

# 結合마이크로스트립의 特性解析 (Characteristics of Coupled Microstrip)

朴 麒 洙\*  
(Park, Kee Soo)

## 要 約

Silvester의 多重影像法을 利用하여 結合마이크로스트립 特히 非對稱 結合마이크로스트립의 特性을 解析하여 特性定數 및 스트립 導體上의 電荷分布를 求하였다.

## Abstract

The characteristics of coupled microstrip are analysed by Silvester's image method. Especially, characteristics parameters and charge distribution on each microstrip are newly obtained.

## 1. 序 論

結合마이크로스트립(coupled microstrip)은 마이크로 波集積回路(MIC)의 方向結合器, 濾波器等의 回路素子로서 널리 利用되고 있다. mm 波用 MIC와 같은 超小形回路에서는 하이브리드모우드에 의한 分散特性이 重要視되나 X 밴드 以下에서는 實用的으로 큰 問題가 되지 않기 때문에 보통 傳播모우드는 TEM 모우드에 限定된다고 假定한다. 한편 構造上 現在까지 使用되고 있는 結合마이크로스트립은 거의 對稱形에 限定되고 있으나 非對稱形인 結合스트립은 帶域特性 및 임피던스變換特性上의 利點을 가질것으로 期待되므로 筆者는 結合마이크로스트립 特히 非對稱形인 경우의 特性定數 및 스트립상의 電荷分布를 求하였다.

지금 單一마이크로스트립의 스트립 導體上의 點( $x_0, y_0$ )의 單位電荷에 의한 스트립상의 點( $x, y$ )의 電位 卽 Green 函數를  $G(x, y | x_0, y_0)$ 라고 하면, 스트립상의 電荷密度를  $\rho(x_0, y_0)$ 라고 할때 點( $x, y$ )의 電位  $\phi(x, y)$ 는

$$\phi(x, y) = \int \rho(x_0, y_0) G(x, y | x_0, y_0) dl \quad (1-1)$$

이다. 보통 스트립 導體의 電位가 주어지므로 Green 函數  $G(x, y | x_0, y_0)$ 를 求하면 이 積分方程式을 풀어서 스트립上의 電荷分布를 決定할 수 있다. 지금 스트립을 一定한 幅을 갖는 스트립으로 區分하고  $k$ 番째의 스트립幅을  $w_k$ 라고 한다. 이  $k$ 번째 스트립上의 點  $Q$ 의 電荷密度를  $\sigma(Q)$ ,  $Q$ 點에서의 微小線路幅을  $dQ$ 라고 하면 스트립上의 點  $P(x, y)$ 의 電位  $V(x, y)$ 는

$$V(x, y) = \sum_{k=1}^N \int w_k \sigma(Q) G(P, Q) dQ \quad (1-2)$$

로 表示된다. 여기서  $G(P, Q)$ 는  $Q$ 點에 놓여있는 單位電荷에 의한  $P$ 點의 電位를 表示하는 Green 函數이다.

스트립의 分割數  $N$ 를 充分히 크게하면 分割된 각 스트립의 電位  $V_k$ 는 分割된 스트립上의 電位の 平均值가 되며, 또한 分割스트립上의 電荷密度를 均一하다고 생각할 수 있다. 이때

$$V_k = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{w_k} \frac{1}{w_j} \int w_k \int w_j G(P, Q) dQ dP \right\} q_j \quad (1-3)$$

이다. 여기서  $q_j$ 는  $j$ 番째 分割스트립의 電荷이며 式(1-3)의 括弧內의 值를 電位係數  $P_{ik}$ 라고 하면

$$V_k = \sum_{j=1}^N P_{ik} q_j \quad (1-4)$$

가 된다. 行列形式으로 表示하면

$$[V] = [P][q] \quad (1-5)$$

이며

$$[q] = [P]^{-1}[V] \quad (1-6)$$

이다. 따라서 스트립 導體의 電位가 既知인 경우,  $P_{ik}$ 를 求하면 電荷分布를 求할 수 있다. 이때 스트립上의 單位길이當 電荷量  $Q$ 는

$$Q = \sum_{j=1}^N q_j \quad (1-7)$$

이며, 스트립 導體의 電位를 1로 하면 單位길이當 靜電容量  $C$ 는

$$C = Q = \sum_{j=1}^N q_j \quad (1-8)$$

이다. 基板의 誘電率은 空氣의 誘電率  $\epsilon_0$ 로 代置할때 容量을  $C_0$ 라고 하면 마이크로스트립의 位相速度  $v_p$  및

