

傳達 매트릭스법에 의한 船體特設肋骨 解析

任 尙 鎭* · 梁 永 淳**

The Stress Analysis of Web Frame by the Transfer Matrix Method

by

S. J. Yim*, Y. S. Yang**

Abstract

As the size of tanker increases, the analysis and strength prediction of the transverse web frames in a tanker have become important problems. Therefore, several papers discussed the subject and various method of analysis have been presented.

Most of these studies are based on the elastic framework analysis. Framework analysis is carried out by the matrix methods. The matrix methods used most frequently are the displacement method, force method and the transfer matrix method.

In this paper, the analysis is carried out by the transfer matrix method. The program has been tested by IBM 1130 and the results of example show good agreements with those by the program of stress analysis, STRESS, which was developed in M.I.T.

1. 序 論

構造물이 점점 複雜해 짐에 따라 構造物의 應力解析을 위한 보다 簡單하고 精密한 解析 方法이 必要하게 되었다. 이에 對한 方案으로서 매트릭스 代數가 構造解析法에 適用되었으며, 특히 電子計算機의 出現과 더불어 매트릭스 構造解析法 [1][2]은 급속도로 發展하여 거의 모든 工學 分野에서 應用하게 되었다.

構造解析 方法에는 여러가지 方法이 있으나 最近에 많이 使用되는 方法으로는 變位法[3], 應力法[4], 傳達 매트릭스法[5]이 있다.

本 論文은 大型 油槽船에서 重量을 줄이기 위해서 흔히 使用되고, 특히 橫強度를 담당하는 主要 部材인 特設肋骨에서의 應力解析[6][7]을 傳達 매트릭스法에 依해서 解析하였으며, 이의 計算 結果를 變位法[8] 및 M.I.T.에서 開發한 構造解析 프로그램 STRESS[9]의 結果와 比較 考察하였다.

2. 傳達 매트릭스法

2-1 基本 物理量 및 符號 規約

傳達 매트릭스法에 依해 構造物을 解析할 경우에 部材의 變形 狀態가 平面의 경우에 限하므로 基本 物理量은 6個로 表示된다.

即 x 軸 方向의 變位 u , y 軸 方向의 變位 w , z 軸 方向의 回轉變位 ϕ 와 x 軸 方向의 軸力 N , y 軸 方向의 剪斷力 Q , z 軸 方向의 굽힘 모우먼트 M 가 있다. 이 들을 行列 形式으로 表示하면 다음과 같다.

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \phi \end{bmatrix}, \vec{Q} = \begin{bmatrix} M \\ N \\ Q \end{bmatrix}, \vec{V} = \begin{bmatrix} q \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \phi \\ M \\ N \\ Q \end{bmatrix} \quad (1)$$

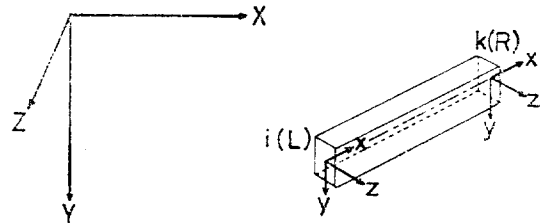


Fig.1 Reference Coordinate System and Member Coordinate System

* 正會員, 서울大學校 工科大学

** 正會員, 서울大學校 大醫院

基本物理量的符號는 Fig.1에 圖示된 座標系에 對해서 아래와 같이 定義한다.

基本座標系에 對한 節點變位 벡터는 基本座標軸의 陽의 方向을 陽으로 잡으며, 節點力 벡터는 基本座標軸의 陰의 方向을 陽으로 잡는다. 그리고 部材座標系에서는 部材 兩端 即 左端과 右端에서 서로 다르게 定義한다.

左端에서의 斷面力 벡터는 部材座標軸의 陽의 方向을 陽으로 잡으며, 變位 벡터도 같은 方向을 取한다.

右端에서의 斷面力 벡터는 部材座標軸의 陰의 方向을 陽으로 잡고, 變位 벡터는 左端에서의 變位 벡터와 같은 方向을 取한다.

그리고 構造物에 作用하는 荷重은 部材座標軸의 陽

의 方向을 陽으로 잡는다.

