹으로 因한 變形도가 이 近處에서 가장 큰 값을 갖으므로 母材에서의 彈性的인 拘束力이 크게 나타나는 것으로 볼 수 있다. 이에 準하여 熱供給이 初期에 주어졌던 90° 未滿의 區間에서는 軌跡圓近處와 中央쪽으로 引張應力이 나타나는 것을 알 수 있는데 이는 高溫部의 熱膨脹으로 因한 熱變形이 溫度가 낮은 隣接한 母材에 引張應力을 誘發하는 것으로 볼 수 있다. 또 圓板의 周緣에서는 理論式으로부터 確認할 수 있는 바와 같이 應力이 零이되어 境界條件을 滿足시키고 있음을 알 수 있다. 應力分布의 圓周方向으로의 變化形態도 溫度分布와 함께 미루어 볼 때 物理的으로 妥當하게 變化하고 있음을 알 수 있다.

圓板內에서의 圓周方向으로의 應力 $\sigma_{\theta\theta}$ 의 分布를 보인 Fig. 5를 보면 圓周方向의 應力 역시 高溫部에서 最大壓縮應力으로 나타나고 比較的 初期에 加熱되었던 區間에서는 引張應力이 나타나는 것을 볼 수 있는데 이는 半徑方向의 應力에 對하여 適用하였던 것과 同一한 論據로서 說明할 수 있다.

특히 周緣에서의 熱應力은 最終加熱區間에 隣接한 部分에서 最大의 引張應力이 나타나는데 이는 Fig. 3으로 주어졌던 溫度分布와 함께 미루어 볼 때 物理的으로 妥當하다고 볼 수 있다.

圓板內에서의 剪斷應力의 分布를 보이고 있는 Fig. 6에 의하면 高溫部에서 剪斷應力의 變化가 가장 크고 符號도 이 近處에서 바뀌게 되는 것을 알 수 있다. 이러한 事實은 高溫部에 依한 剪斷變形이 高溫部의 前後에서 다르게 나타난다는 物理的인 現象과 잘 符合된다. 또한 周緣에서의 剪斷應力은 理論式에서도 確認할 수

있는 바와 같이 零이 되어 境界條件을 滿足하고 있음을 알 수 있다.

IV. 實 驗

理論解析에 있어서는 앞에서 普及한바와 같이 大膽한 假定下에서만 嚴密한 解가 얻어지기 때문에 實際工學問題에 適用하는데 있어서는 많은 制限이 있을 것으로 생각된다. 그러나 同等한 假定下에서 熔接으로 因한 溫度分布를 糾明할 目的으로 無限平板에서 熱源이 直線移動하는 境遇를 다룬 Rosenthal [9], [10], [11]의 研究들이 Adams [12], [13], [14]등에 依하여 다듬어지고 適用範圍가 擴張되어 갔다고 볼 수는 있으나 物理的 特性의 溫度에 따른 變化를 考慮하여 解析한 Gresh [15]의 研究等に 比하여 實際工學의 問題에 對하여 더욱 rudimentally 使用되고 있다. 따라서 理論解析된 結果는 實驗的 檢證만 주어진다던 相當히 높은 溫度까지 加熱되는 工學의 應用例에 適用될 수 있을 것이 믿어진다. 그런데 圓板의 周緣上을 熔接하는 境遇에 關하여 實驗한 Sodel [17]의 研究에서의 實驗結果는 本 研究에서와는 달리 實驗模形의 中央部에 銅으로 된 buffer가 裝着되어 있으므로 해서 理論式과 直接的인 比較가 이루어질 수 없다. 따라서 前述한 研究들에서와 같이 熱電對에 依하여 溫度履歷을 計測함으로써 얻어진 理論解의 檢證을 實施하기로 한다.

1. 基本計劃

(1) 加熱方式

理論式에서 假定한 바에 依하면 瞬間點熱源이 一定速度로 圓軌道上을 移動하는 것으로 생각하여 二次元的으로 熱應力을 解析하고 있다. 그런데 이에 가장 接近된 工學의 應用例로서는 熔接作業을 생각할 수 있다. 熔接作業中 흔히 使用되는 電弧熱에 依한 加熱方式은 電源을 直流로 하는 境遇와 交流로 하는 境遇로 나누어진다. 그런데 交流를 使用하는 境遇에 있어서는 直流電源을 使用하는 境遇에 比하여 다음과 같은 短點들이 주어진다. 즉 첫째로 交流熔接의 境遇에 있어서는 試驗片과 電極사이의 極性이 電源의 周波數와 같이 變化함으로써 因하여 記錄計의 出力이 크르지 못하게 된다. 둘째로는 被覆劑를 使用하지 않는 境遇에 있어서는 試驗片內의 磁場의 變化 등으로 因하여 試驗片의 幾何學的 形態에 따라 電弧가 安定되지 못하는 arc blow 現象이 심하게 나타나게 된다. 따라서 實驗에서는 이들을 避하기 爲하여 直流電源을 使用하기로 하였다.

(2) 電 極

一般熔接에서와 같이 被覆 arc 熔接棒을 使用하는 境遇에 있어서는 電弧熱에 依하여 熔解된 金屬과 被覆劑

가 試驗片에 熔着되게 된다. 그런데 이러한 熔着金屬은 試驗片의 表面條件을 理論解析에서 假定한 것과는 다르게 變化시킨다는 缺點을 갖고 있다. 따라서 電極으로 炭素棒을 使用하기로 하였다.

(3) 試驗用 材料

計劃된 加熱方式을 使用하는 境遇에 있어서는 材料의 電弧熱等에 對한 酸化特性等을 考慮할 때 一般 熔接構造物에서 흔히 使用되는 構造用 軟鋼板(KS SB41)이 比較的 優秀하기 때문에 이를 使用하기로 하였다.

이때 試驗片의 두께는 試驗片의 熔接熱로 因한 殘留 熱變形과 二次元的 特性을 維持하기 爲한 penetration 特性等을 考慮하여 5.82 mm의 것을 使用하기로 하였다

(4) 試驗片

試驗片은 幾何學的인 特性은 試驗裝置와 熔接條件 그리고 熱電對의 特性等을 考慮하여 Fig. 7과 같이 計劃하였다.