\* 正會員, 서울工大 電子工學科  
Dept. of Electronics Engineering, Seoul University  
接受日字: 1975年 3月 5日

特性 임피던스  $Z_0$ 는 각각

$$v_p = \sqrt{C_0/C} v_0 \quad (1-9)$$

$$Z_0 = 1/v_p C = 1/v_0 \sqrt{CC_0} \quad (1-10)$$

이다. 여기서  $v_0$ 는 自由空間內的 光速이며 基板의 等價比誘電率  $\epsilon_{eff}$ 는

$$\epsilon_{eff} = C/C_0 \quad (1-11)$$

定義된다.

## II. 單一 및 對稱 結合 마이크로스트립

### 2.1. 單一 마이크로스트립

Silvester는 多重影像法을 利用하여 單一 마이크로스트립의 特性을 解析하였다<sup>1)</sup>. 그림 1과 같이 一面을 接地한 두께  $H$ 인 誘電體基板上에 單一 스트립이 있는 경우 스트립上的 電荷分布은  $x=0$ 에 대하여 對稱이 되며 그림에서 A, C에 +1인 電荷가 있을때 스트립上的 點  $P(H, y)$ 의 電位  $V_p(H, y)$ 는

$$V_p(H, y) = \frac{1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_0)} \sum_{n=1}^{\infty} K^{n-1} \log \frac{[4n^2 H^2 + (y-h)^2][4n^2 H^2 + (y+h)^2]}{[4(n-1)^2 H^2 + (y-h)^2][4(n-1)^2 H^2 + (y+h)^2]} \quad (2-1)$$

이다. 여기서  $\epsilon_1$ 은 基板의 誘電率이며  $K = (\epsilon_0 - \epsilon_1) / (\epsilon_0 + \epsilon_1)$ 이다. 基板의 誘電率이  $\epsilon_0$ 인 경우에는 上式에서  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ 라 놓고  $n=1$ 인 項만을 취해야하며 이때

$$P \text{ 點의 電位 } V_{p_0}(H, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \log \frac{[4H^2 + (y-h)^2][4H^2 + (y+h)^2]}{(y-h)^2(y+h)^2} \quad (2-2)$$

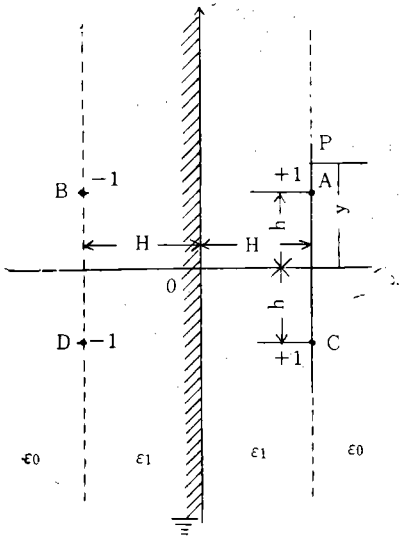


그림 1. 單一 마이크로스트립  
1. Single microstrip

이다. 만일 스트립을 同一幅  $w$ 로  $N$ 等分하고

$$y = \left(k - \frac{1}{2}\right)w, \quad h = \left(j - \frac{1}{2}\right)w \quad (2-3)$$

라고 하면 上式의  $V_p(H, y) V_{p_0}(H, y)$ 는 각각 基板의 誘電率이 각각  $\epsilon_1, \epsilon_0$ 일때의  $P_{ik}$ 를 表示한다. 여기서  $N$ 等分한 分割 스트립사이의 距離는 幾何學平均距離(GMD)를 使用해야한다. 이들  $P_{ik}$ 를 구하면 前述한 바와 같이 스트립의 特性定數  $Z_0, v_p, \epsilon_{eff}$  및 電荷分布을 구할수 있다.