2-2 傳達 매트릭스法的 基本 行列式

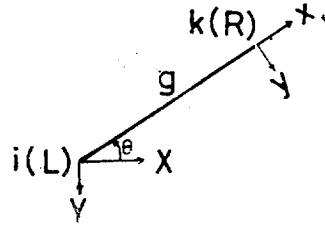


Fig.2 Coordinate System for Arbitrary Member(g)

一般的으로 Fig.2와 같이 傾斜를 이루고 있는 보(樑)에 給힘 모우먼트와 軸力이 作用할 때 보(樑)의 兩端에서의 物理量의 關係式은 다음과 같이 表示된다.

(附錄 I 參照)

$$\begin{matrix} u \\ w \\ \phi \\ M \\ N \\ Q \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & -ls & f_1s & -f_2c^2+f_3s^2 & (f_2+f_3)cs & u_0^Rc+\omega_0^Rs \\ 0 & 1 & -lc & f_1c & (f_2+f_3)cs & -f_2s^2+f_3c^2 & -u_0^Rs+\omega_0^Rc \\ 0 & 0 & 1 & -f_4 & -f_1s & -f_1c & \phi_0^R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ls & lc & M_0^R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & N_0^Rc+Q_0^Rs \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -N_0^Rs+Q_0^Rc \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} u \\ w \\ \phi \\ M \\ N \\ Q \\ 1 \end{matrix} \quad (2)$$

여기서 l 은 部材의 길이며, $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$ 로서 θ 는 部材의 기울기다. 그리고 $f_1 = \frac{l_2}{2EI_x}$, $f_2 = \frac{l}{EA}$, $f_3 = \frac{l_3}{6EI_x}$, $f_4 = \frac{l}{EI_x}$ 이다.

특히 u_0^R , ω_0^R , ϕ_0^R , M_0^R , N_0^R , Q_0^R 의 값은 部材에 作用하는 外力에 依한 荷重項으로서 附錄 I의 式(I-4)로 주어지며, 荷重의 種類에 따라 表 1.과 같이 구별된다.

表 1. 給힘剛性度 EI_x 와 引張剛性度 EA 를 갖는 보(樑)의 外力에 依한 荷重項

種 類	u_0^R	w_0^R	ϕ_0^R	M_0^R	N_0^R	Q_0^R
	0	$\frac{Pa^3}{6EI_x}$	$-\frac{Pa^2}{2EI_x}$	$P \cdot a$	0	P
	0	$\frac{wa^4}{24EI_x}$	$-\frac{wa^3}{6EI_x}$	$\frac{wa^2}{2}$	0	wa
	0	$\frac{wa^4}{120EI_x}$	$-\frac{wa^3}{24EI_x}$	$\frac{wa^2}{6}$	0	$\frac{w}{a^2}$
	0	$\frac{wa^4}{30EI_x}$	$-\frac{8EI_x}{wa^3}$	$\frac{wa^2}{3}$	0	$\frac{w}{a^2}$
	$-\frac{Pa}{EA}$	0	0	0	P	0

한편 式 (2)를 變形하면 보(樑) 兩端에서의 斷面力
과 變位와의 關係式이 다음과 같이 求해진다.
여기서

$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{21} \\ \bar{K}_{12} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ q_k \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\bar{K}_{11} = \begin{pmatrix} k_1 s & k_1 c & -k_2 \\ -k_3 c^2 - k_4 s^2 & (k_3 - k_4) cs & k_1 s \\ (k_3 - k_4) cs & -k_3 s^2 - k_4 c^2 & k_1 c \end{pmatrix}, \quad \bar{K}_{12} = \begin{pmatrix} -k_1 s & -k_1 c & -\frac{k_2}{2} \\ k_3 c^2 + k_4 s^2 & (-k_3 + k_4) cs & k_1 s \\ (-k_3 + k_4) cs & k_3 s^2 + k_4 c^2 & k_1 c \end{pmatrix} \quad (4-a, b)$$

$$\bar{K}_{21} = \begin{pmatrix} k_1 s & k_1 c & -\frac{k_2}{2} \\ k_3 c^2 + k_4 s^2 & (-k_3 + k_4) cs & -k_1 s \\ (-k_3 + k_4) cs & k_3 s^2 + k_4 c^2 & -k_1 c \end{pmatrix}, \quad \bar{K}_{22} = \begin{pmatrix} -k_1 s & -k_1 c & -k_2 \\ -k_3 c^2 - k_4 s^2 & (k_3 - k_4) cs & -k_1 s \\ (k_3 - k_4) cs & -k_3 s^2 - k_4 c^2 & -k_1 c \end{pmatrix} \quad (4-c, d)$$

여기서 $k_1 = \frac{6EI_x}{l^2}$, $k_2 = \frac{4EI_x}{l}$, $k_3 = \frac{EA}{l}$, $k_4 = \frac{12EI_x}{l^3}$ 이다. U_0^R W_0^R I_x (cm^4)

式 (3)은 變位法의 剛性關係式이며, 또한 格點傳達
行列을 도입할 때 必要한 基本 方程式이다.