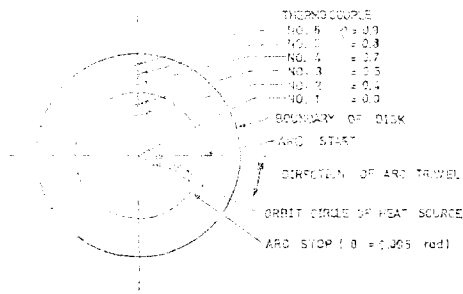


Fig. 7. Location of thermocouple

2. 試驗裝置

(1) 熔接機

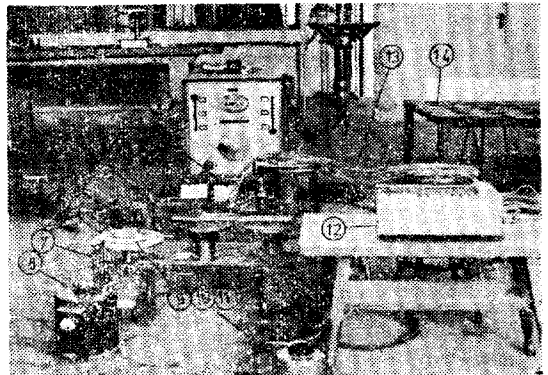
基本計劃에서 言及한 바와 같이 直流熔接을 實驗하기 爲하여 美國의 Air Reduction Sales Co.에서 製作한 直流熔接機(Model 2.5A/DDR-249-A)를 使用하기로 한다

(2) 定速回轉裝置

電極이 試驗片과 同心인 圓周上을 一定한 速度로 移動하기 爲하여 다음과 같은 裝置를 製作하였다. 減速裝置用 電動機는 電源의 電壓을 變化시킴으로써 變速이 가능한 commutator motor를 使用하였으며 出力軸에 2段으로 worm gear에 依한 減速을 할 수 있는 減速齒車箱을 製作하여 齒輪으로 電動機의 出力軸의 速度를 減速하여 使用하도록 하였다. 減速機의 出力軸에는 圓板을 달고 이 圓板의 回轉이 同一한 軸수를 갖는 圓板에 一定하게 傳達될 수 있도록 自轉車用 chain과 sprocket wheel을 使用하여 連結하였다. 이 두개의 圓板에는 相對位置가 同一한 位置에 구멍을 뚫고 連結桿을 組立하여 圓運動을 crank lever mechanism에 依하여 轉換하였다. 따라서 連結桿에 熔接機의 電極을 設

置하였을 때 導線이 圓運動으로 因하여 꼬이는 일이 없이 電極의 圓運動을 얻을 수 있게 되었다. 이때 電極과 連結桿은 絶緣시킴으로써 電動機에 두리가 가는 일이 없도록 配慮하였다.

그리고 電極의 바로 아래에는 試驗片을 支持하기 爲하여 圓板으로된 試驗片 支持臺를 만들어 놓았다. 이 支持臺에는 周緣上의 3個所에 試驗片을 固定하기 爲한 볼트를 두었다. 볼트의 先端은 試驗片과의 接觸面이 最小가 될 수 있도록 妥善하게 加工하였다. 그리고 支持臺의 床面은 試驗片과의 直接接觸되지 않도록 石棉板으로 斷熱하였다. 石棉板에는 溫度計測이 計劃된 位置에 熱電對의 導線을 導出하기 爲한 구멍을 두었다.



- | | |
|---------------------|-------------------------------|
| 1. DC welder | 8. transformer for motor |
| 2. ampere meter | 9. model |
| 3. volt meter | 10. transformer for recorder |
| 4. electrode holder | 11. motor |
| 5. electrode | 12. recorder |
| 6. asbestos | 13. thermocouple lead wire |
| 7. earthcable | 14. models to be experimented |

Fig. 8. Welding arrangement

(3) 記錄裝置

Fig. 7에 表示된 바의 6個의 計測點에서의 溫度履歴을 同時に 計測할 수 있는 RMS 11-EPT型的 直記式電子 oscillograph를 使用하였다. 이때 galvanometer는 實驗目的에 그 應答特性이 가장 좋은 MS 150-BH를 選定하여 記錄計에 使用하였다. 그리고 實驗條件에 適合한 2.5 mm/sec의 記錄紙의 移動速度를 얻을 수 있었다.

3. 實驗準備

(1) 電極

基本計劃에서 言及한 바와 같이 直流熔接機를 使用한 炭素電極에 依한 電弧熱을 利用한 加熱方式을 探擇하였으므로 다음과 같이 準備하였다.

電極用 材料으로는 一般用 乾電池의 炭素電極을 꺼내어 使用하였다. 이때 電極의 先端의 形態가 電弧의 安定에 影響을 주므로 電極의 先端을 小銃彈丸의 尖端

과 같은 形態로 機械加工하고 이를 使用하여 2~3 分間 電弧를 發生시킴으로 炭素棒內에 浸透되었던 可燃性物質이 燃燒되고 尖端의 形態가 電弧安定에 適合한 形態로 自然形成되도록 하여 이를 實驗用 電極으로 使用하기로 하였다. 이렇게 일어난 炭素電極의 尖端은 약간 둥근 圓球形이 된다. 그리고 電極의 長이가 짧기 때문에 鋼管을 使用하여 電極을 固定할 수 있는 部品을 만들어 使用하였다.

(2) 熱電對의 Brazing

Fig. 7에 주어진 計測點에는 直徑 0.312 mm(BS gage 30番)의 Iron Constantan 熱電對를 brazing 하였다. 그리고 計測點에는 1/32 inch의 直徑을 갖는 구멍을 約 4 mm 程度의 長이로 뚫고 熱電對를 끼워 넣었다. 이렇게 함으로써 Adams[14]의 研究結果에서와 같이 熱源이 試驗片의 軸面에서만 주어짐으로 인하여 試驗片內의 溫度가 두께 方向으로 다르게 나타나는 3次元의 特性이 計測되는 것을 피하고자 하였다. 實際의 brazing 作業에 있어서는 試驗片과 熱電對사이의 幾何學的 形狀의 差異로 인한 커다란 熱容量의 差가 brazing 을 어렵게 하기 때문에 다음과 같은 要領으로 作業하는 것이 必要하였다.

熱電對를 구멍에 끼워넣기에 앞서서 구멍주위의 酸化皮膜을 除去하고 熱電對를 끼워 넣은 다음에는 구멍주위에 硼砂를 微量撒布한다. 硼砂의 量이 지나치게 많은 境遇에는 溶融된 硼砂가 구멍안으로 흘러들어 接觸抵抗이 增加되며 硼砂의 量이 적은 境遇에는 表面에 形成되는 酸化皮膜으로 인하여 接觸이 나빠지게 된다. Brazing 用 銀은 厚이가 1~2 mm 程度이고 두께가 0.1~0.2 mm 程度가 되도록 두들겨서 微小한 薄片으로 만들고 4~5개의 薄片을 골라서 熱電對 周圍에 모아 놓는다. 加熱은 酸素아세틸렌火焰에 依하였으며 硼砂와 銀이 火焰에 依하여 불타나가지 않도록 하기 위하여 試驗片의 裏面으로 부피 加熱하였다. 이때 加熱要領은 火焰의 熱기가 試驗片의 裏面까지 赤熱되는데 約 1分 程度가 所要되도록 調節되어야 하며 加熱되어 硼砂와 銀이 溶解되어 熱電對를 끼워 넣은 구멍 사이로 흘러들어가게까지 加熱한다. 이때 加熱時間이 지나치게 길면 熱電對가 熔解되게 됨으로 注意를 要한다. 특히 熱電對가 加熱過程中 넘어지지 않도록 適切히 支持하여 주는 것이 必要하다.

