論文 75-12-4-7

線形機械振動系統의 電氣回路網的 考察

(Study on the Mechanical Networks of Linear Mechanical Vibrating Systems)

李 相 培*

(Lee, Sang Bae)

要 約

機械系와 電氣系 사이의 두 analogy로부터 mobility 回路와 impedance回路를 얻었다. 이 두 機械回路에서 impedance와 mobility關係를 回路網理論을 根據로 比較 檢討 하였고 이로부터 mobility回路가 더 自然스럽고 基本的인 機械回路임을 究明하였다. 또한 impedance測定이 觀察點과 數에 따라서 可變性인데 比하여 mobility測定은 不變性임을 보였다.

Abstract

Two mechanical networks, mobility network, and impedance network, are proposed and the relations between a mechanical system and their two mechanical networks are examined briefly.

The mobility network is founed to be more natural of two networks.

This paper also shows the invariant property of mobility elements in the measurement procedure.

1. 緖 論

電氣, 機械, 音響, 電氣機械, 流體 및 熱傳達과 같은 dynamic系統들을 解釋하는데 있어서 이 系統들의 運動方程式과 解釋方法들 사이에는 類似한 特徵을 가지고 있어 analogy方法이 널리 利用되고 있다[1)2)].

電氣回路理論의 初期에는 電氣的인 諸現象을 機械振動現象으로 說明하였으나 오늘날 電氣回路理論의 急激한 發展은 機械振動系統에서의 對應되는 理論보다 앞서게 되었다. 따라서 回路網理論의 機械振動系에의 適用은 當然한 일이라 하겠다. 電氣 analogy는 처음에는 音響系에서 使用되었고 이方法은 곧 電氣, 機械, 音響素子들을 한 系統에 다 使用하는 自動制御理論에서 適用하게 되었다.

電氣系에서는 通常 電壓源이 source인데 比하여 機械系에서는 힘이 source가 된다. 筆者의 意見으로는 이 事實이 analogy方法을 利用하여 振動系統을 硏究하든 初期에 힘—電壓 analogy(impedance analogy)를 使用케된 理由인것같다.

Firestone[6)]이 mobility analogy를 發表하기 前에는 impedance analogy만이 使用되었었다. 많은 著者들이 두 電氣的 analogy에 關하여 討論해왔으나 只今까지도 이 두 analogy는 並用되고 있다[3)4)5)7)]. 따라서 이 分野에 混動을 가져오고있는 實情이어서 어떤 槪念이 더 自然的이고 基本的인 槪念인가를 살펴서 究明하는것은 이 時點에서 大端히 重要한 일이라 하겠다. 本 論文에서는 機械系의 集中回路, 線形性, 그리고 正弦波 定狀運動을 假定하였다.

2. 機械回路

機械系를 解析하고 設計하는데 있어서 電氣的 analogy는 機械系에서의 Newton의 運動法則이 電氣系에서의 Kirchhoff의 電壓 或은 電流法則과 對應되는데 基礎를 두고있다. D'Alembert의 原理에 依하면 機械

* 正會員, 서울大學校 工科大學
Member, College of Engineering, Seoul National University 接受日字 : 1975年 8月 4日

系의 한 點上에서의 모든 힘의 總和는 零이다. 따라서 機械系의 動的 平衡方程式은 電氣系의 한 node에서의 電流方程式 (KCL)이나 한 loop에서의 電壓方程式 (KVL)과 形態에 있어서 같은것이 될것이다.

機械系의 動的平衡方程式을 KCL과 對應 시켰을때 mobility analogy(MA)라 부르고 KVL과 對應시켰을 때 Impedance analogy(I A)라 부른다[3)5)]. 또한 MA에 依하여 얻은 等價機械回路를 mobility回路, I A에 依하여 얻은 等價機械回路를 impedance 回路라고 부르기로 한다. 이들 두 機械回路에서 impedance와 mobility 사이의 關係를 살펴 보기로하자.

2-1. Impedance와 Mobility

한 端子(terminal) 或은 驅動點에서의 機械的 impedance(immobility라고도 부른다)는 힘과 速度의 比로서 定義되고 같은 端子에서의 mobility는 速度와 힘의 比로서 定義되므로 單純히 impedance의 逆數로 나타낼수있다. 그러나 많은 端子를 考慮해야되는 複雜한 多端子 機械系에서는 mobility와 impedance의 一般化된 定義가 要求된다.

