

水密隔壁을 貫通하는 管의 熔接施工으로 因한 熱應力解析 (Ⅱ)

—Penetration piece 에서 의 熱應力—

金 曉 哲*

On The Thermal Stresses due to Welding of a Penetration Piece for a Watertight Bulkhead Plate (Ⅱ)

—Thermal Stresses in a Penetration Piece—

Hyo-chul Kim

Abstract

As a second step of a thermal stress analysis in a watertight bulkhead plate during welding of a spool type penetration piece, is idealized as a thin circular disk with a clamped boundary. The exact solution for the transient temperature distribution and associated quasi-static thermal stresses which arise in a circular disk subjected to an instantaneous point source of heat acting in its interior has been obtained. And the solutions have been extended to the case of moving source of heat with the aid of the Duhamel's superposition integral and the results finally derived have been compared with the other results from the typical cases.

The solutions can be applied to the problem such as a welding of a penetration piece on the watertight bulkhead and also applicable to the problems which occur in cutting or welding.

記 號

a_n, A_n : 級數의 常數係數
 b_0, b_1, B_n : 級數의 常數係數
 B : Biot 數
 C : 比熱
 E : 彈性係數
 G : 剪斷彈性係數
 h : 熱傳達係數
 H : h/k
 I_n : n 次의 第 1 種 變形 Bessel 函數
 J_n : n 次의 第 1 種 Bessel 函數
 k : 熱傳導度
 K_n : n 次의 第 2 種 變形 Bessel 函數
 m, n : 陽의 整數
 p : $\sqrt{s/\kappa}$

q : 熱源의 單位길이와 單位時間 當의 熱放出量
 q_0 : $\frac{q}{C\rho}$, 熱源의 세기
 Q : $\frac{q_0}{\kappa\pi}$
 r : 圓板의 中心으로부터 任意의 點까지의 距離
 r_d : 圓板의 半徑
 r_0 : 圓板의 中心으로부터 熱源까지의 距離, 또는 熱源이 그리는 圓板과 同心인 軌跡圓의 半徑
 R : $\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)}$, 熱源으로부터 任意의 點까지의 距離
 S : Laplace 變換의 媒介變數
 t : 時間
 t' : $\frac{\kappa}{r_d^2}t$, 無次元化된 時間
 t'' : $\frac{\kappa}{r_d^2}\tau$, 無次元化된 熔接終了後 經過된 時間

- t_0 : 熔接에 所要된 時間
- T : 初期溫度에 對한 溫度上昇
- T' : T/Q , 無次元化된 溫度
- T^0 : 初限溫度에 對한 溫度上昇의 増分, 瞬間熱源에 依한 溫度上昇
- T_0 : 無限板에서의 溫度에 關한 Green 函數
- T_0^* : Laplace 變換된 T_0
- T_L : 附加溫度 函數
- T_L^* : Laplace 變換된 T_L
- U : $\sqrt{\lambda/\kappa}$
- U, U_s : 極座標系에서의 變位成分 ($U_s = \bar{U}_s + \bar{U}_s$)
- \bar{U}, \bar{U}_s : 變位 potential로부터 얻어지는 變位成分
- $\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{U}}_s$: Airy의 應力函數로부터 얻어지는 變位成分
- x, y : 直交座標系에서의 座標
- α : 線膨脹係數
- α_{nm} : 特性方程式의 陽의 實根
- β_{nm} : $\alpha_{nm}r_d$, 無次元化된 特性方程式의 陽의 實根
- ϵ_n : $\epsilon_n]_{n=0} = 1, \epsilon_n]_{n>0} = 2$
- η : r/r_d , 無次元化된 r
- η_0 : r_0/r_d , 無次元化된 r_0
- θ : 極座標系에서의 任意點의 角座標
- θ_0 : 極座標系에서의 熱源의 位置를 나타내는 角座標
- κ : 熱擴散率
- λ : Laplace 逆變換의 媒介變數
- λ_p : $\frac{\nu E}{1-\nu^2}$
- μ_p : $\frac{E}{2(1+\nu)}$
- ν : Poisson 比
- ρ : 密度
- θ : $\frac{\alpha E q_0}{\pi \kappa}$, 應力成分의 無次元化係數
- $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\theta r}$: 極座標系에서의 應力成分
- $\sigma'_{rr}, \sigma'_{\theta\theta}, \sigma'_{\theta r}$: 無次元化된 應力成分
- $\sigma_{rr}^0, \sigma_{\theta\theta}^0, \sigma_{\theta r}^0$: 應力成分의 増分 ($\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij} + \bar{\sigma}_{ij}$)
- $\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\sigma}_{\theta r}$: 變位 potential로부터 얻은 應力成分
- $\bar{\bar{\sigma}}_{rr}, \bar{\bar{\sigma}}_{\theta\theta}, \bar{\bar{\sigma}}_{\theta r}$: Airy의 應力函數로부터 얻은 應力成分
- τ : 熔接終了後 經過된 時間
- ϕ : Airy의 應分函數
- Φ : 變位 potential
- Φ^* : Laplace 變換된 Φ
- ω : 熔接角速度
- ω' : $\frac{r_d^2}{\kappa} \omega$, 無次元化된 熔接角速度

1. 緒 言

船舶의 水密隔壁을 貫通하는 管을 施工함에 있어서

는 penetration piece 를 使用하여 熔接施工하는 方式이 흔히 使用되고 있다. 이러한 熔接施工에 있어서는 熔接線이 閉曲線을 形成하기 때문에 많은 熔接缺陷이 發生된다. 따라서 이에 聯關된 實驗의 研究가 많이 이루어지고 있다. 또 熱應力이 問題되는 區間은 熔接線近處의 一部에 局限되기 때문에 熔接熱應力을 基準으로 하였을 때는 penetration piece를 圓板으로 理想化하여 熱應力을 解析함으로써 工學的으로 有用한 結果가 얻어질 수 있을 것이 期待된다. 圓板에서의 熱應力을 다룬 理論的 研究도 많이 이루어지고 있다. [1],[2],[3],[4],[5],[6],[7] 이들 중 文獻 [1],[2]에서는 圓板內에서의 熱源이 移動하는 境遇에 對한 理論解를 準定常狀態로 보아 求하고 있다. 文獻 [3],[4]에서는 溫度分布를 假定하고 그로 因한 理論解를 求하고 있다. 그리고 文獻 [5],[6]에서는 圓板에서의 周緣에 熱衝擊이 주어지는 境遇에 對하여 熱應力을 解析하고 있고, 文獻 [7]에서는 이를 任意點에 熱源이 주어지는 境遇로 擴張하고 다시 이를 移動하는 境遇로 擴張한 理論解를 求하고 있다. 이 解는 圓板의 두께가 隔壁板의 두께와 同一한 境遇에는 圓板의 半徑을 無限大로 놓아 隔壁板의 熱應力을 同時에 求할 수 있는 長點을 갖고 있다. 그러나 隔壁板의 두께보다 penetration piece의 中央部의 板의 두께가 一般的으로 작기 때문에 境界條件을 文獻 [6]에서와 같이 周緣이 拘束되지 않았다고, 생각하여 圓板에서의 應力을 求하는 것은 適合하지 않다. 뿐만 아니라 penetration piece를 隔壁에 施工함에 있어서는 tag welding 등에 依하여 相當한 拘束力을 갖게 된다.

따라서 本 研究에서는 penetration piece의 周緣이 剛體로 된 隔壁板에 相對變位가 일어나지 않도록 固着되어 있다고 생각하여 理論解를 求함으로써 penetration piece의 熔接部 近處에서의 過渡的 溫度分布 및 熱應力을 類推할 수 있는 基礎資料를 얻는데에 目的을 둔다.

2. 理 論

2.1 模型의 設定

Penetration piece는 Fig. 1과 같은 形狀을 갖고 있다. 따라서 嚴密한 解析을 爲하여서는 三次元問題로서 熱應力을 解析하여야 한다. 그러나 三次元熱應力의 過渡的 現象에 對한 解析은 極히 制限된 境遇에 限하여 解가 얻어질 뿐이며 數值解만이 可能하다고 믿어진다. 그런데 緒言에서 言及한 바와 같이 熔接으로 因한 熱應力이 問題되는 곳은 熔接線近處의 一部에 局限된다는 點을 勘案하고, penetration piece의 中央에 設置된 圓板의 中央部에 管의 貫通을 爲하여 設置된 圓形

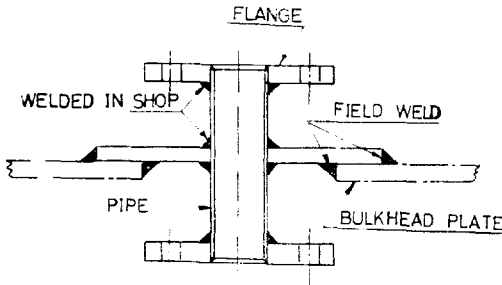


Fig. 1. Flanged spool type penetration piece

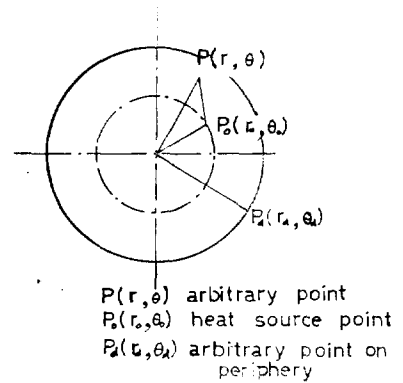


Fig. 2. Coordinate System

구멍은 管에 依하여 適切히 補強되며 管과의 熔接部가 fillet welding으로 이루어지기 때문에 應力集中 現象이 크게 問題되지 않는다고 생각하면 spool type의 penetration piece를 圓板과 等價이라고 取扱함으로써 熔接線附近에서의 熱應力을 類推하는데 充分히 有用한 結果가 얻어진다고 믿어진다. 따라서 다음과 같은 假定을 設定할 수 있게 된다.

가. Spool type penetration piece의 熔接으로 인한 熱應力은 周緣에서의 變位가 없도록 固着된 圓板에서 熱源이 移動할때 發生되는 熱應力과 等價이다.