(3) 試驗片의 設置

準備된 試驗片을 定速回轉裝置의 試驗片 支持位置에 brazing 된 熱電對에 무리가 가지 않도록 注意하면서 試驗片을 올려 놓는다. 이때 試驗片의 中心位置는 電極이 그리는 軌跡圓의 中心과 一致되어야 하며 電極과

試驗片과의 距離는 2~3 mm의 範圍內에서 一定한 값을 갖도록 높이가 調節되어야 한다. 試驗片支持臺의 아래로 導出된 熱電對의 抵抗을 計測하여 設置中에 接觸이 나빠지지 않았음을 確認한다. 熱電對와 導線의 連結은 蠟납을 使用하여 實施하였다. 이때 熱電對는 vinyl管 속을 通過하게 함으로써 試驗片支持臺 등과 隔離되게 함으로서 記錄計에 나타나는 騒音を 緩和시키었다. 또 導線을 地面에 닿지 않게하고 熔接機의 接地線은 試驗片支持臺 등과 屋內의 電線管에 接地시키는 것등이 記錄計의 騒音を 緩和시키는데 効果가 있었다. 理論解析에서 溫度分布와 熱應力을 2次元 平面問題로 假定하여 解析하였기 때문에 試驗片의 뒷면은 아렌편과 같이 石棉板으로 斷熱하였으며 熱源이 지나간 軌跡圓上은 구멍을 두어 電弧가 維持될 수 있게 하였다. 이렇게 함으로써 周緣에서만 放熱된다는 理論假定과 符合되게 할 수 있었다.

(4) 電弧安靜劑

實驗中 arc blow 現象에 依한 電弧의 不安定을 피하기 위하여 電弧의 安定化 性能이 가장 優秀한 高酸化 titanium 系의 熔接棒(E 4313)에서 被覆劑를 대어내어 粉末로 만들어 安靜劑로 使用하였다. 이때 高酸化 titanium 系의 熔接棒은 penetration이 적다는 特性을 갖기 때문에 可能한 限 使用量은 最少限으로 抑制하였다 즉 熔接棒에서 使用하는 量의 約 1/20 程度의 量을 使用함으로써 penetration을 適正히 維持하면서 電弧의 安定을 얻을 수 있었다. 따라서 電極이 移動할 軌跡圓上에 微量의 安定劑를 實驗에 앞서 均一하게 撒布하였다.

(5) 熔接速度의 選定

熔接作業의 標準條件을 調査하여 約 30 cm/min로 熔接速度를 決定하였다. 實驗에 앞서서 電動機의 入力電源의 電壓을 서서히 增加시키고 時計의 秒針에 依하여 圓板의 回轉速度를 計測하고 適正한 速度에서의 電壓을 調査하였다.

(6) 記錄計의 準備

熱電對의 導線의 抵抗을 計測하여 接觸狀態를 確認하고 熱電對의 導線을 冷點과 記錄計의 端子에 連結한다. 다음에 電源의 電壓을 記錄計의 定格電壓인 100 volt로 調節한다. 記錄計의 電源스위치를 넣고 觀測窓을 通하여 光點의 位置를 觀測하여 光點의 位置를 實驗結果의 判讀에 便宜하도록 上下段에 各 3個씩 2 mm 間隔으로 配列하고 光點의 移動方向을 調節한다.

(7) 電流計

熔接中 電弧의 電流를 計測하기 위하여 shunt type의 高負荷用 直流電流計를 熔接機의 電極線에 直列로

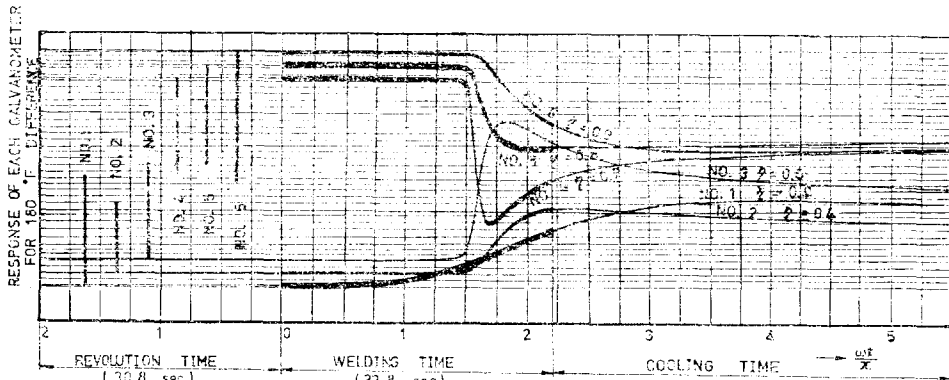
連結하였다. 이때 電流計의 最大負荷能力은 200 amp 이었다.

4. 實驗 및 結果

實驗準備가 完了되던 回轉裝置를 適正速度로 回轉시키고 圓板上의 特定點을 基準으로 하여 1 回轉하는 동안 電弧의 發生없이 記錄을 實施하여 電極이 1 回轉하는 時間을 計測한다. 電極이 軌道上面 一回轉하는 瞬間에 熔接棒을 두들기시 만든 鐵片으로 電氣接點을 形成하여 電弧를 發生시키고 電弧를 觀測하여 安定한 狀態에서 電弧가 移動되는 것을 確認하고, 電弧의 電流를 計測하고 電壓은 一般用 tester 를 使用하여 計測한다.

計測이 끝나고 電弧가 1 回轉 以上 移動하였을 때 電源을 끊어 電弧에 依한 熱供給을 中斷한다. 記錄은 熱供給이 中斷된 以後에도 繼續하여 記錄을 實施하고 記錄計의 觀測窓을 通하여 光點을 觀測하여 試驗片內의 溫度가 거의 一定한 溫度에 到達된 것으로 觀測되던 記錄計의 電源을 끊어 記錄을 中斷하였다. 이때까지 所 要되는 時間은 電弧가 32 秒程度 주어 졌으며 熱供給이 끊어지고 平衡狀態까지 約 3~4 分 程度이었다.