線形性의 假定으로부터 重疊의 原理를 適用하면 mobility素子 m_{ij}는 다음과 같은 式으로 定義할수 있을것이다.

$$u_i=\sum_j m_{ij}f_j \tag{1}$$

即 i端子에서의 速度 u_i는 j端子에 加해지는 各 힘 f_j에 依하여 생기는 速度들의 總和로써 定義된다. 여기에 速度 u_i는 基準點(通常 ground)에 對한 相對速度이다. (1)式은 다음과 같은 行列式으로 表示할수있다.

$$U=MF \tag{2}$$

여기서 U와 F는 出力速度와 印加된 힘의 縱列 vector들이고 M는 mobility素子 m_{ij}의 行列이다.

Impedance도 mobility와 같은 方法으로 定義하면 다음과 같이 쓸수있다.

$$f_i=\sum_j z_{ij}\,u_j \tag{3}$$

行列式으로 表示하면

$$F=ZU \tag{4}$$

여기서 Z는 impedance素子 z_{ij}의 行列이다.

주어진 機械回路에서 mobility와 impedance의 關係는 式 (2)와 (4)로부터 다음과 같이 쓸수있다.

$$Z=M^{-1} \tag{5}$$

따라서 一般的으로 $z_{ij}\neq m_{ij}$임을 알수있다.

한 機械系의 集中 model에서 對應하는 mobility回路와 impedance回路를 얻었을때 두 回路는 定義에 依하여 dual回路이므로 한 回路의 mobility M는 다른 回路의 impedance Z와 같게된다(두 回路의 node와 loop를 一致시키고 같은 順으로 나열했을때).

2-2. Impedance와 Mobility測定

(1)式과 (3)式으로부터 mobility와 impedance素子를 아래와 같이 쓸수있다.

$$m_{ij}=\frac{u_i}{f_j}\bigg|_{f_k=0} \quad (k\neq j) \tag{6}$$

$$z_{ij}=\frac{f_i}{u_j}\bigg|_{u_k=0} \quad (k\neq j) \tag{7}$$

即 mobility素子는 任意의 한 端子(觀察點)에 單位힘을 加했을때 다른(或은 같은) 端子에서의 自由速度 (free velocity)를 測定하므로써 얻을수있다. 따라서 mobility素子는 다른點에서 觀察을 하든 않든 關係없이 恒常 같은 값을 갖게된다. 한便 impedance素子는 任意의 한 端子에 單位速度를 加했을때 다른(또는 같은) 端子에서의 blocking force를 測定 하므로써 얻을수있다. 여기서 blocking force란 觀察點의 速度가 零이 되도록 外部에서 加해주는 힘과 같다.

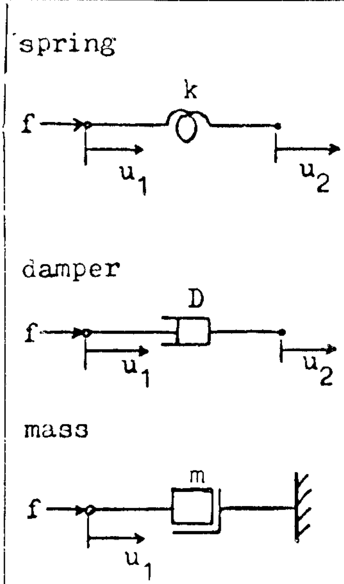
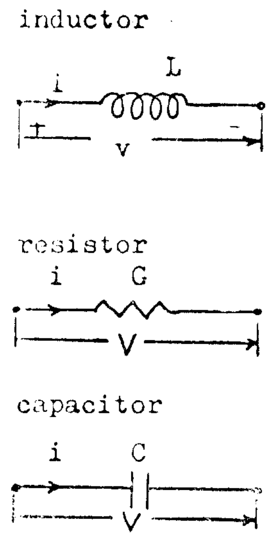
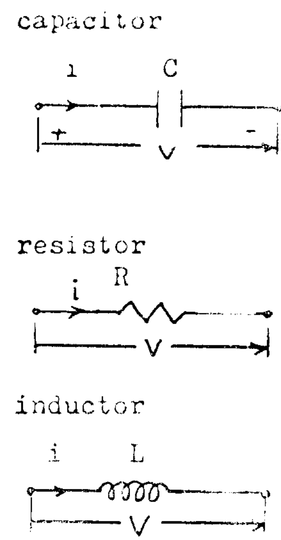
Impedance素子는 blocking force로 測定되기 때문에 억제된 힘에 依한 구속은 機械系의 特性反應에 영향을 주게된다. 따라서 같은 機械系 일지라도 觀察點의 位置와 數를 變化하면 impedance素子들의 값이 變化되므로 impedance가 달라지게 된다. 以上의 討論으로부터 mobility測定이 impedance測定에 比하여 不變性을 갖임을 알수있다. 機械系는 本質的으로 分布回路이므로 觀察點의 位置와 數에 不變하는 mobility의 測定이 바람직 하다고 할것이다.