나. Penetration piece와 等價인 圓板에는 測度分布 以外的 外力은 作用하지 않으며 圓板內部로의 熱傳導와 周緣에서의 對流에 依한 熱損失만에 依하여 溫度分布가 形成된다.

다. Penetration piece의 中央部の 圓板과 管을 熔接하는 것은 工場에서 安定된 姿勢로 熔接되기 때문에 熔接으로 인한 熱應力이 크게 問題되지 않는다고 볼 수 있다. 따라서 現場에서 熔接되는 두 개의 熔接線附近에서의 熱應力이 問題되는데 이 두 개의 熔接線에서 熔接이 이루어질 때 이들은 相互從屬의인 關係가 없다고 보면 別途의 問題로 取扱될 수 있다고 假定한다.

2.2 內側 熔接線을 熔接하는 境遇

2.2.1 瞬間 點熱源에 依한 溫度分布

水密隔壁과 熔接되는 두 개의 熔接線中에서 內側의 熔接線을 緣하여 熔接이 이루어지는 境遇를 생각하고 Fig.2와 같은 極座標系로서 주어진 問題를 表示한다.

여기서 板의 材質을 等方性이라고 생각하고, 모든 物理的인 特性은 溫度와 無關한 常數이라고 假定하면 熔接線상의 任意點에 주어진 瞬間 點熱源에 依한 溫度分布는 (1)式的 熱傳導方程式을 滿足하여야 한다.

$$\frac{\partial^2 T^0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T^0}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T^0}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

(1)式的 解는 初期條件으로서 (2)式을 滿足하여야 하고,

$$T^0(r, \theta, t)|_{t=0} = 0 \quad (2)$$

境界條件으로서는 (3)式이 充足되어야 한다.

$$\left. \frac{\partial T^0}{\partial r} \right]_{r=r_d} + HT^0 \Big|_{r=r_d} = 0 \quad (3)$$

그리고 熱源周圍에서는 (4)式이 成立되어야 한다.

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left(-2\pi R \frac{\partial T^0}{\partial R} k \right) = q_0 \quad (4)$$

$$\text{但, } R^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)$$

그런데 (1)式的 解는 (5)式으로 주어지고

$$T^0 = T_c + T_L \quad (5)$$

(5)式的 T_c 는 (6)式으로 주어짐으로 [9]

$$T_c = \frac{q_0}{4\pi\kappa t} e^{-R^2/4\kappa t} \quad (6)$$

T_L 을 求하는 것이 問題가 된다. 따라서 參考文獻 [9]에서와 같이 (1)式과 (3)式을 Laplace 變換하여 解를 求하고 圓板의 原點에서 有限한 값을 갖는다는 條件을 適用하면 (7)式이 얻어진다.

$$T_L^* = \sum_{n=0}^{\infty} A_n K_n(pr) \cos n(\theta - \theta_0) \quad (7)$$

따라서 T_c 를 Laplace 變換하고 加法定理을 適用하여 級數型으로 變換하면 (5)式이 (3)式을 滿足하여야 한다는 條件으로부터 級數의 常數係數 A_n 은 (8)式으로 表示된다.

$$A_n = \frac{-\varepsilon_n q_0}{2\pi\kappa} \times \frac{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] K_n(pr_d) - p K_{n-1}(pr_d)}{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] I_n(pr_d) + p I_{n+1}(pr_d)} I_n(pr_0) \quad (8)$$

따라서 Laplace 變換된 溫度分布는 (9a)와 (9b)式으로 表示된다.

$$T^* = \frac{q_0}{2\pi\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta - \theta_0) \left\{ K_n(pr_0) - \frac{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] K_n(pr_d) - pK_{n+1}(pr_d)}{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] I_n(pr_d) + pI_{n+1}(pr_d)} I_n(pr_0) \right\} I_n(pr) \quad (9a)$$

但, $0 < r < r_0$

$$T^* = \frac{q_0}{2\pi\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta - \theta_0) \left\{ K_n(pr) - \frac{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] K_n(pr_d) - pK_{n+1}(pr_d)}{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] I_n(pr_d) + pI_{n+1}(pr_d)} I_n(pr) \right\} I_n(pr_0) \quad (9b)$$

但, $r_0 < r < r_d$

따라서 Laplace 變換의 逆變換定理로부터 圓板內部的 溫度分布은 (10a)와 (10b)로 얻어진다.

$$T = \frac{q_0}{4\pi^2\kappa i} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta - \theta_0) \int_{v-i\infty}^{v+i\infty} \left\{ K_n(Ur_0) - \frac{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] K_n(Ur_d) - UK_{n+1}(Ur_d)}{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] I_n(Ur_d) + UI_{n+1}(Ur_d)} I_n(Ur_0) \right\} I_n(Ur) e^{i\lambda} d\lambda$$

但, $0 < r < r_d, \quad U = \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}$ (10a)

$$T = \frac{q_0}{4\pi^2\kappa i} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta - \theta_0) \int_{v-i\infty}^{v+i\infty} \left\{ K_n(Ur) - \frac{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] K_n(Ur_d) - UK_{n+1}(Ur_d)}{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] I_n(Ur_d) + UI_{n+1}(Ur_d)} I_n(Ur) \right\} I_n(Ur_0) e^{i\lambda} d\lambda$$

但, $r_0 < r < r_d, \quad U = \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}$ (10b)

그런데 (10a)式과 (10b)式은 $\lambda = -\kappa\alpha_{nm}^2$ 일 때 單極을 갖음으로 複素函數에 關한 Cauchy의 定理를 適用하고 Lommel의 公式과 (12)式의 條件을 使用하여 簡單히 整理하면 (11)式의 溫度分布가 얻어진다.

$$T^0 = \frac{q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta - \theta_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nm}^2 e^{-\varepsilon_{nm}^2 t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \times \frac{J_n(\alpha_{nm}r_0)J_n(\alpha_{nm}r)}{[J_n(\alpha_{nm}r_d)]^2} \quad (11)$$

여기서 α_{nm} 은 (12)式을 滿足하는 陽의 實根이다.

$$\left[H + \frac{n}{r_d} \right] J_n(\alpha_{nm}r_d) - \alpha_{nm}J_{n+1}(\alpha_{nm}r_d) = 0 \quad (12)$$

2.2.2 瞬間 點熱源에 依한 熱應力

參考文獻 [9]에서와 같이 彈性係數 等的 物理的 特性을 溫度에 無關한 常數로 보고 熱衝擊으로 因한 溫度分布에서 熱應力이 形成되는데 所表되는 時間遲延效果 및 溫度分布과 熱應力 사이의 相乘作用等을 無視하여 準靜的인 熱應力問題로 주어진 問題를 理想化하면

變位 potential ϕ 는 (13)式으로 表示되게 된다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = (1+\nu)\alpha \frac{\partial T^0}{\partial t} \quad (13)$$

여기서 (13)式과 (1)式으로부터 變位 potential ϕ 를 求하면 (14)式이 얻어진다.

$$\phi = (1+\nu)\alpha \int_0^t T^0 dt + \phi_0 + \phi_1 t \quad (14)$$

그런데 初期條件에 依한 變位 potential ϕ_0 는 溫度分布 以外의 外力은 作用하지 않으므로 剛體運動을 無視한다면 $\phi_0=0$ 이 됨으로 (14)式을 Laplace 變換하면 (15)式이 얻어진다.

$$\phi^* = (1+\nu)\alpha \frac{T^*}{s} + \phi_1^* \frac{1}{s^2} \quad (15)$$

여기서 ϕ_1 은 調和函數의 解인데 積分變換에 關한 Abel의 定理를 適用하고 (11)式을 使用하면 $\phi_1=0$ 으로 表示된다. 따라서 變位 potential ϕ 는 Laplace 變換된 平面에서 (16a)와 (16b)式으로 表示된다.

$$\phi^* = \frac{(1+\nu)\alpha q_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta - \theta_0) \left\{ K_n(pr_0) - \frac{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] K_n(pr_d) - pK_{n+1}(pr_d)}{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] I_n(pr_d) + pI_{n+1}(pr_d)} I_n(pr_0) \right\} \frac{I_n(pr)}{s}$$

但, $0 < r < r_0$ (16a)

$$\phi^* = \frac{(1+\nu)\alpha q_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta - \theta_0) \left\{ K_n(pr) - \frac{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] K_n(pr_d) - pK_{n+1}(pr_d)}{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] I_n(pr_d) + pI_{n+1}(pr_d)} I_n(pr) \right\} \frac{I_n(pr_0)}{s}$$

但, $r_0 < r < r_d$ (16b)

(16a)式과 (16b)式을 앞서서와 같이 逆變換하면 (17a)와 (17b)式으로 變換된다.

$$\phi = \frac{(1+\nu)\alpha q_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \left[\frac{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] (r_d^{2n} - r_0^{2n}) r_d + 2nr_0^{2n}}{2 \left[H + \frac{n}{r_d} \right] r_0^n r_d^{2n+1}} \right] r_0^n \cos n(\theta - \theta_0) - \frac{(1+\nu)\alpha q_0}{2\pi} \left\{ \log \frac{r_d}{r_0} + \frac{1}{Hr_d} \right\} - \frac{(1+\nu)\alpha q_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta - \theta_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\varepsilon \alpha n m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha n m^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha n m r_0) J_n(\alpha n m r)}{[J_n(\alpha n m r_d)]^2} \quad (17a)$$

但, $0 < r < r_0$

$$\phi = \frac{(1+\nu)\alpha q_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \left[\frac{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] (r_d^{2n} - r_0^{2n}) r_d + 2nr_0^{2n}}{2 \left[H + \frac{n}{r_d} \right] r^n r_d^{2n+1}} \right] r_0^n \cos n(\theta - \theta_0) - \frac{(1+\nu)\alpha q_0}{2\pi} \left\{ \log \frac{r_d}{r} + \frac{1}{Hr_d} \right\} - \frac{(1+\nu)\alpha q_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta - \theta_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\varepsilon \alpha n m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha n m^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha n m r) J_n(\alpha n m r_0)}{[J_n(\alpha n m r_d)]^2} \quad (17b)$$