實驗이 끝난 後에는 記錄紙를 切取하여 螢光燈下에서 現像하였다. 이렇게 얻어진 溫圖履歷線圖는 Fig. 9 와 같다.



- | | | | |
|-------------|-------------------|----------|-------------------|
| 1. Polarity | straight polarity | 4. r_d | 80 mm (3.15 inch) |
| 2. Current | DC 70 amp | 5. r_o | 50 mm (1.89 inch) |
| 3. Voltage | 23 volt | | |

Fig. 9. Recorded temperature histories

5. 檢證計算

(1) 入熱效率

熔接中 電弧에 依하여 發生된 全熱量에 對하여 試驗片에 實際로 傳達되는 熱量과 의 比를 入熱效率이라 생각한다. 入熱效率은 實際의 熔接作業等에서는 熔接棒의 種類와 熔接條件에 따라 變化하고 있다. 이러한 變化를 Ando[18]는 體系의인 實驗을 通하여 解明되고 있다. 實施한 實驗에서는 Ando의 實驗과는 달리 炭素電極을 使用하여 加熱한데에 差異가 있다. 따라서 實驗에서의 入熱效率은 Ando의 實驗資料로부터 熔接된 熔接棒이 試驗片에 傳達될 때 試驗片에 傳達하는 熱量을 除外하고 計算함으로써 얻을 수 있다고 생각된다. Ando의 實驗結果에서 熔融된 熔接棒으로 因하여 傳達되는 熱量을 除外하고 效率을 計算하면 0.63~0.66 範圍內의 값을 갖는다. 그런데 熔接棒의 被覆劑에 依한 化學反應熱이 Ando의 實驗에서는 入熱로 取扱되어 있으므로 實驗에서는 除外하여야 한다는 事實을 생각하면 入熱效率은 0.6 程度로 생각할 수 있다. 이 結果는 Rosenthal[11]에 依하여 假定된 入熱效率과 一致되는 값이다.

(2) 熱의 常數

熱의 常數는 理論式에서 溫度에 無關한 常數로써 取扱하고 있으나 實際는 溫度에 따라서 變化하고 있음이 알려져 있다. 그러나 工學的인 目的으로서는 常數로 取扱하여 좋은 結果를 가져올 수 있으므로 文獻에 表示된 값들의 平均値를 擇하여 이를 計算에 使用하기로 한다. 文獻에 나타난 값들의 平均値를 取하면 熱擴散率은 0.01364 in²/sec 이고 熱傳導度는 0.00056 Btu/in-°F-sec 의 값을 갖는다.

(3) Biot 數

Hsu [3]의 計算例에서는 Biot 數가 0.1보다 작은 境 遇에 있어서는 Biot 數의 變化에 依한 溫度의 差異가 크지 않음이 밝혀져 있다. 그런데 實驗計測된 溫度履歷線圖 Fig. 9의 中央點에서의 溫度履歷과 數值計算된 中央點에서의 溫度履歷線圖 Fig. 2를 比較하여 보면 Biot 數가 0.02 附近의 값을 가질 것이 豫測된다. 따라서 Biot 數는 0.02로 選定하였다.

(4) 實驗結果의 無次元化

前述한바의 常數들을 使用하고 Fig. 8에 주어졌 幾何學的 尺寸 그리고 galvanometer 의 單位溫度當의 應

答特性을 考慮하여 (40)式으로 주어진 關係를 使用하여 無次元化하면 Fig. 9로 주어진 實驗計測된 溫度履歷線圖는 Fig. 10과 같이 無次元化되어 表示된다.

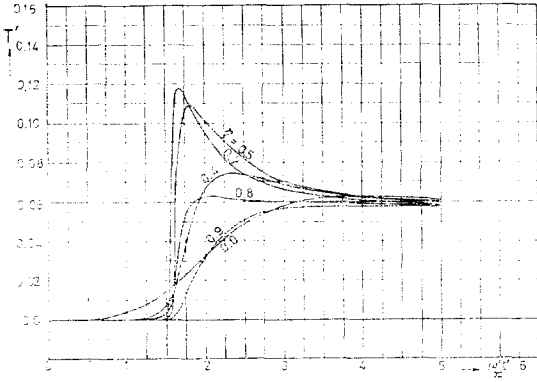


Fig. 10. Experimental dimensionless temperature histories

(5) 理論解析된 溫度分布

實驗計測된 電流과 電壓 그리고 試驗片의 寸수와 熔接速度, 全熔接時間等의 資料를 使用하고 前述한 바와 같이 選定한 常數들을 適用하여 數值計算에서 言及한 바와 같은 要領으로 計算을 實施하던 實驗條件에 對應되는 理論에 依한 溫度履歷은 Fig. 11.과 같이 無次元化되어 計算되어 진다.

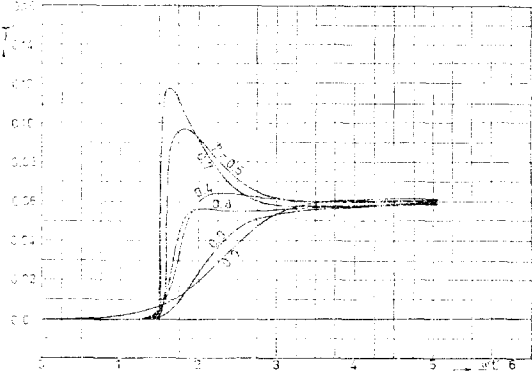


Fig.11. Theoretical dimensionless temperature histories

V. 檢 討

1. 實驗結果의 檢討

實驗計測된 溫度履歷線圖 Fig. 10과 理論式에 依하여 計算된 溫度履歷線圖 Fig. 11을 比較하여 보면 熔接初期에 있어서는 計測點의 位置가 電弧가 그리는 軌跡圓으로부터 가까울수록 理論結果와 實驗結果를 잘 一致하는 것을 볼 수 있다. 熔接作業이 進行됨에 따라 理論解析된 溫度는 計測된 溫度에 比하여 낮은 溫度를 보이는 것을 볼 수 있다. 그리고 作業이 終了되고 時間