3. 平面 樑대 構造物 解析

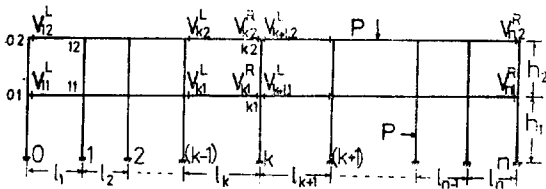


Fig.3 Plane Frame

基礎彈性學의 理論을 써서 얻어진 굽힘과 引張에 關
한 微分方程式의 一般解를 利用해서 構造解析을 하는
傳達 매트릭스法의 原理는 아래와 같이 要約할 수 있
다.

- ① 平面 樑대 構造物을 構成하는 部材 中 보(樑)는
主部材로, 기둥은 枝部材로 구분된다.
- ② 구분된 主部材의 幾何學的 條件과 荷重條件에 依
해 格間傳達行列을 求한다. (附錄 II 參照)
- ③ 枝部材의 幾何學的 條件과 荷重 條件에 依해 格
點傳達行列을 求한다. (附錄 III 參照)
- ④ 構造物의 左端에서의 境界條件을 利用하여 左端
의 境界行列 L 과 初期벡터 A_1^L 을 求한다. (附錄 IV
參照) 即 $V_1^L = LA_1^L$
- ⑤ 徑間 l_1 에서의 格間傳達行列을 써서 V_1^L 을 右端
으로 傳達한다. 即 $V_1^R = F_1 V_1^L = F_1 LA_1^L$
- ⑥ 傳達된 V_1^R 을 格點 1에서의 格點傳達行列에 依
해 다음 徑間 l_2 의 左端으로 傳達한다. 即
 $V_2^L = P_1 V_1^R = P_1 F_1 LA_1^L$
- ⑦ (5), (6)을 반복하여 構造物의 右端까지 傳達한
다. 即 $V_n^R = F_n V_{n-1}^L = F_n P_{n-1} F_{n-1} \dots P_1 F_1 A_1^L$
- ⑧ 構造物의 右端이 枝部材에 依해 支持되어 있지

않으면 (9)로 넘어가고, 支持되어 있으면 格點傳達行
列에 依해 格點 n 의 右側까지 傳達한다. 即 $V_{n-1}^L =$
 $P_n F_n P_{n-1} F_{n-1} \dots P_1 F_1 LA_1^L$

⑨ 構造物의 右端의 境界條件을 利用하여 다음과 같
은 右端의 境界行列式을 求한다. $RV_{n-1}^L = 0$ 即 $RP_n F_n$
 $\dots P_1 F_1 LA_1^L = 0$ (附錄 V 參照)

⑩ (9)의 聯立方程式을 풀면 構造物의 自由度, 即
初期벡터 A_1^L 이 求해지므로 이를 (4), (5), (6), (7)에
代入하여 相態量 벡터를 求한다.

⑪ 枝部材의 斷面力은 部材의 斷面力과 變位와의 關
係式을 利用하여 求한다.

4. 計算 結果 및 考察

傳達 매트릭스法을 使用하여 商工部 告示 標準船型
 T_6 -油槽船의 Web frame을 解析하였고, 이때 Web
frame은 Fig. 4와 같이 平面 樑대 構造物로 理想化되
었으며 荷重條件은 流體 靜力學的인 荷重 만을 고려하
였다. 그리고 部材의 特性은 表 2와 같다.

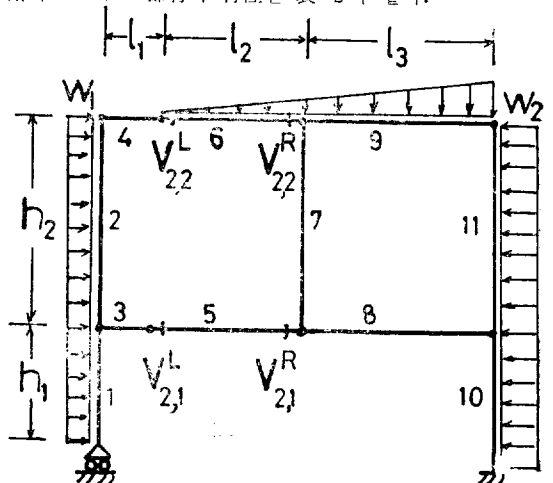


Fig.4 Configuration of Idealized Web Frame

表 2 部材의 特性

Member No.	AX (cm ²)	I _x (cm ⁴)
1	128.0	74670.
2	136.3	86590.
3	155.8	128760.
4	166.6	135970.
5	155.8	128760.
6	166.6	135870.
7	96.5	35180.
8	155.8	128760.
9	166.6	135970.
10	239.2	469110.
11	228.0	416870.