但, $r_0 < r < r_d$

여기서 變位 potential과 應力과의 關係 (18)式을 適用하여 應力成分들을 求할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{-E}{1+\nu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{-E}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{-E}{1+\nu} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} \Big|_{r=r_0}^{0 < r < r_0} - \sigma_{rr} \Big|_{r=r_0}^{r_0 < r < r_d} &= \sigma_{\theta\theta} \Big|_{r=r_0}^{0 < r < r_0} - \sigma_{\theta\theta} \Big|_{r=r_0}^{r_0 < r < r_d} \\ &= \sigma_{r\theta} \Big|_{r=r_0}^{0 < r < r_0} - \sigma_{r\theta} \Big|_{r=r_0}^{r_0 < r < r_d} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \Big|_{r=r_0}^{0 < r < r_0} - \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \Big|_{r=r_0}^{r_0 < r < r_d} &= \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} \Big|_{r=r_0}^{0 < r < r_0} - \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} \Big|_{r=r_0}^{r_0 < r < r_d} \\ &= \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} \Big|_{r=r_0}^{0 < r < r_0} - \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} \Big|_{r=r_0}^{r_0 < r < r_d} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0}^{0 < r < r_0} - \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0}^{r_0 < r < r_d} &= \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0}^{0 < r < r_0} - \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0}^{r_0 < r < r_d} \\ &= \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0}^{0 < r < r_0} - \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0}^{r_0 < r < r_d} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

그리고 周緣에서는 (20)式的 條件이 充足되어야 한다.

$$\left. \begin{aligned} U_r \Big|_{r=r_d}^{r_0 < r < r_d} &= 0 \\ U_\theta \Big|_{r=r_d}^{r_0 < r < r_d} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

그런데 (20)式的 條件 亦是 變位 potential ϕ 를 求하

그런데 (17a)式과 (17b)式으로 얻어진 變位 potential ϕ 를 보면 $r=r_0$ 일 때 變位 potential의 導函數가 두 領域에서 不連續이 되기 때문에 應力이 不連續이 나타나게 된다. 또 緒言에서 言及한 바와 같이 penetration piece의 周緣은 剛體로 된 隔壁板에 固着되어진다고 생각한다. 따라서 $r=r_0$ 에서는 應力이 連續이 되기 위하여서는 (19)式的 條件이 滿足되어야 한다.

는 過程에서 (20)式的 條件이 使用되지 않았으므로 一般的으로 滿足되어질 수 없다. 따라서 (19)式的 條件과 (20)式的 條件을 充足시켜 주기 爲하여 Airy의 應力函數를 附加應力函數로서 導入하면 領域 $0 < r < r_0$ 에서는 (21a)式으로 表示되고 領域 $r_0 < r < r_d$ 에서는 (21b)式으로 表示된다.

$$\phi = b_0 r^2 + b_1 r^3 \cos(\theta - \theta_0) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{n+2}) \cos n(\theta - \theta_0) \quad (21a)$$

但, $0 < r < r_0$

$$\phi = a_0' \log r + b_0' r^2 + \left(a_1' \frac{1}{r} + b_1' r^3 \right) \cos(\theta - \theta_0) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n' r^n + b_n' r^{n+2} + c_n' r^{-n}) \cos n(\theta - \theta_0) \quad (21b)$$

但, $r_0 < r < r_d$

여기서 Airy의 應力函數는 (22)式으로 表示되는 應力과 應力函數와의 關係를 갖고 있다.

$$\left. \begin{aligned} \overline{\sigma_{rr}} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \overline{\sigma_{\theta\theta}} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \overline{\sigma_{r\theta}} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r \partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

따라서 (18)식을 사용하여 변위 potential로부터 應力成分을 求하고 (22)식을 사용하여 Airy의 應力函數로부터 應力成分을 求하여 (19)식의 첫번째 式에 代入하면 3개의 方程式을 얻을 수 있다.

그리고 변위 potential과 변위成分과의 사이에는 (23)식의 關係가 주어지며 應力函數로부터 얻어진 應力과 변위成分 사이에는 (24)식의 關係가 주어진다.

$$\left. \begin{aligned} \overline{U}_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \overline{U}_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{U}_r &= \frac{1}{E} \int_0^r (\overline{\sigma_{rr}} - \nu \overline{\sigma_{\theta\theta}}) dr \\ \overline{U}_\theta &= \frac{1}{E} \int_0^r (\overline{\sigma_{r\theta}} - \nu \overline{\sigma_{rr}}) d\theta - \int_0^r \overline{U}_\theta d\theta \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

따라서 (23)식과 (24)식의 條件을 使用하여 변위成分을 求하면 (20)식의 條件에 依하여 2개의 方程式을 얻을 수 있게 된다. 이렇게 얻어진 5個의 聯立方程式을 풀어서 級數의 常數係數들을 決定하면 다음의 式들로 表示된다.

$${}_0a'_0 = \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} b_0 = {}_0b_0 &= \frac{-\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_0 m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_0 m^2)} \frac{J_0(\alpha_0 m r_0)}{[J_0(\alpha_0 m r_d)]^2} \frac{\alpha_0 m}{2r_d} \frac{1+\nu}{1-\nu} J_1(\alpha_0 m r_d) \\ &+ \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_1 m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_1 m^2) - 1} \frac{J_1(\alpha_1 m r_0)}{[J_1(\alpha_1 m r_d)]^2} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \right] \left\{ \frac{J_1(\alpha_1 m r_d)}{r_d^2} \left[1 + \frac{1-3\nu}{5+\nu} \right] - \frac{\alpha_1 m}{r_d} J_2(\alpha_1 m r_d) \right\} \cos(\theta - \theta_0) \\ &- \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \frac{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] (r_d^2 - r_0^2) r_d + 2r_0^2}{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] r_0 r_d^3} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{2r_d} \right] \left[1 + \frac{1-3\nu}{5+\nu} \right] \cos(\theta - \theta_0) \\ &+ \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{r_d} - \frac{1}{r_0} \right] \frac{1}{r_d} - \frac{\nu E q_0}{2\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1-3\nu}{5+\nu} \left[\frac{1}{r_0} - \frac{r_0}{r_d^2} \right] \frac{1}{2r_d} \cos(\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (25b)$$

$${}_0a'_1 = \frac{\alpha E q_0}{2\pi} r_0 \quad (26a)$$

$$\begin{aligned} b_1 = {}_0b_1 &= \frac{-\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4e^{-\alpha_1 m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_1 m^2) - 1} \frac{J_1(\alpha_1 m r_0)}{[J_1(\alpha_1 m r_d)]^2} \frac{J_1(\alpha_1 m r_d)}{r_d^3} \frac{1+\nu}{5+\nu} \\ &+ \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \frac{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] (r_d^2 - r_0^2) r_d + 2r_0^2}{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] r_d^3 r_0} \frac{1+\nu}{5+\nu} \frac{1}{r_d^2} + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \left[\frac{1}{r_0} - \frac{r_0}{r_d^3} \right] \frac{1+\nu}{5+\nu} \frac{1}{r_d^2} \end{aligned} \quad (26b)$$

$${}_0a'_n = \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \frac{r_0^n}{n} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} {}_0a_n &= \frac{+\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_{nm} m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm} m^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm} r_0)}{[J_n(\alpha_{nm} r_d)]^2} \left\{ \frac{n+n\nu+4}{n(3-\nu)} \alpha_{nm} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) - \frac{2}{r_d} J_n(\alpha_{nm} r_d) \right\} \frac{1}{r_d^{n-1}} \\ &- \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \left[\frac{1}{nr_0^n} \right] + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \frac{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] (r_d^{2n} - r_0^{2n}) r_d + 2nr_0^{2n}}{n \left[H + \frac{n}{r_d} \right] r_0^n r_d^{2n+1}} \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_{nm} m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm} m^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm} r_0)}{[J_n(\alpha_{nm} r_d)]^2} \left\{ \frac{n+n\nu+4}{n(3-\nu)} \alpha_{nm} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) + \frac{2}{r_d} J_n(\alpha_{nm} r_d) \right\} \frac{1}{r_d^{n-1}} \\ &+ \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \frac{\left[H + \frac{n}{r_d} \right] (r_d^{2n} - r_0^{2n}) r_d + 2nr_0^{2n}}{n \left[H + \frac{n}{r_d} \right] r_0^n r_d^{2n+1}} \end{aligned} \quad (27c)$$

$$b_n = {}_0b_n = \frac{-\alpha E q_0}{2\pi} \frac{1+\nu}{3-\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_{nm} m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm} m^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm} r_0)}{[J_n(\alpha_{nm} r_d)]^2} \frac{\alpha_{nm}}{r_d^{n+1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) \quad (27d)$$