### 2.2. 對稱 結合 마이크로스트립

上述한 方法을 利用하여 對稱 마이크로스트립의 特性定數를 구한다. 그림 2와 같은 結合 마이크로스트립에서, Even 모우드에서는  $x$ 軸에 대해서 電荷分布은 對稱이 되며, Odd 모우드에서는  $x$ 軸으로 부터 等距離에 있는 두點의 電荷는 크기가 같고 符號가 反對가 된다는 點을 유의하여 點  $P(H, y)$ 의 Even모우드 電位  $V_p^e(H, y)$ 를 구하면 그 結果는

$$V_p^e(H, y) = \frac{1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_0)} \sum_{n=1}^{\infty} K^{n-1} \log \frac{[4n^2 H^2 + (y-h)^2][4n^2 H^2 + (y+h)^2]}{[4(n-1)^2 H^2 + (y-h)^2][4(n-1)^2 H^2 + (y+h)^2]} \quad (2-4)$$

이며, A, C에 각각 +1, -1인 電荷가 있을때 點  $P(H, y)$ 의 Odd 모우드 電位  $V_p^o(H, y)$ 는

$$V_p^o(H, y) = -\frac{1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_0)} \sum_{n=1}^{\infty} K^{n-1} \log \frac{[4n^2 H^2 + (y-h)^2][4(n-1)H^2 + (y+h + \frac{s}{2})^2]}{[4(n-1)^2 H^2 + (y-h)^2][4n^2 H^2 + (y+h + \frac{s}{2})^2]} \quad (2-5)$$

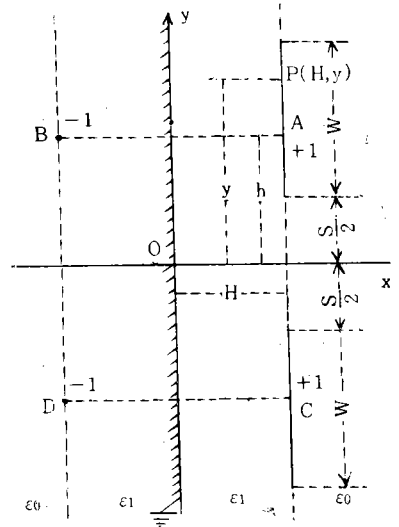


그림 2. 結合 마이크로스트립  
Fig. 2. Coupled microstrip

이다. 여기서  $s$ 는 스트립사이의 間隔이며 前述한 것과 같은 方法으로  $P_{jk}$  및 特性定數들을 구할 수 있다. 이 方法으로 구한 結果는 다른 方法으로 구한 結果들과 거의 一致하므로 여기서는 省略한다<sup>2)</sup>.

3. 非對稱 結合마이크로스트립

지금 그림 3과 같은 諸元을 갖는 非對稱 結合마이크로스트립의 Even 모우드를 考察한다. 이 경우 스트립上的 電位分布는 對稱性을 갖지 않으므로 스트립上的 1點  $P(H, y)$ 의 電位를 구하자면 스트립 1 및 2의 모든

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1,1} & \dots & P_{1,N} & P_{1,N+1} & \dots & P_{1,N+M} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{N,1} & \dots & P_{N,N} & P_{N,N+1} & \dots & P_{N,N+M} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{N+1,1} & \dots & P_{N+1,N} & P_{N+1,N+1} & \dots & P_{N+1,N+M} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{N+M,1} & \dots & P_{N+M,N} & P_{N+M,N+1} & \dots & P_{N+M,N+M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ q_{N+1} \\ \vdots \\ q_{N+M} \end{pmatrix} \quad (3-1)$$