$E=21000(\text{kg/cm}^2)$ $l_1=120(\text{cm})$
 $l_2=270(\text{cm})$ $l_3=390(\text{cm})$
 $h_1=336(\text{cm})$ $h_2=454(\text{cm})$
 $w_1=112.5(\text{kg/cm})$ $w_2=247.5(\text{kg/cm})$

計算 結果의 一部로서 區間 l_2 에서의 狀態量 벡터와 構造物 左端의 枝部材 h_1, h_2 의 斷面力 벡터를 表 3. 및 表 4.에 실었다.

表 3. 區間 l_2 에서의 狀態量 벡터

(單位 : kg, cm)

	$V_{2,1}^L$			$V_{2,1}^R$		
	전달매트릭스 법에의한결과	변위법에의한결과	STRESS에의한결과	전달매트릭스 법에의한결과	변위법에의한결과	STRESS에의한결과
u	-59.1381	-59.1416	-59.1556	-63.1140	-63.1173	-63.1312
w	5.90975	-5.91093	-5.9114	35.1799	-35.1833	-35.1873
ϕ	-0.07823	-0.07824	-0.0782	-0.03914	-0.03915	-0.0391
M	2596020.	2596160.	2596533.50	-3378860.	3379030.	3379381.50
N	48178.8	48177.3	48174.703	48178.8	-48177.3	-48174.703
Q	-22129.2	22130.3	22133.019	-22129.2	-22130.3	-22133.019
	$V_{2,2}^L$			$V_{2,2}^R$		
	전달매트릭스 법에의한결과	변위법에의한결과	STRESS에의한결과	전달매트릭스 법에의한결과	변위법에의한결과	STRESS에의한결과
u	-164.866	-164.878	-164.9114	-168.007	-168.018	-168.0521
w	10.6323	-10.6330	-10.6342	384680	-38.4711	-38.4749
ϕ	-0.08148	-0.08148	-0.0814	-0.03917	-0.03917	-0.0391
M	2512260.	2512430.	2512738.50	-2792110	2792240.	2792644.50
N	40696.	140695.1	406959.914	40696.1	-40695.1	406959.14
Q	-24202.1	24203.2	24205.820	-105333	-10534.4	10537.072

上記의 3가지 方法에 依한 計算 結果는 表 3. 및 表 4.에서 보는 바와 같이 잘 一致하고 있으며, 단지 符號의 定義에 따라 w, M, N, Q 의 符號만 다르다.

이로 부터 傳達 매트릭스法과 變位法과의 差異點을 要約하면 아래와 같다.

① 傳達 매트릭스法에서는 部材의 物理的 條件을 滿足 하는 一般解를 基礎로해서 유도하므로 理解하기가 쉽다.

② 傳達 매트릭스 法에서는 變位法에서와 같은 高次 行列의 演算이 不必要하므로 電子計算機를 使用할 경우 적은 記憶容量으로도 計算이 可能하다.

③ 더우기 傳達 매트릭스法의 特性인 遂次代入法을 利用하여 傳達 計算 도중에 누적되는 Round-off 誤差 를 줄일 수 있다.

④ 단지 任意的 複雜한 構造物을 解析할 경우에는 變位法이 傳達 매트릭스法 보다 더 容易한 경우도 있다.

⑤ 그러나 比較的 單純한 構造物 即 橋樑構造나 빌딩같이 傳達 매트릭스法의 適用이 可能한 構造物에 對해서는 變位法보다 대단히 有利하다.