이 經過됨에 따라 理論解析된 溫度와 計測된 溫度는 모든 計測點에서 一致하게 되는 것을 볼 수 있다. 이러한 事實은 理論解에서 모든 物性を 溫度에 無關한 常數로 取扱하고 있는데 反하여 熱의 常數等의 物性이 溫度에 따라 變化하고 있는데 原因이 있다고 보여진다. 特히 最高溫度까지 到達되었다가 冷却되는 過程에서 이러한 差異가 가장 뚜렷하게 나타나는 原因은 電弧에 依하여 加熱되는 過程을 觀測함으로써 다음과 같은 點에 있다고 생각할 수 있다. 即 加熱過程中에 電弧에 依하여 直接加熱되는 部分을 觀測하여 보면 Pavelic의 觀測結果와 類似한 熔融池를 觀測할 수 있다. 이러한 事實은 試驗片이 熔融된 때 相當한 量의 熱이 材料에 潛熱의 形態로 供給되게 되는데 理論式에서는 이러한 量이 考慮되어 있지 않은 反面에 實際에 있어서는 材料가 冷却되어 갈때 熔融池에 潛熱로 貯藏되었던 熱이 放出됨으로 冷却이 遲延되는데에 있다. 또한 作業이 終了된 後에는 時間이 經過됨에 따라 理論式으로 부터 얻어진 溫度分布가 實驗計測된 溫度와 漸次一致하여지는 原因을 생각하면 다음과 같다. 實驗에서는 熱源이 試驗片의 周緣으로부터 相當한 距離 떨어진 圓板內部에 주어지고 있는데 이는 周緣에서의 對流에 依한 熱放出이 적다는 것을 뜻한다. 따라서 試驗片에 供給된 熱量의 大部分이 試驗片內部에 貯藏되게 되고 時間이 經過됨에 따라 試驗片內部的 溫度分布가 均一하게 될 것으로 期待할 수 있다. 그런데 溫度履歷은 理論式에 依하여 計算함에 있어서는 Biot 數를 0.02로 取하였으므로 이 값은 Hsu에 依하여 計算된 바에 依하면 Biot 數의 變化가 溫度分布에 影響을 미치지 못하는 範圍內에서의 값이다. 따라서 實際의 境遇와 多少의 變化가 있더라도 計算된 溫度가, 時間이 實驗範圍內에서와 같이 比較的 작은 境遇에 있어서는, 實際와 잘 一致되는 것이 當然하다고 생각된다. 그리고 試驗片內의 溫度가 平準化되었을 때는 全入熱이 試驗片을 均一하게 加熱하는데 所要되는 것으로 생각되어 計算하였을 때 얻어지는 結果와 一致되는 것을 確認할 수 있다. 이러한 事實들로 미루어 볼 때 理論解析된 結果는 設定된 問題에 關하여서는 嚴密한 解가 되며 工學的인 目的으로서 充分히 有用한 精度를 갖는 것으로 생각한다.

2. 熱應力

理論解析된 熱應力을 定量的으로 檢證하기 爲하여서는 實驗的으로 熱應力의 定量的인 計測이 可能하여야 한다. 그런데 應力解析法으로서 一般的으로 使用되는 strain gage에 依하여 變形度를 計測하는 方法을 생각할 수는 있으나 高溫域에서도 使用可能한 strain gage를 求할 수 없다는 難點을 가지고 있다. 또한 光彈性學的인 方法으로서 溫度分布가 알려진 靜的인 問題에

있어서는 熱應力を 計測할 수 있는 方法이 Slot [46]에 依하여 提案된바 있으나 動的인 問題에 있어서는 아직 實驗法이 알려진바 없다. 따라서 Sodel은 熱應력을 計測하지 않고 熔接된 diaphragm의 熔接으로 因한 影響을 使用狀態에 해당하는 負荷狀態에서 實驗하므로써 解析하고자 하고 있다[20]. 또한 無限板上에서 熱源이 直線移動하는 境遇에 對하여 熱應력에 關한 理論解析을 實施한 Wantanabe[21]의 研究나 Fox[22]의 研究에 있어서도 上述한 어려움 때문에 實驗的 檢證을 實施하지 못하고 있다.

따라서 本 研究에서 얻어진 熱應力成分들을 物理的 現象과 比較類推함으로써 定性的 檢證이 可能할 뿐이라고 생각된다. 이미 數值計算과 그 結果의 檢證에서 理論解의 妥當성이 認證되었으나 좀더 明確한 說明을 爲하여 Fig. 11로 주어진 溫度履歷에 對應되는 熱應力成分들의 履歷을 求하되 Fig. 12, Fig. 13 및 Fig. 14가 얻어진다.

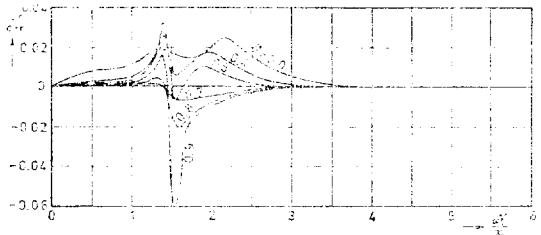


Fig. 12 Histories of radial stresses

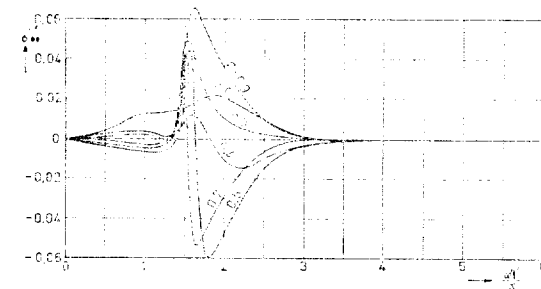


Fig. 13 Histories of tangential stresses

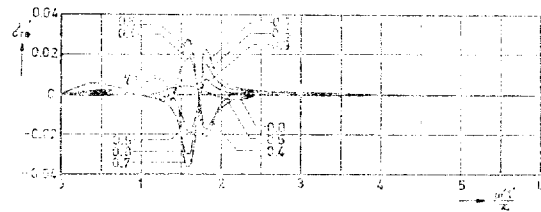


Fig. 14 Histories of shear stresses

半徑方向의 熱應力の 履歷을 表示하고 있는 Fig. 12를 보면 加熱過程의 初期區間에서는 모든 計測點에서 引張應력을 받고 있음을 알 수 있다. 熱源이 計測點을