여기서  $q_i$ 는  $i$ 番개의 區間스트립의 電荷量이다. 지금 스트립 1 및 2의 電荷量을 각각  $Q^e(1)$ ,  $Q^e(2)$ 라고 하면

$$Q^e(1) = Q^e = \sum_{i=1}^N q_i = \left[ \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N P_{ij}^{-1} \right) \right] V_1 + \left[ \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=N+1}^{N+M} P_{ij}^{-1} \right) \right] V_2 \quad (3-2)$$

$$Q^e(2) = Q^e = \sum_{i=N+1}^{N+M} q_i = \left[ \sum_{i=N+1}^{N+M} \left( \sum_{j=1}^N P_{ij}^{-1} \right) \right] V_1 + \left[ \sum_{i=N+1}^{N+M} \left( \sum_{j=N+1}^{N+M} P_{ij}^{-1} \right) \right] V_2$$

여기서  $P_{ij}^{-1}$ 은 식(2-17)의 電位係數行列의 逆行列의  $ij$ 要素를 表示한다. 지금

$$A = \left[ \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N P_{ij}^{-1} \right) \right] \quad B = \left[ \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=N+1}^{N+M} P_{ij}^{-1} \right) \right] \quad (3-3)$$

$$C = \left[ \sum_{i=N+1}^{N+M} \left( \sum_{j=1}^N P_{ij}^{-1} \right) \right] \quad D = \left[ \sum_{i=N+1}^{N+M} \left( \sum_{j=N+1}^{N+M} P_{ij}^{-1} \right) \right]$$

라고 하면 Even 모우드의 스트립 1, 2의 靜電容量  $C^e$

(1), 및  $C^e(2)$ 는 다음과 같다.

$$C^e(1) = \frac{Q^e(1)}{V_1} = \frac{AD - BC}{D - B}$$

表(Table).

	$W_1=0.3H, W_2=0.2H$					$W_1=1.0H, W_2=2H/3$					備 考
	$S/W_1=2/15$	1/3	2/3	1	5/3	$S/W_1=2/15$	1/3	2/3	1	5/3	
$Z_{oe}(1)$	129.08	123.76	117.09	112.01	104.64	70.11	65.84	61.13	58.14	54.86	Ohm
$Z_{oo}(1)$	29.73	97.14	45.05	50.63	58.41	27.93	34.04	39.73	43.05	46.55	Ohm
$v_{pe}(1)$	1.219	1.215	1.210	1.206	1.201	1.157	1.151	1.146	1.146	1.153	$\times 3 \times 10^8$ m/s.
$v_{po}(1)$	1.317	1.316	1.314	1.313	1.309	1.300	1.298	1.280	1.270	1.251	$\times 3 \times 10^8$ m/s.
$\epsilon^e(1)$	6.055	6.093	6.143	6.182	6.237	6.727	6.796	6.849	6.850	6.775	比誘電率
$\epsilon^o(1)$	5.191	5.197	5.209	5.222	5.251	5.329	5.392	5.489	5.583	5.749	"
$Z_{oe}(2)$	137.33	133.11	127.16	122.40	115.31	78.61	75.36	71.24	68.46	65.28	Ohm
$Z_{oo}(2)$	37.95	46.46	55.09	60.98	69.04	36.36	43.49	49.76	53.29	56.91	Ohm
$v_{pe}(2)$	1.225	1.222	1.219	1.216	1.212	1.174	1.171	1.169	1.170	1.176	$\times 3 \times 10^8$ m/s.
$v_{po}(2)$	1.318	1.317	1.315	1.314	1.311	1.305	1.298	1.287	1.278	1.261	$\times 3 \times 10^8$ m/s.
$\epsilon^e(2)$	5.998	6.023	6.060	6.089	6.130	6.534	6.566	6.588	6.578	6.508	比誘電率
$\epsilon^o(2)$	5.185	5.191	5.201	5.213	5.239	5.283	5.341	5.431	5.514	5.657	"

分割된 스트립에 의한 電位를 重置하여야 한다. 지금  $W_1$ 을  $N$ 等分,  $W_2$ 를  $M$ 等分한다. 이때 모든 區間の 幅을 同一하게 취하고,  $W_1$ 의 一端부터  $W_2$ 의 他端에 이르기까지 一連番號를 부친다. 即 스트립 1의 區間스트립의 番號를 1~ $N$ 까지, 스트립 2의 그것을  $(N+1)$ ~ $(N+M)$ 까지로 한다. 區間  $k$ 의 單位電荷에 의한  $j$ 區間的 電位 即 電位係數를  $P_{jk}$ 라고 한다. Even 모우드에 있어서는 두 스트립의 電荷量은 同一하며, 두 스트립의 電位를 각각  $V_1, V_2$ 라고 하면