따라서 이들 係數를 適用하고 整理하여 (28a), (28b) 그리고 (28c)로 表示되는 應力成分들을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^0 = & \frac{-\alpha E q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_0 m^2 t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_0 m^2)} \frac{J_0(\alpha_0 m r_0)}{[J_0(\alpha_0 r_d)]^2} \left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_0 m J_1(\alpha_0 m r_d)}{r_d} + \frac{\alpha_0 m J_1(\alpha_0 m r)}{r} \right\} \\ & - \frac{\alpha E q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_1 m^2 t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_1 m^2) - 1} \frac{J_1(\alpha_1 m r_0)}{[J_1(\alpha_1 m r_d)]^2} \left\{ \frac{\alpha_1 m}{r} J_2(\alpha_1 m r) + \frac{\alpha_1 m}{r_d} \frac{1+\nu}{1-\nu} J_2(\alpha_1 m r_d) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{3-\nu}{5+\nu} \frac{2J_1(\alpha_1 m r_d)}{r_d^2} \right. \\ & \left. + \frac{2r}{r_d^3} \frac{1+\nu}{5+\nu} J_1(\alpha_1 m r_d) \right\} \cos(\theta - \theta_0) \\ & + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \cos n(\theta - \theta_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_{nm} m^2 t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm} m^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm} r_0)}{[J_n(\alpha_{nm} r_d)]^2} \left\{ \frac{n(1-n)}{r} J_n(\alpha_{nm} r) - \frac{\alpha_{nm}}{r} J_{n+1}(\alpha_{nm} r) \right. \\ & - \frac{(n+n\nu+4)(n-1)\alpha_{nm} r^{n-2}}{2(3-\nu)r_d^{n-1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) + \frac{n(n-1)r^{n-2}}{r_d^n} J_n(\alpha_{nm} r_d) \\ & \left. + \frac{(1+\nu)(n-2)(n+1)\alpha_{nm} r^n}{2(3-\nu)r_d^{n+1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) \right\} - \frac{\alpha E q_0}{\pi} \frac{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] (r_d^2 - r_0^2) r_d + 2r_0^2}{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] r_0 r_d^3} \frac{1+\nu}{5+\nu} \\ & \times \left\{ \frac{3-\nu}{1-\nu} \frac{1}{r_d} - \frac{r}{r_d^2} \right\} \cos(\theta - \theta_0) + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \left\{ \frac{1}{r_d} - \frac{1}{r_0} \right\} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r_d} \\ & - \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \left\{ \frac{1-3\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{r_0} - \frac{r_0}{r_d^2} \right] \frac{1}{r_d} - \frac{2r}{r_d^2} \left[\frac{1}{r_0} - \frac{r_0}{r_d^2} \right] \right\} \frac{1+\nu}{5+\nu} \cos(\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (28a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^0 = & \frac{\alpha E q_0}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \cos n(\theta - \theta_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_{nm} m^2 t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm} m^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm} r_0)}{[J_n(\alpha_{nm} r_d)]^2} \left\{ \frac{n^2 - n - r^2 \alpha_{nm}^2}{r^2} J_n(\alpha_{nm} r) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{nm}}{r} J_{n+1}(\alpha_{nm} r) + \frac{(n+n\nu+4)(n-1)\alpha_{nm} r^{n-2}}{2(3-\nu)r_d^{n-1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) - \frac{n(n-1)r^{n-2}}{r_d^n} J_n(\alpha_{nm} r_d) \right. \\ & \left. - \frac{(1+\nu)(n+1)(n+2)}{2(3-\nu)} \frac{\alpha_{nm} r^n}{r_d^{n+1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) \right\} \\ & + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_1 m^2 t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_1 m^2) - 1} \frac{J_1(\alpha_1 m r_0)}{[J_1(\alpha_1 m r_d)]^2} \left\{ -\alpha_1 m^2 J_1(\alpha_1 m r) + \frac{\alpha_1 m}{r} J_2(\alpha_1 m r) \right. \\ & - \frac{6(1+\nu)}{5+\nu} \frac{r}{r_d^3} J_1(\alpha_1 m r_d) + \frac{2(3-\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)(5+\nu)} \frac{J_1(\alpha_1 m r_d)}{r_d^2} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_1 m}{r_d} J_2(\alpha_1 m r_d) \left. \right\} \cos(\theta - \theta_0) \\ & + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_0 m^2 t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_0 m^2)} \frac{J_0(\alpha_0 m r_0)}{[J_0(\alpha_0 r_d)]^2} \left\{ -\alpha_0 m^2 J_0(\alpha_0 m r) + \frac{\alpha_0 m}{r} J_1(\alpha_0 m r) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_0 m}{r_d} J_1(\alpha_0 m r_d) \right\} \\ & + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \frac{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] (r_d^2 - r_0^2) r_d + 2r_0^2}{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] r_d^3 r_0} \left\{ \frac{3r}{r_d^2} - \frac{3-\nu}{1-\nu} \frac{1}{r_d} \right\} \frac{1+\nu}{5+\nu} \cos(\theta - \theta_0) \\ & + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu} \left\{ \frac{1}{r_d} - \frac{1}{r_0} \right\} \frac{1}{r_d} - \frac{\alpha E q_0}{\pi} \frac{1-3\nu}{1-\nu} \frac{1+\nu}{5+\nu} \left\{ \frac{1}{r_0} - \frac{r_0}{r_d^2} \right\} \frac{1}{r_d} \cos(\theta - \theta_0) \\ & + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \frac{3(1+\nu)}{5+\nu} \left\{ \frac{1}{r_0} - \frac{r_0}{r_d^2} \right\} \frac{r}{r_d^2} \cos(\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (28b)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^0 = & \frac{\alpha E q_0}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \sin(\theta - \theta_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_{nm} m^2 t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm} m^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm} r_0)}{[J_n(\alpha_{nm} r_d)]^2} \left\{ \frac{n(n-1)}{r^2} J_n(\alpha_{nm} r) - \frac{n\alpha_{nm}}{r} J_{n+1}(\alpha_{nm} r) \right. \\ & - \frac{(n+n\nu+4)(n-1)\alpha_{nm}}{2(3-\nu)} \frac{r^{n-2}}{r_d^{n-1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) - \frac{n(n-1)r^{n-2}}{r_d^n} J_n(\alpha_{nm} r_d) \\ & \left. - \frac{(1+\nu)(n+1)n}{2(3-\nu)} \frac{\alpha_{nm} r^n}{r_d^{n+1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) \right\} \\ & - \frac{\alpha E q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_1 m^2 t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_1 m^2) - 1} \frac{J_1(\alpha_1 m r_0)}{[J_1(\alpha_1 m r_d)]^2} \left\{ \frac{\alpha_1 m}{r} J_2(\alpha_1 m r) - \frac{2r}{r_d^3} \frac{1+\nu}{5+\nu} J_1(\alpha_1 m r_d) \right\} \sin(\theta - \theta_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \frac{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] (r_d^2 - r_0^2) r_d + 2r_0^2}{\left[H + \frac{1}{r_d} r_d^3 r_0 \right]} \left\{ \frac{1+\nu}{5+\nu} \frac{r}{r_d^2} \right\} \sin(\theta - \theta_0) \\
 & + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \frac{1+\nu}{5+\nu} \left\{ \frac{1}{r_0} - \frac{r_0}{r_d^2} \right\} \frac{r}{r_d^2} \sin(\theta - \theta_0) \tag{28c}
 \end{aligned}$$

2.2.3 移動熱源에 의한 溫度分布 및 熱應力

實際의 作業에 있어서는 熔接作業이 이루어지는 동안은 熱源에 의한 熱供給이 주어지고 作業이 終了됨과 同時に 熱源에 의한 熱供給이 遮斷된다. 따라서 作業이 t_0 秒 동안 이루어지고 作業終了後 τ 秒가 經過되어 現在에 이르렀다고 생각하면 (29)式으로 表示된다.

$$\left. \begin{aligned}
 t &= t_0 + \tau \\
 \theta_0 &= \omega t_0
 \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

따라서 (11)式으로 얻어지는 瞬間 點熱源에 의한 溫

度分布와 (28a), (28b) 및 (28c)로 얻어진 瞬間 點熱源에 의한 熱應力成分은 移動熱源에 의한 溫度分布와 熱應力の 任意的 瞬間에서의 増分이 되므로 (29)式을 使用하고 Duhamel의 積分重疊原理를 適用하면 移動熱源에 의한 溫度分布는 (39a)式으로 얻어진다.

$$T = \frac{q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nm} J_n(\alpha_{nm} r_0) J_n(\alpha_{nm} r)}{[J_n(\alpha_{nm} r_d)]^2} C_{nm} \tag{30a}$$

그리고 移動熱源에 의한 熱應力成分은 (30b), (30c)