通過하기 直前に 引張應力の 極值가 나타나고 熱源이 計測點을 通過할 때 熱應力이 急變하여 熱源이 軌跡圓보다 內側に 놓인 모든 計測點에서는 引張應力이 주어지고 軌跡圓보다 外側に 놓인 모든 計測點에서는 壓縮應력을 받게 되는 것을 볼 수 있다. 그런데 軌跡圓보다 內側に 놓여진 計測點에서도 軌跡圓과 隣接된 境遇에 있어서는 部分的으로 壓縮을 받게 되는 것을 알 수 있다. 그리고 時間이 經過함에 따라 모든 計測點에서의 熱應力이 없어지는 것을 볼 수 있다. 이러한 事實을 加熱過程에 對한 物理的 現象을 類推함으로써 그 妥當性을 認證할 수 있다. 즉 加熱初期過程에 있어서는 加熱된 區間으로부터 計測點의 位置가 따라 떨어져 있기 때문에 그로 因한 引張應力이 적게 나고 計測點을 熱源이 通過하기 直前에는 加熱된 區間이 閉曲線을 構成하고 있지 않기 때문에 모든 計測點에서 引張應力の 極值가 나타나는 것이 當然하다. 熱源이 計測點을 通過하고 加熱區間이 閉曲線을 構成하게 됨에 따라 熱應力이 急變하여 軌跡圓의 內部에서는 引張 그리고 外部에서는 壓縮應력을 받게 되는 것을 豫測할 수 있으며 이러한 現象이 計算結果와 잘 一致된다. 軌跡圓과 隣接하여 內側に 놓여진 計測點에는 熱源에 依한 熱膨脹의 影響으로 因하여 熱源이 隣接한 區間동안 壓縮應력을 받을 것이 豫測되는데 이러한 現象 역시 計算結果에 잘 나타나 있다. 또한 冷却過程에서 時間이 經過됨에 따라 溫度分布가 平準化됨으로써 因하여 熱應力이 漸次 없어질 것이 期待되는데 이러한 事實도 計算結果에 잘 나타나 있다.

圓周方向의 應力成分의 履歷을 表示하고 있는 Fig. 13을 보면 加熱過程의 初期에 있어서는 熱源이 移動하는 軌跡圓의 內側に 놓여진 計測點에서는 引張應力이 주어지고 軌跡圓의 外側に 놓여진 計測點에서는 壓縮應력을 받고 있음을 볼 수 있다. 그런데 이런 事實은 加熱된 區間에 가까운 部分에서는 熱膨脹에 依한 引張應력을 받게 되고 加熱된 區間으로부터 距離가 커질수록 試驗片의 形狀이 圓形이기 때문에 壓縮應력을 받을 것으로 豫測되는데 이와 잘 一致하는 것을 알 수 있다. 熱源이 計測點을 通過하는 時點에 있어서는 모든 計測點에서 引張應력을 받고 있는 것으로 나타나는데 이境遇에 있어서는 加熱된 區間이 閉曲線을 形成하지 못하고 있다는 點을 생각할 때 當然하다고 생각된다. 또 熱源이 閉曲線을 構成하고 熱供給이 遮斷되고 冷却되어지는 過程에 對하여서도 半徑方向에서 생각하였던 것과 同一한 論據로서 物理的인 現象과 잘 一致되는 것으로 說明할 수 있다.

剪斷應力の 履歷을 表示하고 있는 Fig. 14를 보면 加

熱過程의 初期區間에서는 加熱된 區間으로부터 原點에 놓인 計測點이 가장 가까운 距離에 놓여짐으로 半徑方向의 熱應力이나 圓周方向의 熱應力에서와 같이 原點에 놓인 計測點에서 最大의 應力を 보이고 加熱된 區間이 漸次 增加함에 따라 增加하여 熱源이 計測點에 到達하기 直前에 極值를 갖게 됨을 알 수 있다. 그런데 이때 熱源이 그리는 軌跡圓의 內側에 놓여진 計測點과 外側에 놓여진 計測點에서의 熱應力은 서로 相反되는 符號를 갖는 것을 볼 수 있다. 이러한 事實은 加熱된 區間으로 因한 剪斷變形이 軌跡圓의 內側과 外側에서 서로 相反되게 나타난다는 物理的 現象과 잘 一致된다. 熱源이 計測點을 通過하고 加熱된 區間이 閉曲線을 構成하게 됨에 따라서 剪斷應力이 變急하여 그 符號가 完全히 뒤바뀌게 되는 것을 볼 수 있다. 그런데 이러한 事實은 加熱된 區間에서 高溫部의 位置에 따라서 剪斷變形이 相反되게 나타난다는 物理的 現象과 一致된다. 또한 冷却過程에서 剪斷應力이 漸次 減少하여 없어지게 된다는 事實 또한 半徑方向의 應力成分에 對하여 適用한 것과 同一한 論理로서 說明되어질 수 있다.

따라서 數值計算의 檢討에서 言及한 事實과 위에 言及한 事實들로 비추어 볼 때 理論解析된 熱應力 成分들은 設定된 問題에 關하여 加熱에서부터 冷却에 이르기까지의 全區間에 對하여 適用할 수 있는 嚴密解가 됨을 알 수 있다. 理論解는 本이 過程에서 大膽한 假定들이 適用되었기 때문에 實驗法이 開發되었을 때 精度를 確認하여야 한다는 問題가 남아 있게 된다.

3. 理論結果의 應用

언어진 理論解들을 設定한 假定들의 制約으로 因하여 實際의 工學의 問題에 關하여 定量的인 知識을 얻는 데에 問題가 있으나 工學的으로 充分히 有用한 結果를 얻을 수 있음이 說證된다. 따라서 다음과 같은 工學의 應用例에 適用한다면 좋은 結果를 얻을 수 있을 것으로 믿어진다.

(1) 圓形素材의 火燄熱處理

圓形素材의 壽命을 延長하기 爲한 表面熱處理方法의 하나로서 強力하게 使用되는 火燄熱處理에서는 素材의 溫度分布 및 變形程度가 製品의 精度에 크게 影響을 주게 된다. 이러한 熱處理 問題에 對하여 熱源이 周緣上에 주어지는 것으로 보아 理論解를 使用한다면 理論解가 周緣에서의 熱損失만을 考慮하여 2次元의 解析된 것이기 때문에 相當히 긴 部材에 對하여서는 加熱過程과 冷却過程에 對하여 溫度分布와 熱應力에 關한 有用한 知識을 얻을 수 있을 것이 期待된다. 또한 齒車의 素材 등과 같은 比較的 짧은 素材에 關하여서는 加熱過程은 本 理論式에 依하여 解析하고 油冷 또는 水冷과

같은 冷却過程에 關하여서는 Karlecker [8]의 理論을 使用한다면 더욱 좋은 結果가 얻어질 것이 期待된다. 이 경우에는 入熱效率의 推定과 Biot 數의 推定等의 問題가 選行되어 解決되어야 하는 問題로 남게 된다.