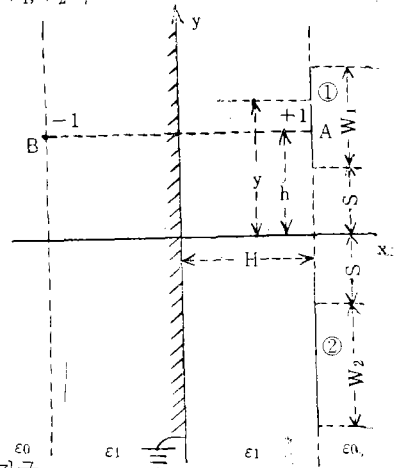


그림 3. 非對稱 結合마이크로스트립

Fig 3. Asymmetrical coupled microstrip.

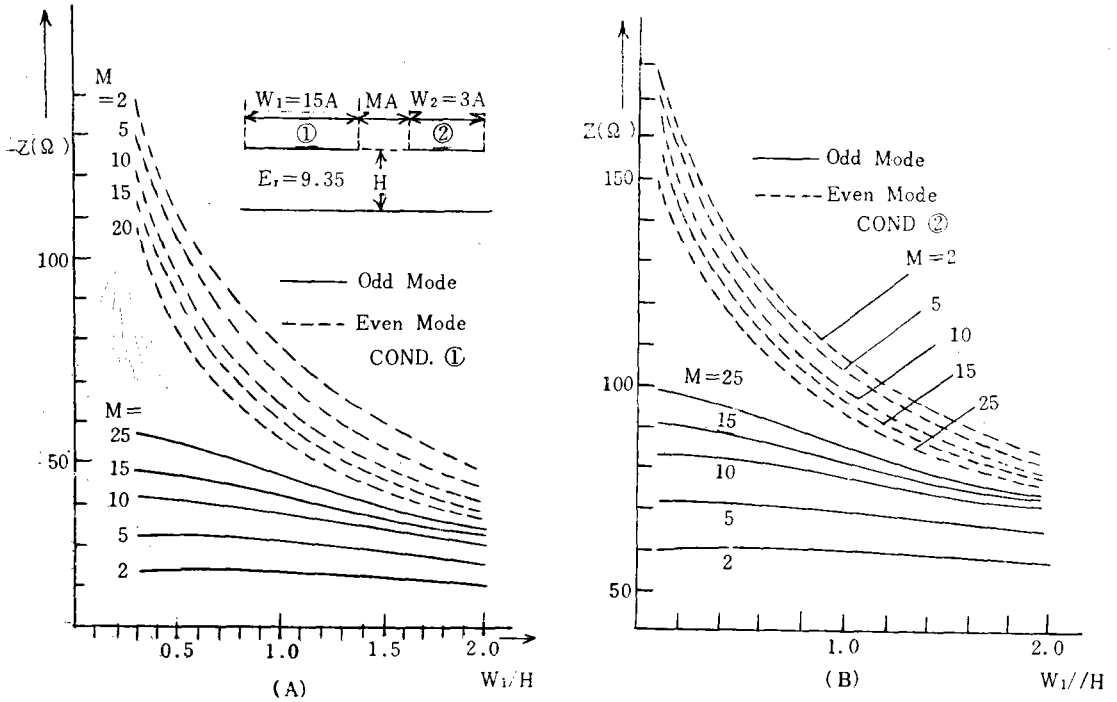


그림 4. 非對稱 結合마이크로스트립의 特性임피던스 (A) 스트립導體 1, (B) 스트립導體 2.  
 Fig 4. Even and Odd impedance of asymmetrical microstrip (A) conductor 1, (B) conductor 2.