및 (30d)로 주어지게 된다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{-\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_{0m} r_0)}{[J_0(\alpha_{0m} r_d)]^2} \left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_{0m} J_1(\alpha_{0m} r_d)}{r_d} + \frac{\alpha_{0m}}{r} J_1(\alpha_{0m} r) \right\} C_{0m} \\
 & - \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_{1m} r_0)}{[J_1(\alpha_{1m} r_d)]^2} \left\{ \frac{\alpha_{1m}}{r} J_2(\alpha_{1m} r) + \frac{\alpha_{1m}}{r_d} \frac{1+\nu}{1-\nu} J_2(\alpha_{1m} r_d) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{3-\nu}{5+\nu} \frac{2J_1(\alpha_{1m} r_d)}{r_d^2} \right. \\
 & \left. + \frac{2r}{r_d^3} \frac{1+\nu}{5+\nu} J_1(\alpha_{1m} r_d) \right\} C_{1m} \\
 & + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\alpha_{nm} r_0)}{[J_n(\alpha_{nm} r_d)]^2} \left\{ \frac{n(1-n)}{r} J_n(\alpha_{nm} r) - \frac{\alpha_{nm}}{r} J_{n+1}(\alpha_{nm} r) - \frac{(n+n\nu+4)(n-1)\alpha_{nm} r^{n-2}}{2(3-\nu)r_d^{n-1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) \right. \\
 & \left. + \frac{n(n-1)r^{n-2}}{r_d^n} J_n(\alpha_{nm} r_d) + \frac{(1+\nu)(n-2)(n+1)\alpha_{nm} r^n}{2(3-\nu)r_d^{n+1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) \right\} C_{nm} \\
 & - \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \frac{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] (r_d^2 - r_0^2) r_d + 2r_0^2}{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] r_0 r_d^3} \frac{2(1+\nu)}{5+\nu} \left\{ \frac{3-\nu}{1-\nu} \frac{1}{r_d} - \frac{r}{r_d^2} \right\} \frac{1}{\omega} \left\{ \sin(\theta + \omega t) - \sin(\theta + \omega \tau) \right\} \\
 & - \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \left\{ \frac{1-3\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{r_0} - \frac{r_0}{r_d^2} \right] \frac{1}{r_d} - \frac{2r}{r_d^2} \left[\frac{1}{r_0} - \frac{r_0}{r_d^2} \right] \right\} \frac{1+\nu}{5+\nu} \frac{1}{\omega} \left\{ \sin(\theta + \omega t) - \sin(\theta + \omega \tau) \right\} \\
 & + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r_d} - \frac{1}{r_0} \right\} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{2}{r_d} (t - \tau) \tag{30b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_{0m} r_0)}{[J_0(\alpha_{0m} r_d)]^2} \left\{ -\alpha_{0m}^2 J_0(\alpha_{0m} r) + \frac{\alpha_{0m}}{r} J_1(\alpha_{0m} r) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_{0m}}{r_d} J_1(\alpha_{0m} r_d) \right\} C_{0m} \\
 & + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_{1m} r_0)}{[J_1(\alpha_{1m} r_d)]^2} \left\{ -\alpha_{1m}^2 J_1(\alpha_{1m} r) + \frac{\alpha_{1m}}{r} J_2(\alpha_{1m} r) + \frac{6(1+\nu)}{5+\nu} \frac{r}{r_d^3} J_1(\alpha_{1m} r_d) \right. \\
 & \left. + \frac{2(3-\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)(5+\nu)} \frac{J_1(\alpha_{1m} r_d)}{r_d^2} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_{1m}}{r_d} J_2(\alpha_{1m} r_d) \right\} C_{1m} \\
 & + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\alpha_{nm} r_0)}{[J_n(\alpha_{nm} r_d)]^2} \left\{ \frac{n^2 - n - r^2 \alpha_{nm}^2}{r^2} J_n(\alpha_{nm} r_d) + \frac{\alpha_{nm}}{r} J_{n+1}(\alpha_{nm} r) \right. \\
 & \left. + \frac{(n+n\nu+4)(n-1)\alpha_{nm} r^{n-2}}{2(3-\nu)r_d^n} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) - \frac{n(n-1)r^{n-2}}{r_d^n} J_n(\alpha_{nm} r_d) \right. \\
 & \left. - \frac{(1+\nu)(n+1)(n+2)\alpha_{nm} r^n}{2(3-\nu)r_d^{n+1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) \right\} C_{nm} \\
 & + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \frac{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] (r_d^2 - r_0^2) r_d + 2r_0^2}{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] r_d^3 r_0} \left\{ \frac{6r}{r_d^2} - \frac{3-\nu}{1-\nu} \frac{2}{r_d} \right\} \frac{1+\nu}{5+\nu} \frac{1}{\omega} \left\{ \sin(\theta + \omega t) - \sin(\theta + \omega \tau) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \frac{1+\nu}{5+\nu} \left\{ \frac{6r}{r_d^2} \left[\frac{1}{r_0} - \frac{r_0}{r_d^2} \right] - \frac{1-3\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{r_0} - \frac{r_0}{r_d^2} \right] \frac{2}{r_d} \right\} \frac{1}{\omega} \left\{ \sin(\theta + \omega t) - \sin(\theta + \omega \tau) \right\} \\
 & + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu} \left\{ \frac{1}{r_d} - \frac{1}{r_0} \right\} \frac{2(t-\tau)}{r_d}
 \end{aligned} \tag{30c}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r\theta} = & - \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_{1m} r_0)}{[J_1(\alpha_{1m} r_d)]^2} \left\{ \frac{\alpha_{1m}}{r} J_2(\alpha_{1m} r) - \frac{2r}{r_d^2} \frac{1+\nu}{5+\nu} J_1(\alpha_{1m} r_d) \right\} S_{1m} \\
 & + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\alpha_{nm} r_0)}{[J_n(\alpha_{nm} r_d)]^2} \left\{ \frac{n(n-1)}{r^2} J_n(\alpha_{nm} r) - \frac{n\alpha_{nm}}{r} J_{n+1}(\alpha_{nm} r) \right. \\
 & \quad + \frac{(n+n\nu+4)(n-1)\alpha_{nm}}{2(3-\nu)} \frac{r^{n-2}}{r_d^{n-1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) - \frac{n(n-1)r^{n-2}}{r_d^n} J_n(\alpha_{nm} r_d) \\
 & \quad \left. - \frac{(1+\nu)(n+1)n}{2(3-\nu)} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) \frac{\alpha_{nm} r^n}{r_d^{n-1}} \right\} S_{nm} \\
 & + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \frac{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] (r_d^2 - r_0^2) r_d + 2r_0^2}{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] r_d^3 r_0} \left\{ \frac{1+\nu}{5+\nu} \frac{2r}{r_d^2} \right\} \frac{1}{\omega} \left\{ \cos(\theta + \omega t) - \cos(\theta - \omega \tau) \right\} \\
 & + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \frac{1+\nu}{5+\nu} \left\{ \frac{1}{r_0} - \frac{r_0}{r_d^2} \right\} \frac{2r}{r_d^2} \frac{1}{\omega} \left\{ \cos(\theta + \omega t) - \cos(\theta + \omega \tau) \right\}
 \end{aligned} \tag{30d}$$

여기서 C_{nm} 과 S_{nm} 은 (31a)식과 (31b)식으로 表示 되는 값이다.

$$\begin{aligned}
 C_{nm} = & \frac{\epsilon_n}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2 \kappa^2 \alpha_{nm}^4 + n^2 \omega^2} \frac{e^{-\kappa \alpha_{nm}^2 r}}{\left\{ \kappa \alpha_{nm}^2 [\cos n(\theta + \omega \tau) e^{-\kappa \alpha_{nm}^2 r} - \cos(\theta + \omega t) e^{-\kappa \alpha_{nm}^2 t}] \right.} \\
 & \left. - n\omega [\sin n(\theta + \omega \tau) e^{-\kappa \alpha_{nm}^2 r} - \sin(\theta + \omega t) e^{-\kappa \alpha_{nm}^2 t}] \right\}
 \end{aligned} \tag{31a}$$

$$\begin{aligned}
 S_{nm} = & \frac{\epsilon_n}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2 \kappa^2 \alpha_{nm}^4 + n^2 \omega^2} \left\{ \kappa \alpha_{nm}^2 [\sin n(\theta + \omega \tau) e^{-\kappa \alpha_{nm}^2 r} - \sin n(\theta + \omega t) e^{-\kappa \alpha_{nm}^2 t}] \right. \\
 & \left. + n\omega [\cos n(\theta + \omega \tau) e^{-\kappa \alpha_{nm}^2 r} - \cos n(\theta + \omega t) e^{-\kappa \alpha_{nm}^2 t}] \right\}
 \end{aligned} \tag{31b}$$

2.2.4 理論式의 無次元化

半徑과 熱擴散率을 無次元化變數로 擇하면 다음의 값 들을 使用할 수 있게 된다.

理論解析된 無次元化하여 表示하기 爲하여 圓板의

$$\left. \begin{aligned}
 t' &= \frac{\kappa}{r_d^2} t & t' &= \frac{\kappa}{r_d^2} \tau & \omega' &= \frac{r_d^2}{\kappa} \omega & B &= H r_d & \beta_{nm} &= \alpha_{nm} r_d \\
 \eta_0 &= \frac{r_0}{r_d} & \eta &= \frac{r}{r_d} & Q &= \frac{q_0}{\pi \kappa} & T' &= \frac{T}{Q} & \sigma &= \frac{\alpha E q_0}{\pi \kappa} \\
 \sigma_{rr}' &= \frac{\sigma_{rr}}{\sigma} & \sigma_{\theta\theta}' &= \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma} & \sigma_{r\theta}' &= \frac{\sigma_{r\theta}}{\sigma} & C_{nm}' &= \frac{\kappa}{r_d^2} C_{nm} & S_{nm}' &= \frac{\kappa}{r_d^2} S_{nm}
 \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

따라서 溫度分布 및 熱應力은 다음의 式들로 表示된다.