5. 結 論

以上과 같은 考察을 綜合해 볼 때 매트릭스 構造解

表 4. 枝部材 h_1, h_2 에서의 斷面力 벡터

(單位 : kg, cm)

		枝 部 材 h_1			枝 部 材 h_2		
		전달매트릭스 법의한결과	변위법에 의한 결과	STRESS에 의한 결과	전달매트릭스 법의한결과	변위법에 의한 결과	STRESS에 의한 결과
枝部材의 上 端	M	3786030.	-3786090.	-3785977.50	5416510.	-5416830.	-5417523.01
	N	46331.3	-46333.6	-46342.523	24202.1	-24203.4	-24026.300
	Q	37800.0	37800.4	37800.077	40696.1	40697.5	40700.664
枝部材의 下 端	M	-2564360.	-2564440.	-2564423.50	-1465500.	-1465820.	-1466555.75
	N	46331.3	46333.6	46342.523	24202.1	24203.4	24206.300
	Q	0.0	-0.4	0.000	-10378.8	10377.4	16374.339

析法 中の 하나인 傳達 매트릭스法을 船體 特設 肋骨 解析에 使用할 경우에 다음과 같은 點에서 有利하다.

① 매트릭스 構造解法에서 重要な 剛性關係式이 部材의 物理的 條件을 滿足하는 微分方程式의 一般解를 數學的으로 處理함으로써 求어지므로 理解하기 쉽다.

② 變位法의 問題點인 多元聯立方程式을 풀 수 있으므로 電子計算機의 記憶容量을 줄인다.

③ 特히 橋樑構造나 格子 보와 같이 單純한 構造物에 對해서는 傳達 매트릭스法의 適用이 變位法보다 有利하다.

參 考 文 獻

[1] Martin, H.C.; "Introduction to Matrix Method of Structural Analysis", McGraw-Hill Book Co., N.Y., 1966

[2] 申永堉; "매트릭스 構造解法", 大韓土木學會誌, Vol. 20., No.4, 1972.2

[3] 申永堉; "變位法 概論", 大韓土木學會誌, Vol. 17., No. 4, 1970.3

[4] 申永堉; "應力法 概論", 大韓土木學會誌, Vol. 18, No. 1, 1970.7

[5] 成岡昌夫, 遠田良善; "傳達 매트릭스法", コンピュータによる 構造工學講座 I-2-B, 日本鋼構造協會編, 培風館, 1971

[6] 任尙鍊; "油槽船의 Web Frame에서의 應力分布", 大韓造船學會誌, 第9卷, 第1號, 1972.3

[7] 任尙鍊; "매트릭스法에 依한 船體 肋骨環 解析", 大韓造船學會誌, 第10卷, 第1號, 1973.3

[8] 三本木茂夫, 吉村信敏; "有限要素法による 構造解析 프로그램", コンピュータによる 構造工學講座 I-1-B, 日本鋼構造協會編, 培風館, 1971

[9] IBM Application Program; Structural Engineering System Solver(STRESS) for the IBM 1130 Version 2 User's Manual, 1968

附 錄

I. 傳達 매트릭스法의 基礎方程式

基礎彈性學의 理論을 써서 얻어진 彎힘과 引張에 關한 微分方程式은 다음과 같다.

$$EI_z \frac{d^4 \phi}{dx^4} = P_x \tag{I-1-a}$$

$$-EA \frac{d^2 u}{dx^2} = P_x \tag{I-1-b}$$

式 (I-1)의 一般解의 積分常數는 보(樑) 左端에서 의 $u^L, \phi^L, \phi'^L, M^L, N^L, Q^L$ 의 값에 依히 決定되며, 보(樑) 理論에 適用되는 式 (I-2)를 利用하면 다음과 같은 式 (I-3)이 얻어진다.

$$\left. \begin{aligned} w(x) &= w^L(x), \phi(x) = -w'(x) \\ M(x) &= EI_z w''(x), Q(x) = EI_z w'''(x) \\ u(x) &= u^L(x), N(x) = -EA u'(x) \end{aligned} \right\} \tag{I-2-a}$$

$$\left. \begin{aligned} w(x) &= w^L - xA^L + \frac{x^2}{2EI_z} M^L \\ &\quad + \frac{x^3}{6EI_z} Q^L - w_0(x) \\ \phi(x) &= \phi^L - \frac{x}{EI_z} M^L \\ &\quad - \frac{x^2}{2EI_z} Q^L + \phi_0(x) \\ M(x) &= M^L + xQ^L + M_0(x) \\ Q(x) &= Q^L + Q_0(x) \end{aligned} \right\} \tag{I-3-a}$$

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= u^L - \frac{x}{EA} N^L + u_0(x) \\ N(x) &= N^L + N_0(x) \end{aligned} \right\} \tag{I-3-b}$$

여기서