(2) 圓形배움 熔接

船舶과 같은 重量輕減이 要求되는 構造物에서는 強度上 問題되지 않는 部材에 重量을 輕減할 目的으로 구멍을 뚫게 되며, 配管 등과 같은 技能을 確保하기 爲하여 그리고 作業員의 接近性を 確保하기 爲하여 구멍을 設置하게 되는 境遇가 大端히 많다. 이러한 구멍을 施工段階에서 다시금 매우게 되는 境遇가 흔히 있으며 作業中 發生된 熔接缺陷을 除去할 目的으로 이 部分을 圓形으로 뚫고 다시 매우는 境遇 등과 같이 圓形으로 매우는 境遇가 大端히 많다. 그런데 이와 같이 圓形으로 매우는 境遇에 있어서는 다른 熔接에 比하여 훨씬 많은 缺陷이 發生되게 됨으로 이에 關聯된 研究가 대단히 많이 이루어지고 있다. 例컨대 Yoshida [23] 및 Kihara [24], [25]는 圓形배움 熔接에 있어서 板의 두께, 구멍의 치수 그리고 熔接順序等이 殘留應力 및 殘留變形에 미치는 影響을 實驗으로 研究하고 있다. 또 Cepolina [26]는 圓形배움 熔接에 있어서의 殘留應力을 計測하기 爲하여 Sachs에 依하여 提案된 逐次穿孔法의 變形을 提案하고 그에 依한 實驗을 實施하고 있다. 그리고 Weiss [27]는 Ni 合金의 熔接性を 判定하는데, 그리고 Masubuchi [28]는 水素脆性を 利用하여 合金鋼의 熔接性を 判定하는데에 對하여 圓形배움 熔接으로 因한 缺陷의 程度를 判定의 基準으로 삼고 있는 것을 볼 수 있다.

理論解析에 있어서 相當히 大膽한 假定은 適用하여 解를 求하고 있으므로 金屬의 熔點까지 加熱되는 熔接의 境遇에 適用하면 相當한 誤差가 있을 것으로 豫料된다. 그런데 이러한 誤差의 範圍는 Watanabe [29] [30]의 研究와 Masubuchi [31], [32]의 研究에 依한 彈性限度以上の 熱應力이 發生하는 區間은 熔接部의 最大치수의 2.3 倍 程度의 區間內로 局限되며, 物性의 變化를 考慮하여 差分解析한 熱應力과 物性を 常數로 보아 彈性解析된 熱應力을 比較한 研究[33]結果에 依하면 彈性應力이 주어지는 範圍內에서는 두가지 計算方法에 依한 熱應力이 거의 같은 값을 갖는다는 事實을 생각하면 熔接部 近處에서는 解의 誤差가 있을 것이 期待되나 加熱過程中에서의 熱源에 隣接된 部分을 除外한 殘餘區間에서는 工學的으로 充分히 有用한 結果를 얻을 것이 期待된다. 따라서 理論解析된 結果를 圓形배움 熔接等에 適用함으로써 制限된 區間을 除外한 殘餘區間에서는 充分히 有用한 知識을 얻을 수 있음이 期待

된다. 뿐만 아니라 理論解를 Tall [34], [35]의 方法으로 擴張한다면 熔接으로 인한 殘留應力等を 얻을 수 있을 것이 期待된다.

VI. 結 論

理論解는 圓板內의 任意的 點에 주어진 瞬間 點熱源에 依한 過渡的인 溫度分布 및 熱應力을 嚴密解로서 求하고 이로부터 Duhamel의 積分重疊原理에 依하여 積分重疊함으로서 圓板內에서 圓板과 同心인 軌跡圓上을 熱源이 移動함으로 因한 過渡的인 溫度分布와 熱應力에 關한 解로서, 주어진 假定下에서는 嚴密한 解가 된다. 이 解는 加熱過程에서부터 冷却過程에 이르는 全過程에 對하여 適用될 수 있는 解가 된다. 특히 溫度分布는 實驗結果와 全一致되며 工學의 目的으로서 充分한 精度를 가지고 있다. 또 實驗이 이루어진바는 없으나 熱應力에 關하여서도 定性的으로 모든 點에서 論理的으로 妥當한 結果를 보임이 數值計算에서 確認된 바 있다.

따라서 얻어진 理論解를 火焰熱處理나 圓形弧溶接 등과 같은 工學的인 應用例에 適用한다면 溫度分布와 熱應力에 關하여 有用한 結果를 얻을 수 있을 것이다.

後 記

本 研究의 進行에 있어서 끊임없는 激應를 주신 學內의 여러 教授님들께 깊은 謝意를 表하며 특히 實驗에 있어서 많은 도움을 주신 朴鍾殷教授님께 深甚한 謝意를 表한다. 그리고 實驗裝置의 製作에 있어서 勞苦를 아끼지 않으신 柳志憲氏와 數值計算을 爲하여 數次의 夜勤의 勞苦를 堪耐하여 주신 서울大學校 工科大學 電子計算室의 朴演勳氏에 感謝를 드린다.

Reference

- (1) E. Melan, "Wärmespannungen in einer Scheibe infolge einer wandernden Wärmequelle", *Ing. Arch.*, p. 46-p. 48, 1952.
- (2) E. Melan, "Wärmespannungen infolge eines rotierenden Temperaturfeldes", *Österr. Ing. Arch.*, p. 165-p. 170, 1954.
- (3) T.R. Hsu, "Thermal Shock on a Finite Disk due to an Instantaneous Point Heat Source", *Journal of Applied Mechanics*, p. 113-p. 120, 1969.
- (4) T.R. Hsu, "Transient Thermal Stresses on a Finite Disk due to a Continuous Point Heat Source", *Journal of Engineering for Industry*, p. 357-p. 365, 1970.
- (5) Toshio Mura, "Dynamical Thermal Stresses due to a Thermal Shock", *Research Report of the Faculty of Engineering Meiji University*, No. 8, p. 63-p. 73, 1956.
- (6) W. Nowacki, "Thermo-Elasticity", Addison Wesley Publishing Company, Inc., 1962.
- (7) Boley and Weiner, "Theory of Thermal Stresses", John Wiley and Sons, Inc., 1967.
- (8) B.V. Karlekar, "Nonstationary Quasi-static Thermal Displacements and Thermal Stresses in a Cylindrical Body of Finite Height Subjected to Convective Heat Losses", *Journal of Applied Mechanics*, p. 834-p. 838, 1971.
- (9) D. Rosenthal, "Mathematical Theory of Heat Distribution During Welding and Cutting", *Welding Journal Research Supplement*, p. 226-p. 234, 1941.
- (10) D. Rosenthal and R. Schmerber, "Thermal Study of Arc Welding—Experimental Verification of Theoretical Formulas", *Welding Journal Research Supplement* p. 2-p. 8, 1939.
- (11) D. Rosenthal, "The Theory of Moving Source of Heat and its Application to Metal Treatment", *A.S.M.E. Trans.*, p. 849-p. 866, 1948.
- (12) C.M. Adams Jr., "Cooling Rates and Peak Temperatures in Fusion Welding", *Welding Journal Research Supplement*, p. 210-p. 215, 1958.
- (13) Paravin Jhaveri, W.G. Moffatt and C.M. Adams, "The Effect of Plate Thickness and Radiation on Heat Flow in Welding and Cutting", *Welding Journal Research Supplement*, p. 12-p. 15, 1962.
- (14) Zvi Paley, J.N. Linch and C.M. Adams Jr., "Heat Flow in Welding Heavy Steel Plate". *Welding Journal Research Supplement*, p. 71-p. 76, 1964.
- (15) R.J. Grosh and E.A. Trabant, "Arc Welding Temperatures", *Welding Journal Research Supplement*, p. 396-p. 400, 1956.
- (16) V. Pavelic, R. Tanbakuchi, O.A. Uyehara and P.S. Myers, "Experimental and Computed Temperature Histories in Gas Tungsten Arc Welding of Thin Plate", *Welding Journal Research Supplement*, p. 295-p. 305, 1969.
- (17) W. Sodel and R. Cohen, "Arc Welding Temperatures in a Circular Disk Structure", *Welding Journal Research Supplement*, p. 337-p. 340, 1970.
- (18) Kohei Ando and Isamu Miki, "On the Thermal