$$T' = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_{nm}^2 J_n(\beta_{nm} \eta_0) J_n(\beta_{nm} \eta)}{[J_n(\beta_{nm})]^2} C_{nm}' \tag{33a}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}' = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-J_0(\beta_{0m} \eta_0)}{[J_0(\beta_{0m})]^2} \left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu} J_1(\beta_{0m}) + \frac{1}{\eta} J_1(\beta_{0m} \eta) \right\} \beta_{0m} C_{0m}' \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(\beta_{1m} \eta_0)}{[J_1(\beta_{1m})]^2} \left\{ \frac{\beta_{1m}}{\eta} J_2(\beta_{1m} \eta) + \frac{\beta_{1m}}{\eta} \frac{1+\nu}{1-\nu} J_2(\beta_{1m}) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{3-\nu}{5+\nu} 2J_1(\beta_{1m}) + 2\eta \frac{1+\nu}{5+\nu} J_1(\beta_{1m}) \right\} C_{1m}' \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\beta_{nm} \eta_0)}{[J_n(\beta_{nm})]^2} \left\{ \frac{n(1-n)}{\eta} J_n(\beta_{nm} \eta) - \frac{\beta_{nm}}{\eta} J_{n+1}(\beta_{nm} \eta) - \frac{(n+n\nu+4)(n-1)}{2(3-\nu)} \beta_{nm} \eta^{n-2} J_{n-1}(\beta_{nm}) \right. \\
 & \left. + n(n-1) \eta^{n-2} J_n(\beta_{nm}) + \frac{(1+\nu)(n-2)(n+1)}{2(3-\nu)} \beta_{nm} \eta^n J_{n+1}(\beta_{nm}) \right\} C_{nm}'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{(B+1)(1-\eta_0^2)+2\eta_0^2}{(B+1)\eta_0} \frac{2(1+\nu)}{5+\nu} \left\{ \frac{3-\nu}{1-\nu} - \eta \right\} \frac{1}{\omega'} \left\{ \sin(\theta+\omega't') - \sin(\theta+\omega't'') \right\} \\
 & - \left[\left[\frac{1-3\nu}{1-\nu} - 2\eta \right] \left(\frac{1}{\eta_0} - \eta_0 \right) \right] \frac{1+\nu}{5+\nu} \frac{1}{\omega'} \left\{ \sin(\theta+\omega't') - \sin(\theta+\omega't'') \right\} + 2 \left(1 - \frac{1}{\eta_0} \right) \frac{1+\nu}{1-\nu} (t' - t'') \quad (33b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ii}' &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_{0m}\eta_0)}{[J_0(\beta_{0m})]^2} \left\{ -\beta_{0m}^2 J_0(\beta_{0m}\eta) + \frac{\beta_{0m}}{\eta} J_1(\beta_{0m}\eta) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \beta_{0m} J_1(\beta_{0m}) \right\} C_{0m}' \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(\beta_{1m}\eta_0)}{[J_1(\beta_{1m})]^2} \left\{ -\beta_{1m}^2 J_1(\beta_{1m}\eta) + \frac{\beta_{1m}}{\eta} J_2(\beta_{1m}\eta) + \frac{6(1+\nu)}{5+\nu} \eta J_1(\beta_{1m}) + \frac{2(3-\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)(5+\nu)} J_1(\beta_{1m}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1+\nu}{1-\nu} \beta_{1m} J_2(\beta_{1m}) \right\} C_{1m}' \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\beta_{nm}\eta_0)}{[J_n(\beta_{nm})]^2} \left\{ \left[\frac{n(n-1)}{\eta^2} - \beta_{nm}^2 \right] J_n(\beta_{nm}\eta) + \frac{\beta_{nm}}{\eta} J_{n+1}(\beta_{nm}\eta) + \frac{(n+n\nu+4)(n-1)}{2(3-\nu)} \beta_{nm} \eta^{n-2} J_{n+1}(\beta_{nm}) \right. \\
 &\quad \left. - n(n-1)\eta^{n-2} J_n(\beta_{nm}) - \frac{(1+\nu)(n+1)(n+2)}{2(3-\nu)} \beta_{nm} \eta^n J_{n+1}(\beta_{nm}) \right\} C_{nm}' \\
 &+ \frac{(B+1)(1-\eta_0^2)+2\eta_0^2}{(B+1)\eta_0} \left\{ 3\eta - \frac{3-\nu}{1-\nu} \right\} \frac{1+\nu}{5+\nu} \frac{2}{\omega'} \left\{ \sin(\theta+\omega't') - \sin(\theta+\omega't'') \right\} \\
 &+ \left\{ 3\eta - \frac{3-\nu}{1-\nu} \right\} \frac{1+\nu}{5+\nu} \frac{2}{\omega'} \left\{ \sin(\theta+\omega't') - \sin(\theta+\omega't'') \right\} \left(\frac{1}{\eta_0} - \eta_0 \right) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(1 - \frac{1}{\eta_0} \right) 2(t' - t'') \quad (33c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r\theta} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(\beta_{1m}\eta_0)}{[J_1(\beta_{1m})]^2} \left\{ \frac{2(1+\nu)}{5+\nu} \eta J_1(\beta_{1m}) - \frac{\beta_{1m}}{\eta} J_1(\beta_{1m}\eta) \right\} S_{1m}' \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\beta_{nm}\eta_0)}{[J_n(\beta_{nm})]^2} \left\{ \frac{n(n-1)}{\eta^2} J_n(\beta_{nm}\eta) - \frac{n\beta_{nm}}{\eta} J_{n+1}(\beta_{nm}\eta) + \frac{(n+n\nu+4)\beta_{nm}}{2(3-\nu)} \eta^{n-2} J_{n+1}(\beta_{nm}) \right. \\
 &\quad \left. - n(n-1)\eta^{n-2} J_n(\beta_{nm}) - \frac{(1+\nu)(n+1)n}{2(3-\nu)} J_{n+1}(\beta_{nm}) \beta_{nm} \eta^n \right\} S_{nm}' \\
 &+ \frac{(B+1)(1-\eta_0^2)+2\eta_0^2}{(B+1)\eta_0} \left\{ \frac{1+\nu}{5+\nu} \right\} \frac{2\eta}{\omega'} \left\{ \cos(\theta+\omega't') - \cos(\theta+\omega't'') \right\} \\
 &+ \frac{1+\nu}{5+\nu} \left(\frac{1}{\eta_0} - \eta_0 \right) \frac{2\eta}{\omega'} \left\{ \cos(\theta+\omega't') - \cos(\theta+\omega't'') \right\} \quad (33d)
 \end{aligned}$$

$$C_{nm}' = \frac{1}{B^2 + \beta_{nm}^2 - n^2} \frac{e^{-\beta_{nm}^2 t''}}{\beta_{nm}^4 + (n\omega')^2} \left\{ \beta_{nm}^2 [\cos n(\theta+\omega't'') e^{-\beta_{nm}^2 t''} - \cos n(\theta+\omega't') e^{-\beta_{nm}^2 t'}] \right. \\
 \left. - n\omega' [\sin n(\theta+\omega't'') e^{-\beta_{nm}^2 t''} - \sin n(\theta+\omega't') e^{-\beta_{nm}^2 t'}] \right\} \quad (34a)$$

$$S_{nm}' = -\frac{1}{B^2 + \beta_{nm}^2 - n^2} \frac{e^{-\beta_{nm}^2 t''}}{\beta_{nm}^4 + (n\omega')^2} \left\{ \beta_{nm}^2 [\sin n(\theta+\omega't'') e^{-\beta_{nm}^2 t''} - \sin n(\theta+\omega't') e^{-\beta_{nm}^2 t'}] \right. \\
 \left. + n\omega' [\cos n(\theta+\omega't'') e^{-\beta_{nm}^2 t''} - \cos n(\theta+\omega't') e^{-\beta_{nm}^2 t'}] \right\} \quad (34b)$$

그리고 (12)式으로 주어진 特性方程式은 (35)式으로 하여 求하여진바 있다. 즉 溫度分布는 (36)式으로 주 表示된다.

$$(B+n)J_n(\beta_{nm}) - \beta_{nm}J_{n+1}(\beta_{nm}) = 0 \quad (35)$$

2.3 外廓의 熔接線을 熔接하는 境遇

2.3.1 瞬間 點熱源에 依한 溫度分布

水密隔壁과 熔接되는 두 개의 熔接線에서 外廓의 熔接線을 熔接하는 境遇를 생각하면 2.2.1에서와 同一한 條件이 成立되고 Fig. 3의 極座標系로 表示할 수 있다. 이 境遇에 對한 溫度分布는 (10a)式을 使用하여 $r_0 = r_a$ 로 놓고 Lommel 公式을 適用하여 簡單히 하고 逆變換하면 얻어지는데 이는 이미 Hsu [5] [6]에 依

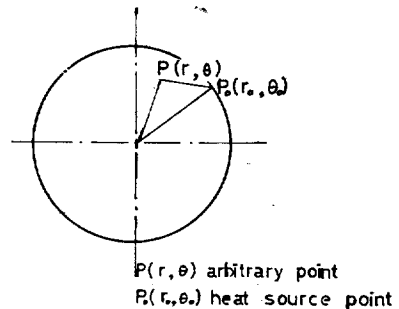


Fig. 3 Coordinate System

$$T^0 = \frac{q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta - \theta_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nm}^2 e^{-\alpha_{nm} m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm} r)}{J_n(\alpha_{nm} r_d)} \quad (36)$$

여기서 α_{nm} 은 (12)식을 滿足하는 陽의 實根이다.

2.3.2 瞬間 點熱源에 의한 熱應力

Hsu 는 熱應力 解析에 있어서는 圓板의 周緣은 拘束되어 있지 않았다고 생각하여 解를 求하고 있다. 그러나 주어진 問題에서는 諸言에서 言及한 如와 같이 周

緣이 固着되었다고 생각하는 것이 좀 더 合理的이다.

그런데 주어진 問題에서는 變位 potential 이 (37)으로 表示되고 Airy 의 應力函數는 (21a)式이 適用된다. 따라서 級數의 常數係數들은 (38a), (38b), (38c) 및 (38d)로 求하여 진다.

$$\phi = \frac{(1+\nu)\alpha q_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n r^n \cos n(\theta - \theta_0)}{\left[H + \frac{n}{r_d}\right] r_d^{n+1}} - \frac{(1+\nu)\alpha q_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta - \theta_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_{nm} m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \frac{J_n(\alpha_{nm} r)}{J_n(\alpha_{nm} r_d)} \quad (37)$$

$$b_0 = \frac{\alpha E q_0}{\pi} \frac{-1}{\left[H + \frac{1}{r_d}\right] r_d^3} \frac{(3-\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)(5+\nu)} \cos(\theta - \theta_0) - \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_{0m} m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{0m}^2)} \frac{J_1(\alpha_{0m} r)}{J_0(\alpha_{0m} r_d)} \frac{\alpha_{0m}}{2r_d} \frac{1+\nu}{1-\nu} - \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_{1m} m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{1m}^2) - 1} \left\{ \frac{2(3-\nu)}{r_d^2 (5+\nu)} - \frac{\alpha_{1m} J_3(\alpha_{1m} r_d)}{r_d J_1(\alpha_{1m} r_d)} \right\} \frac{1+\nu}{1-\nu} \cos(\theta - \theta_0) \quad (38a)$$

$$b_1 = \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \left\{ \frac{2}{\left[H + \frac{1}{r_d}\right] r_d^3} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_{1m} m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{1m}^2) - 1} \frac{2}{r_d^3} \right\} \frac{1+\nu}{5+\nu} \quad (38b)$$

$$b_m = \frac{-\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_{nm} m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \frac{\alpha_{nm}}{r_d^{n+1}} \frac{1+\nu}{3-\nu} \frac{J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d)}{J_n(\alpha_{nm} r_d)} \quad (38c)$$

$$\alpha_n = \frac{\alpha E q_0}{\pi} \left\{ \frac{2}{\left[H + \frac{n}{r_d}\right] r_d^{n+1}} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_{nm} m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \left\{ \frac{2}{r_d^n} - \frac{n+n\nu+4}{n(3-\nu)} \frac{\alpha_{nm}}{r_d^{n-1}} \frac{J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d)}{J_n(\alpha_{nm} r_d)} \right\} \right\} \quad (38d)$$