3. 機械系의 完全한 Analogy

Analogy가 單只 各己다른 두 系의 微分方程式이 같은 形態를 갖는것으로만 定義된다면 電氣系와 機械系 사이에는 一意的인 analogy가 없는것 처럼 보인다. 그러나 完全한 analogy槪念을 주기 爲하여는 各己 다른 두 系가 같은 形態의 微分方程式을 갖는 外에 두 系의 對應回路가 같은 topology를 갖어야된다. 이는 機械系를 解析하고 設計하는 過程에서 機械系의 物理的 特性을 觀察하고 檢討하는데 있어서 便利할 뿐만 아니라 같은 topology를 갖는 두 系는 같은 種類의 變數 (across, through)를 갖게 되기 때문이다.

電氣系와 機械系 사이의 analogy에서 基本的인 關係를 表 1에 綜合해서 表示하였다.

表 1

System	Mechanical	Electrical	
		Mobility	Impedance
Variables	Force f Velocity u	Current i Voltage v	Voltage v Current i
Equilibrium	$\sum f = 0$	$\sum i = 0$	$\sum v = 0$
Network Elements			
Physical Relations	$f_k = \frac{1}{k}\int u\,dt$ $f_r = Du$ $f_m = m\frac{du_1}{dt}$ where $u=u_1-u_2$	$i_L = \frac{1}{L}\int v\,dt$ $i_R = Gv$ $i_C = C\frac{dv}{dt}$	$v_C = \frac{1}{C}\int i\,dt$ $v_R = Ri$ $v_L = L\frac{di}{dt}$
Immittances	Mobility M Impedance Z Blocking point $M=0$ Free point $Z=0$	Impedance Z Admittance Y Short cct. $Z=0$ Open cct. $Y=0$	Admittance Y Impedance Z Open cct. $Z=\infty$ Short cct. $Y=\infty$
Topology	Loop Node Series connection Parallel connection	Loop Node Series connection Parallel connection	Node Loop Parallel connection Series connection

3·1. 機械系의 運動方程式

線形振動理論에 의하면 多 自由度 機械振動系의 運動方程式은 Lagrange運動 方程式이나 Newton의 第二法則으로 부터 얻을수있다. 적은 振幅을 갖는 自由度가 n인 線形機械系의 運動方程式은 다음과 같이 行列式으로 쓸수가있다[9)10)].

$$M\ddot{X}+D\dot{X}+KX=F \qquad (8)$$

여기서 M,D,K는 機械系의 慣性, damping, 그리고 spring常數를 各各 나타내는 行列들이고 $\ddot{X},\dot{X},X$는 加速度, 速度및 變位를 나타내는 縱列 vector들이다.

正常狀態에서 (8)式은 다음과 같이 短縮된 形態로 쓸수있다.

$$GX=F \qquad (9)$$

行列 G의 素子 G_{ij}는

$$G_{ij}=M_{ij}p^2+D_{ij}p+K_{ij} \qquad (10)$$

여기서 p는 時間에 關한 微分記號이다. Laplace變換을 取하면 (9)式은

$$G(s)X(s)=F(s) \qquad (11)$$

로 表示된다. 여기서 初期條件이 零이라 假定하였다. (11)式의 힘과 變位 사이의 關係로부터 힘과 速度사이의 關係를 (4)式과 比較하면 이 機械系의 impedance는

$$Z(s)=G(s)/s \qquad (12)$$

機械系의 各質點(mass point)을 機械回路의 node로 생각할때 (8)式은 機械回路(mobility回路)의 node 方程式에 該當하며 (12)式으로 表示되는 機械系의 impedance는 電氣回路의 node admittance에 該當됨을 알수있다. 換言하면 機械系의 mobility는 電氣系의 impedance에 對應 되어야 하고 機械系의 impedance는 電氣系의 admittance에 對應되어야 한다. 그러나 機械系의 各 質點을 機械回路의 loop로 생각하면 兩系의 impedance가 서로 對應되고 mobility는 電氣系의 admittance에 對應된다.

3-2. 두 機械回路의 構成

機械系가 機械回路와 같은 topology를 갖기 爲하여는 機械系의 質點이 機械回路의 node에 對應하여야 된다.

이는 곧 機械系와 電氣系의 完全한 analogy가 되기 爲하여는 機械回路는 mobility回路가 되어야한다. 또한 MA는 힘—電流(through變數) 速度—電壓(across變數)와 같이 變數의 種類가 一致한다. 反面에 impedance回路는 機械系의 dual topology를 갖고 相異한 變數를 갖게된다.

Mobility回路는 機械系와 같은 topology를 갖기 때문에 恒常 無難히 얻을수 있으나 impedance回路는 機械系와 dual topology를 갖기 때문에 機械系의 graph가 planar일 경우에는 얻을수 있으나 nonplanar일 경우에는 回路構成이 不可能하다[8)].