- Efficiency and Specific Deposited Heat(or Specific Heat Transfer Number) of Welding Arc”, *Technical Reports of Osaka University*, p.143-p.157, 1953.
- (19) J.E. Park, “Thermal Stresses due to a Heat Source Moving Crosswise on a Finite Breadth Plate”, *Journal of the Society of Naval Architects in Korea*, p.59-p.76, 1975.
- (20) W. Sodel and R.A. Bahr, “Stresses in a Welded Diaphragm due to Boundary Contraction and Normal Uniform Pressure”, *Experimental Mechanics*, p.283-p.287, 1972.
- (21) Masaki Watanabe and Kunihiko Sato, “Theoretical Analysis of Thermal Stresses due to a Moving Heat Source”, *Journal of the Society of Naval Architects in Japan*, p.87-p.96, 1954.
- (22) N. Fox, “Stresses Associated with a Moving Line Source of Heat”, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, p.85-p.89, 1964.
- (23) Toshiro Yoshida, Takeshi Abe and Hisahiro Onoue, “On the Study of Residual Stresses in a Circular Patch Welding”, *Journal of the Society of Naval Architects in Japan*, p.229-p.237, 1959.
- (24) Hiroshi Kihara, Koichi Masubuchi and Yo Ogura, “On Radial Contraction and Residual Stresses in Circular Patch Welding(Part I)”, *Journal of the Society of Naval Architects in Japan*, p.111-p.122, 1956.
- (25) Hiroshi Kihara, Koichi Masubuchi and Yo Ogura, “Radial Contraction and Residual Stresses in Circular Patch Welding (Part II)”, *Journal of the Society of Naval Architects in Japan*, p.163-p.170, 1956.
- (26) A.G. Cebolina and D.A. Canonico, “The Measurement of Residual Stresses”, *Welding Journal Research Supplement*, p.31-p.38, 1971.
- (27) S. Weiss, W.P. Hughes and H.J. Macke, “Welding Evaluation of High Temperature Sheet Material by Restrained Patch Testing”, *Welding Journal Research Supplement*, p.17-p.22, 1962.
- (28) Koichi Masubuchi and D.C. Martin, “Investigation of Residual Stresses by Use of Hydrogen Cracking”, *Welding Journal Research Supplement*, p.553-p.563, 1962.
- (29) Masaki Watanabe and Kunihiko Sato, “Plastic Study on Residual Stresses due to Welding”, *Technical Reports of Osaka University*, p.179-p.190, 1951.
- (30) Masaki Watanabe and Kunihiko Sato, “Thermal Stresses and Residual Stress of Circular Plate heated at its Centre” *Journal of the Society of Naval Architects in Japan*, p.185-p.197, 1949.
- (31) Koichi Masubuchi, “Distribution of Residual Stresses in Butt Welded Joint”, *Journal of the Society of Naval Architects in Japan*, p.99-p.109, 1957.
- (32) Koichi Masubuchi, “Analytical Investigation of Residual Stresses and Distorsional due to Welding”, *Welding Journal Research Supplement*, p.525-p.537, 1960.
- (33) Zae Geun Kim and Hyoehul Kim, “On the Thermal Stress and Residual Stress Distributions in a Aluminium Alloy Plate due to Resistance Spot Welding”, *Journal of the Society of Naval Architects in Korea*, p.21-p.32, 1972.
- (34) N.R. Nagaraja Rao and Lambert Tall, “Residual Stresses in Welded Plates”, *Welding Journal Research Supplement*, p.468-p.480, 1961.
- (35) Lambert Tall, “Residual Stresses in Welded Plates—A Theoretical Study”, *Welding Journal Research Supplement*, p.10-p.23, 1964.
- (36) Max. Hieke, “Über ein ebenes Distorsion Problem”, *Zeitschrift für Angewante Mathematik und Mechanik*, p.54-p.65, 1955.
- (37) Max. Hieke, “Eine indirecte Bestimmung der Airyschen Fläche bei inestetigen Wärmespannungen”, *Zeitschrift für Angewante Mathematik und Mechanik*, p.285-p.294, 1955.
- (38) G. Horvay, “Transient Thermal Stresses in Circular Disk and Cylinders”, *A.S.M.E. Trans.*, p.127-p.135, 1954.
- (39) Brahmader Sharma, “Thermal Stresses in Infinite Elastic Disks”, *Journal of Applied Mechanics*, p.527-p.531, 1956.
- (40) Carslaw and Jaeger, “*Conduction of Heat in Solids*”, Oxford University Press, 1973.
- (41) V. Arpaci, “*Conduction Heat Transfer*”, Addison Wesley Publishing Company, 1951.
- (42) S. Timoshenko and Goodier, “*Theory of Elasticity*”

- ty", McGraw-Hill Book Company Inc., 1951.
- (43) G.N. Watson, "*A Treatise on the Theory of Bessel Functions*", Cambridge University Press, 1966.
- (44) E.T. Whittaker and G.N. Watson, "*A Course of Modern Analysis*", Cambridge University Press, 1962.
- (45) Earl R. Parker, "*Material Data Book*", McGraw-Hill Book Company, 1967.
- (46) Slot, T., "Photoelastic Simulation of Thermal Stresses by Mechanical Prestraining", *Experimental Mechanics*, 5(9), p.273-p.282, 1965