위의 常數係數들을 適用하여 式을 簡單히 하면, 應力成分은 (39a) (39b) 및 (39c)로 求하여 진다.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^0 &= \frac{-\alpha E q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_{0m} m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{0m}^2)} \frac{\alpha_{0m}}{J_0(\alpha_{0m} r_d)} \left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{J_1(\alpha_{0m} r_d)}{r_d} + \frac{J_1(\alpha_{0m} r)}{r} \right\} \\ &\quad - \frac{\alpha E q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_{1m} m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{1m}^2) - 1} \left[\frac{\alpha_{1m}}{J_1(\alpha_{1m} r_d)} \left\{ \frac{J_2(\alpha_{1m} r)}{r} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{J_2(\alpha_{1m} r_d)}{r_d} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1+\nu}{5+\nu} \frac{2}{r_d^2} \left\{ \frac{r}{r_d} - \frac{3-\nu}{1-\nu} \right\} \right] \cos(\theta - \theta_0) \\ &\quad + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \cos n(\theta - \theta_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_{nm} m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm}^2) - n^2} \frac{1}{J_n(\alpha_{nm} r_d)} \left\{ \frac{n(1-n)}{r^2} J_n(\alpha_{nm} r) - \frac{\alpha_{nm}}{r} J_{n+1}(\alpha_{nm} r) \right. \\ &\quad - \frac{(n+n\nu+4)(n-1)}{2(3-\nu)} \frac{\alpha_{nm} r^{n-2}}{r_d^{n-1}} J_{n-1}(\alpha_{nm} r_d) + \frac{n(n-1)r^{n-2}}{r_d^n} J_n(\alpha_{nm} r_d) \\ &\quad \left. + \frac{(1+\nu)(n-2)(n+1)}{2(3-\nu)} \frac{\alpha_{nm} r^n}{r_d^{n+1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) \right\} \\ &\quad + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \frac{2}{\left[H + \frac{1}{r_d}\right] r_d^3} \frac{1+\nu}{5+\nu} \left\{ \frac{r}{r_d} - \frac{3-\nu}{1-\nu} \right\} \cos(\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (39a)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^0 = \frac{\alpha E q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_{0m} m^2}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{0m}^2)} \frac{\alpha_{0m}}{J_0(\alpha_{0m} r_d)} \left\{ \frac{1}{r} J_1(\alpha_{0m} r) - \alpha_{0m} J_0(\alpha_{0m} r) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{J_1(\alpha_{0m} r_d)}{r_d} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_1 m^2 t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_1 m^2) - 1} \left[\frac{\alpha_{1m}}{J_1(\alpha_{1m} r_d)} \left\{ \frac{1}{r} J_2(\alpha_{1m} r) - \alpha_{1m} J_1(\alpha_{1m} r) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{J_2(\alpha_{1m} r_d)}{r_d} \right\} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1+\nu}{5+\nu} \frac{2}{r_d^2} \left\{ \frac{3-\nu}{1-\nu} - \frac{3r}{r_d} \right\} \right] \cos(\theta - \theta_0) \\
& + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \cos n(\theta - \theta_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_{nm} m^2 t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm} m^2) - n^2} \left[\frac{\alpha_{nm}}{J_n(\alpha_{nm} r_d)} \left\{ \frac{J_{n+1}(\alpha_{nm} r)}{r} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(n+n\nu+4)(n-1)}{2(3-\nu)} \frac{r^{n-2}}{r_d^{n-1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) - \frac{(1+\nu)(n+1)(n+2)}{2(3-\nu)} \frac{r^n}{r_d^{n+1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{n^2 - n - \alpha_{nm} r^2}{\alpha_{nm} r^2} J_n(\alpha_{nm} r) - \frac{n(n-1)r^{n-2}}{r_d^n} J_n(\alpha_{nm} r_d) \right\} \right] 2 \cos n(\theta - \theta_0) \\
& + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \frac{4}{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] r_d^3} \frac{(1+\nu)}{(5+\nu)} \left\{ \frac{3r}{r_d} - \frac{3-\nu}{1-\nu} \right\} \cos(\theta - \theta_0) \tag{39b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\theta} &= - \frac{\alpha E q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_1 m^2 t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_1 m^2) - 1} \left\{ \frac{1}{J_1(\alpha_{1m} r_d)} \frac{\alpha_{1m}}{r} J_1(\alpha_{1m} r) - \frac{1+\nu}{5+\nu} \frac{2r}{r_d^3} \right\} \sin(\theta - \theta_0) \\
& + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \sin n(\theta - \theta_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_{nm} m^2 t}}{r_d^2 (H^2 + \alpha_{nm} m^2) - n^2} \frac{1}{J_n(\alpha_{nm} r_d)} \left\{ \frac{n(n-1)}{r^2} J_n(\alpha_{nm} r) \right. \\
& \quad - \frac{n\alpha_{nm}}{r} J_{n+1}(\alpha_{nm} r) + \frac{(n+n\nu+4)(n-1)}{2(3-\nu)} \frac{\alpha_{nm} r^{n-2}}{r_d^{n-1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) \\
& \quad \left. - \frac{n(n-1)r^{n-2}}{r_d^2} J_n(\alpha_{nm} r_d) - \frac{n(n+1)(1+\nu)}{2(3-\nu)} \frac{\alpha_{nm} r^n}{r_d^{n+1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) \right\} \\
& + \frac{\alpha E q_0}{\pi} \frac{2r}{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] r_d^4} \frac{1+\nu}{5+\nu} \sin(\theta - \theta_0) \tag{39c}
\end{aligned}$$

2.2.3 移動熱源에 의한 溫度分布 및 熱應力

動熱源으로 인한 溫度分布 및 熱應力은 (40a), (40b),

2.2.3에서와 同一한 方法으로 積分重疊함으로써 移

(40c) 및 (40d)로 表示할 수 있다.

$$T = \frac{q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nm}^2 J_n(\alpha_{nm} r)}{J_n(\alpha_{nm} r_d)} C_{nm} \tag{40a}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= - \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{0m}}{J_0(\alpha_{0m} r_d)} \left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{J_1(\alpha_{0m} r_d)}{r_d} + \frac{J_1(\alpha_{0m} r)}{r} \right\} C_{0m} \\
& - \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha_{1m}}{J_1(\alpha_{1m} r_d)} \left\{ \frac{J_2(\alpha_{1m} r)}{r} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{J_2(\alpha_{1m} r_d)}{r_d} \right\} + \frac{1+\nu}{5+\nu} \frac{2}{r_d^2} \left\{ \frac{r}{r_d} - \frac{3-\nu}{1-\nu} \right\} \right] C_{1m} \\
& + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{J_n(\alpha_{nm} r_d)} \left\{ \frac{n(1-n)}{r^2} J_n(\alpha_{nm} r) - \frac{\alpha_{nm}}{r} J_{n+1}(\alpha_{nm} r) - \frac{(n+n\nu+4)(n-1)}{2(3-\nu)} \frac{\alpha_{nm} r^{n-2}}{r_d^{n-1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) \right. \\
& \quad \left. + \frac{n(n-1)r^{n-2}}{r_d^n} J_n(\alpha_{nm} r_d) + \frac{(1+\nu)(n-2)(n+1)}{2(3-\nu)} \frac{\alpha_{nm} r^n}{r_d^{n+1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) \right\} C_{nm} \\
& + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \frac{4}{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] r_d^3} \frac{1+\nu}{5+\nu} \left\{ \frac{r}{r_d} - \frac{3-\nu}{1-\nu} \right\} \frac{1}{\omega} \left\{ \sin(\theta + \omega t) - \sin(\theta + \omega \tau) \right\} \tag{40b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{0m}}{J_0(\alpha_{0m} r_d)} \left\{ \frac{1}{r} J_1(\alpha_{0m} r) - \alpha_{0m} J_0(\alpha_{0m} r) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{J_1(\alpha_{0m} r_d)}{r_d} \right\} C_{0m} \\
& + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_{1m}}{J_1(\alpha_{1m} r_d)} \left\{ \frac{1}{r} J_1(\alpha_{1m} r) - \alpha_{1m} J_1(\alpha_{1m} r) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{J_1(\alpha_{1m} r_d)}{r_d} \right\} + \frac{1+\nu}{5+\nu} \frac{2}{r_d^2} \left[\frac{3-\nu}{1-\nu} - \frac{3r}{r_d} \right] \right\} C_{1m} \\
& + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nm}}{J_n(\alpha_{nm} r_d)} \left\{ \frac{J_{n+1}(\alpha_{nm} r)}{r} + \frac{n^2 - n - r^2 \alpha_{nm}^2}{\alpha_{nm} r^2} J_n(\alpha_{nm} r) \right. \\
& \quad \left. + \frac{(n+n\nu+4)(n-1)}{2(3-\nu)} \frac{r^{n-2}}{r_d^{n-1}} J_{n+1}(\alpha_{nm} r_d) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{(1+\nu)(n+1)(n+2)}{2(3-\nu)} \frac{r^n}{r_d^{n+1}} J_{n+1}(\alpha_{nm}r_d) - \frac{n(n-1)r^{n-2}}{r_d^n} J_n(\alpha_{nm}r_d) \Big\} C_{nm} \\
 & + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \frac{4}{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] r_d^3} \frac{1+\nu}{5+\nu} \left\{ \frac{3r}{r_d} + \frac{3-\nu}{1-\nu} \right\} \frac{1}{\omega} \left\{ \sin(\theta + \omega t) - \sin(\theta + \omega \tau) \right\} \quad (40c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r\theta} = & - \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{J_2(\alpha_{1m}r)}{J_1(\alpha_{1m}r_d)} \frac{\alpha_{1m}}{r} - \frac{1+\nu}{5+\nu} \frac{2r}{r_d^2} \right\} S_{1m} \\
 & + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{J_n(\alpha_{nm}r_d)} \left\{ \frac{n(n-1)}{r^2} J_n(\alpha_{nm}r) - \frac{n\alpha_{nm}}{r} J_{n+1}(\alpha_{nm}r) \right. \right. \\
 & \quad + \frac{(n+n\nu+4)(n-1)}{2(3-\nu)} \frac{\alpha_{nm}r^{n-2}}{r_d^{n-1}} J_{n-1}(\alpha_{nm}r_d) \\
 & \quad \left. \left. - \frac{n(n+1)(1+\nu)}{2(3-\nu)} \frac{\alpha_{nm}r^n}{r_d^{n+1}} J_{n+1}(\alpha_{nm}r_d) \right\} - \frac{(n-1)n r^{n-2}}{r_d^n} \right] S_{nm} \\
 & + \frac{\alpha E q_0}{2\pi} \frac{4r}{\left[H + \frac{1}{r_d} \right] r_d^4} \frac{1+\nu}{5+\nu} \frac{1}{\omega} \left\{ \cos(\theta + \omega t) - \cos(\theta + \omega \tau) \right\} \quad (40d)
 \end{aligned}$$

여기서 C_{nm} 과 S_{nm} 은 (31a)식과 (31b)식으로表示되는 값이다.