한 例로서 그림 1(a)와 같은 自由度가 4인 機械系를 생각하여보자. mobility回路는 그림 1(b)와 같이 쉽게 求할수 있으나 그 graph가 그림 1(c)와 같은 基本 Kuratowski nonplanar[8)]이므로 이 機械系에 對應하는 impedance回路는 求할 길이 없다. 또한 dual回路는 branch(電氣系에서 2端子素子)로만 構成된 回路에 限해서 存在하므로 機械 transformer와 같이 入力과 出力 端子가 다른 素子(電氣系의 4端子素子)나 相互 spring[11)]을 包含하고 있는 機械系의 impedance回路 亦是 求할길이 없다.

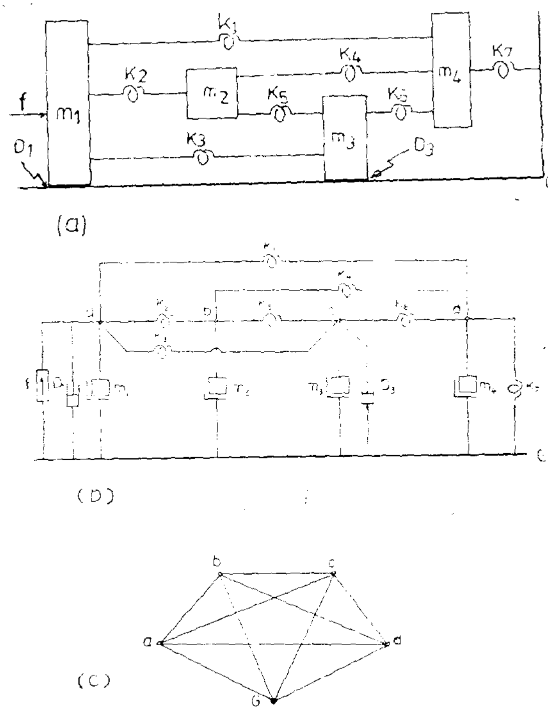


그림 1

4. 結 論

機械系와 電氣系 사이에는 두 analogy가 可能하고 이 두 analogy로부터 두 機械回路를 얻었다. 機械系의 運動方程式과 回路網理論을 根據로 mobility回路와 impedance回路를 比較檢討하여 다음과 같은 結果를 얻었다.

가. mobility回路

1. mobility와 impedance는 電氣系의 impedance와 admittance에 各各 對應한다.

2. 機械系와 같은 topology를 가지며 같은 種類의 變數를 갖는다(through-through)

3. 機械系에 對應하는 回路를 恒常 求할수있다.

나. impedance回路

1. mobility와 impedance는 電氣系의 admittance와 impedance에 各各 對應한다.

2. 機械系와 dual回路이며 다른種類의 變數를 갖는다(through-across).

3. 機械系의 graph가 nonplanar이든가 電氣系의 4端子素子에 對應하는 機械 素子(機械 transformer, 相互 spring等)를 包含하고 있을때는 回路는 求할길이 없다.

以上 두 機械回路의 比較와 2.2節에서 討論한 mobility의 不變性을 考慮할때 mobility回路가 더 自然스럽고 基本的인 機械回路라고 結論 지울수 있을 것이다.

參 考 文 獻

1. Olson, H.F., "Dynamic Analogies", second edition. D. Van Nostrand Co., Inc., 1958.
2. Cannon, H.H., "Dyanmics of Physical Systems", McGraw-Hill Book Co., 1967.
3. Harris, C.M., and Cred, C.E., ed., "Shock and Vibration Handbook", McGraw-Hill Book Co., 1961.
4. Messerle, H.K., "Dyanmic Circuit Theory", Pergamon Press, 1965.
5. Plunkett, J.E., ed., "Mechanical Impedance Methods for Mechanical Vibrations", 1958. ASME
6. Firestone, F.A., "A New Analogy between Mechanical and Electrical Systems", J. Acoust. Soc. Am. Vol.4, 1933.
7. Harman, W.W. and Lytle, D.W., "Electrical and Mechanical Networks", McGraw-Hill Book Co., 1962.
8. Chan, S.P., "Introductory Topological Aanlysis of Electrical Networks", Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.
9. Timoshenko, S., Young, D.H. and Weaver, W. Jr., "Vibration Problems in Engineering", fourth ed., John Wiley & Sons, 1974.
10. Bishop, R.E.D., "The Matrix Analysis of Vibration", Cambridge Univ. Press, 1965.
11. 李相培, "새로운 機械回路素子로서의 機械相互 Spring", 電氣學會誌 No.4, Vol.24, 1975.