$$C^{\circ}(2) = \frac{Q^{\circ}(2)}{V_2} = \frac{AD-BC}{A-C} \quad (3-4)$$

한편 Odd 모드에서는  $Q^{\circ}(1) = -Q^{\circ}(2) = Q^{\circ}$  인 관계가 성립하며, Odd 모드의 靜電容量  $C^{\circ}(1)$ ,  $C^{\circ}(2)$ 는 다음과 같아진다.

$$C^{\circ}(1) = \frac{Q^{\circ}(1)}{V_1} = \frac{AD-BC}{D+B}$$

$$C^{\circ}(2) = \frac{Q^{\circ}(2)}{V_2} = \frac{AD-BC}{A+C} \quad (3-5)$$

基板의 誘電率을  $\epsilon_r$ 로 할때의 靜電容量  $C_s^{\circ}(1)$ ,  $C_s^{\circ}(2)$  등은 위와같은 方法으로 구할 수 있으며 이들을 利用하여 特性임피던스를 구할 수 있다. 卽

$$Z_{0e}(1) = \frac{1}{v \sqrt{C^{\circ}(1) C_s^{\circ}(1)}}$$

$$Z_{0e}(2) = \frac{1}{v \sqrt{C^{\circ}(2) C_s^{\circ}(2)}}$$

$$Z_{0o}(1) = \frac{1}{v \sqrt{C^{\circ}(1) C_s^{\circ}(1)}}$$

$$Z_{0o}(2) = \frac{1}{v \sqrt{C^{\circ}(2) C_s^{\circ}(2)}} \quad (3-6)$$

計算例로  $W_1 = 0.3H$ ,  $W_2 = 0.2H$  및  $W_1 = 1.0H$ ,  $W_2 = \frac{2}{3}H$  인 두가지 경우, 스트립사이의 間隔의 變化에

따르는 特性定數의 變化는 表와 같으며  $W_1 = 0.5H$ ,  $W_1 = 3W_2$ ,  $S = 0.4W_2$  일때의 각 스트립의 特性임피던스 및 電荷分布를 圖示하면 그림 4 및 5와 같다.

그림에서 보는바와 같이, Even 및 Odd 모드 特性임피던스는 對稱形의 경우와는 다르다. 그림 4(B)를 보면 幅이 좁은 스트립의 Odd 모드 임피던스는 스

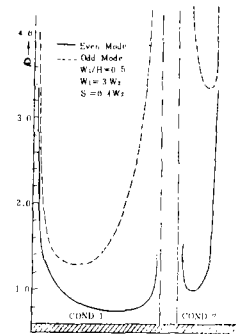


그림 5. 非對稱 結合마이크로스트립의 電荷分布  
 Fig 5. Charge distribution on asymmetrical coupled microstrip

트립의 幅의 變化에 따르는 變化가 매우 작으며, 스트립 사이의 間隔이 좁을수록 이러한 性質은 더욱 뚜렷하다. 이것은 그림 5에서 보는 바와 같이 좁은 스트립에서는 Odd 모우드의 電荷密度가 Even 모우드의 그것에 비해서 훨씬 커지므로 스트립의 幅이 變化해도 電荷分布에 큰 影響을 주지 못하기 때문인 것으로 생각할 수 있다.

### 3. 結 論

本 論文에서는 非對稱 結合 마이크로스트립의 特性定數 및 스트립 導體上的 電荷分布을 구하였다. 이 資料는 非對稱 마이크로스트립 方向結合器, 濾波器 등의 設計資料로 有用할 것이다.

### 參 考 文 獻

1. P. Silvester: "TEM wave properties of microstrip transmission lines" Proc. IEE vol. 115, pp.43-48, Jan. 1968.
2. T.S.Bryant & J.A.Weiss: Parameters of microstrip transmission lines and of coupled pairs of microstrip lines" IEEE Trans. Vol. MTT-16, No.12, pp. 1021-1027, Dec. 1968.
3. S.V. Judd Ian Whiteley: "An analytical method for calculation fo microstrip transmission line parameters" IEEE Trans. Vol. MTT-18, No. 2 pp. 78-87, Feb. 1970