無次元化變數를 (32)식과 同一하게 設定하면 溫度分布와 熱應力成分들은 (41a), (41b), (41c) 및 (41d)로表示된다.

2.3.4 理論式的 無次元化

$$T' = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_{nm}^2 J_n(\beta_{nm}\eta)}{J_n(\beta_{nm})} C_{nm}' \quad (41a)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}' = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_{0m}^2}{J_0(\beta_{0m})} \left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu} J_1(\beta_{0m}\eta) + \frac{J_1(\beta_{0m}\eta)}{\eta} \right\} C_{0m}' \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\beta_{1m}}{J_1(\beta_{1m})} \left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu} J_2(\beta_{1m}) + \frac{J_2(\beta_{1m}\eta)}{\eta} \right\} + \frac{2(1+\nu)}{5+\nu} \left\{ \eta - \frac{3-\nu}{1-\nu} \right\} \right] C_{1m}' \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{J_n(\beta_{nm})} \left\{ \frac{n(1-n)}{\eta^2} J_n(\beta_{nm}\eta) - \frac{\beta_{nm}}{\eta} J_{n+1}(\beta_{nm}\eta) - \frac{(n+n\nu+4)(n-1)}{2(3-\nu)} \beta_{nm}\eta^{n-2} J_{n-1}(\beta_{nm}) \right. \\
 & \quad \left. + n(n-1)\eta^{n-2} J_n(\beta_{nm}) + \frac{(1+\nu)(n-2)(n+1)}{2(3-\nu)} \beta_{nm}\eta^n J_{n+1}(\beta_{nm}) \right\} C_{nm}' \\
 & + \frac{4}{B+1} \frac{1+\nu}{5+\nu} \left\{ \eta - \frac{3-\nu}{1-\nu} \right\} \frac{1}{\omega'} \left\{ \sin(\theta + \omega' t') - \sin(\theta + \omega' t'') \right\} \quad (41b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta\theta}' = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_{0m}^2}{J_0(\beta_{0m})} \left\{ \frac{1}{\eta} J_1(\beta_{0m}\eta) - \beta_{0m} J_0(\beta_{0m}\eta) - \frac{1+\nu}{1-\nu} J_1(\beta_{0m}) \right\} C_{0m}' \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\beta_{1m}}{J_1(\beta_{1m})} \left\{ \frac{1}{\eta} J_2(\beta_{1m}\eta) - \beta_{1m} J_1(\beta_{1m}\eta) - \frac{1+\nu}{1-\nu} J_2(\beta_{1m}) \right\} + \frac{2(1+\nu)}{5+\nu} \left\{ \frac{3-\nu}{1-\nu} - 3\eta \right\} \right] C_{1m}' \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_{nm}^2}{J_n(\beta_{nm})} \left\{ \frac{J_{n+1}(\beta_{nm}\eta)}{\eta} + \frac{n^2 - n - \beta_{nm}^2 \eta^2}{\beta_{nm} \eta^2} J_n(\beta_{nm}\eta) + \frac{(n+n\nu+4)(n-1)}{2(3-\nu)} \eta^{n-2} J_{n+1}(\beta_{nm}) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{(1+\nu)(n+1)(n+2)}{2(3-\nu)} \eta^n J_{n+1}(\beta_{nm}) - n(n-1)\eta^{n-2} J_n(\beta_{nm}) \right\} C_{nm}' \\
 & + \frac{4}{B+1} \frac{1+\nu}{5+\nu} \left(3\eta - \frac{3-\nu}{1-\nu} \right) \frac{1}{\omega'} \left\{ \sin(\theta + \omega' t') - \sin(\theta + \omega' t'') \right\} \quad (41c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r\theta}' = & - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{J_2(\beta_{1m}\eta)}{J_1(\beta_{1m})} \frac{\beta_{1m}}{\eta} - \frac{2(1+\nu)}{5+\nu} \eta \right\} S_{1m}' + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{J_n(\beta_{nm})} \left\{ \frac{n(n-1)}{\eta^2} J_n(\beta_{nm}\eta) - \frac{n\beta_{nm}}{\eta} J_{n+1}(\beta_{nm}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{(n+n\nu+4)(n-1)}{2(3-\nu)} \beta_{nm}\eta^{n-2} J_{n-1}(\beta_{nm}) - \frac{n(n+1)(1+\nu)}{2(3-\nu)} \beta_{nm}\eta^n J_{n+1}(\beta_{nm}) - n(n-1)\eta^{n-2} \right\} S_{nm}' \right. \\
 & \left. + \frac{4\eta}{[B+1]} \frac{1+\nu}{5+\nu} \frac{1}{\omega'} \left\{ \cos(\theta + \omega' t') - \cos(\theta + \omega' t'') \right\} \right] \quad (41d)
 \end{aligned}$$

여기서 $C_{n,m}'$ 과 $S_{n,m}'$ 은 (34a)와 (34b)로表示되고
 特性方程式은 (35)式으로表示된다.

3. 理論式的檢討

熱源이 原板의 中央에 주어지는 境遇에 있어서는 $J_n(\beta_{n,m}\eta_0) \Big|_{\eta_0=0} = 0$ 의 關係가 주어진다. 따라서 級數의 첫항만이 남게 되어 對稱條件이 滿足되는 것을 確認할 수 있다. 또 熱源이 周緣에 놓여지는 境遇 즉 $\eta_0=1$ 인 境遇에 있어서는 (30a), (30b), (30c) 및 (30d)式은 (40a), (40b), (40c) 및 (40d)式과 一致되는 것을 볼 수 있다. 특히 $\eta_0=1$ 이고 $\omega'=0$ 그리고 $t''=0$ 일 때는 (30a)式으로 주어진 溫度分布는 文獻[5]의 結果와 一致되며, (12)式에 $\eta_0=1$ 인 條件을 適用하면 文獻[6]의 結果와 一致하는 것을 確認할 수 있다. 熱應力에 對하여 同一한 條件을 適用하면 周緣에서 熱源의 位置에 關係없이 항상 熱應力을 갖게 된다. 그리고 變位成分은 條件으로 使用한 바와 같이 恒常 周緣에서 零이 되는 것은 級數의 常數係數을 適用하여 計算함으로써 確認할 수 있다.

또한 $t'=0$ 일 때와 $t''=\infty$ 일 때는 溫度分布와 모든 熱應力成分이 零이 되는 것을 確認할 수 있다. 以上을 論據로 하여 얻어진 理論解는 주어진 問題에 對한 嚴密解가 된다고 믿어진다. 그런데 얻어진 理論解를 使用하여 圓板의 原點에서 熱應力成分을 求하고자 하는 境遇에 있어서는 特異點이 되기 때문에 Bessel函數의 漸近公式를 使用하여 文獻[7]에서와 같이 極限値를 求하고 이로부터 計算되어야 한다는 點에 注意를 要한다.

4. 結 論

Penetration piece를 그와 等價인 圓板으로 理論化할 수 있다고 假定하여 解析한 理論解는 penetration piece의 熔接線 近處에서의 熱應力을 類推하는 데 뿐 아니라 圓板에서의 熔接 等과 같은 工學的 應用例에서 有用하게 適用될 수 있는 嚴密解가 되며 殘留應力을 解析하는 데 必要한 基礎的 資料가 될 것으로 믿어진다.

後 記

本 研究를 爲하여 1974年度 文敎部 學術研究助成費를 支給하여 주신 文敎當局과 研究進行過程에 있어서 많은 助言을 주신 學內的 여러 教授님들께 깊이 感謝 드린다.

參 考 文 獻

- [1] E. Melan, "Wärmespannungen einer Scheibe in folge einer wandernden Wärmequelle", *Ing. Archt* p.46~p.48, 1952.
- [2] E. Melan, "Wärmespannungen infolge eines rotierenden Temperaturfeldes", *Österr. Ing. Arch.* p.165~p.170, 1954.
- [3] Max. Hieke, "Eine indirecte Bestimmung der Airyschen Fläche bei imstetigen Wärmespannungen", *Zeitschrift für Angewante Mathematik und Mechanik*, p.285~p.294, 1955.
- [4] G. Horvay, "Transient Thermal Stresses in Circular Disk and Cylinders", *ASME Transaction* p.127~p.135, 1954.
- [5] T.R. Hsu, "Thermal Shock on a Finite Disk due to an Instantaneous Point Heat Source", *Journal of Applied Mechanics*, p.113~p.120, 1969.
- [6] T.R. Hsu, "Transient Thermal Stresses on a Finite Disk due to Continuous Point Heat Source", *Journal of Engineering for Industry*, p.357~p.365, 1970.
- [7] Hyochul Kim, "On the Thermal Stress Analysis due to Patch Welding in a Circular Disk", *Proceedings of the Korean Society of Mechanical Engineers*, p.20~p.27, 1974.
- [8] B. V. Karelekar, "Nonstationary Quasi-static Thermal Displacements and Thermal Stresses in a Cylindrical Body of Finite Height Subjected to Convective Heat Losses", *Journal of Applied Mechanics*, p.834~p.838, 1971.
- [9] Hyochul Kim, "On the Thermal Stresses due to Welding of a Penetration Piece for a Watertight Bulkhead Plate (I)—Thermal Stresses in a Bulkhead Plate—", *Journal of the Society of Naval Architects in Korea*, Vol.12, No.1, 1975.
- [10] Brahmader Sharma, "Thermal Stresses in infinite Elastic Disks", *Journal of Applied Mechanics*, p.527~p.531, 1956.
- [11] Carslaw and Jaeger, "Conduction of Heat in Solids", Oxford University Press, 1973.
- [12] V. Arpaci "Conduction Heat Transfer", Addison Wesley Publishing Company, 1966.
- [13] W. Nowacki, "Thermo-Elasticity", Addison Wesley Publishing Company, Inc. 1962.
- [14] Boley and Weiner, "Theory of Thermal Stresses", John Wiley and Sons, Inc. 1967.
- [15] S. Timoshenko and Goodier, "Theory of Elasticity", McGraw-Hill Book Company. Inc. 1951.
- [16] G.N. Watson, "A treatise on the Theory of Bessel Function", Cambridge University Press, 1966.
- [17] E.T. Whittaker and G.N. Watson, "A Course of Modern Analysis", Cambridge University Press, 1962.