◎技術解說

Multivariable Function과 그의 合成에 있어서의 問題點

金 炯 甲*

—차 례—

1. 序 論
2. Multivariable Positive Real Function
3. Decomposition
4. Cascade Realizations
5. Multivariable Positive Real Matrix과 그의 合成
6. 問題點
7. 結 論

1. 序 論

어떤 System을 函數로서 나타낼 때 Linearity, Time-invariance, Lumpedness等의 假定下에서는 Single-variable Rational Function이 되어 그의 分析 操作 合成 等이 比較的 容易하다. 그런데 위에 假定한 Constraints를 하나씩 弛緩시켜 주면 便利한 여러 가지 Transformation이 許容되지 않거나 無理函數가 되어 取扱하기 어려워진다. 約 15年前에 소개된 Multivariable Function 槪念은 이러한 難關에서 벗어나기 爲한 有力한 利器이다.

當初에는 Constant Parameter와 Linearly Variable Parameter(Variable Capacitance, Variable Conductance等)를 包含한 System을 Two-Variable Function으로 나타낼 수 있다는 것을 發表하여 注目을 끌었는데 數年後에는 이 理論이 Lumped Elements와 Distributed Elements를 갖인 System을 分析 合成하는데 適合하다는 것이 指適되어 興味를 갖이고 있던 學者들의 關心을 더욱 깊게 해 주었다. Microwave Filter Design에 있어서 Distributed Element, 即 Line Element만 쓸 것이 아니라 Lumped Lossless Two-Port를 插入하면 有利하다 하여 그 方面에의 適用을 爲한 硏究가 活潑하게 展開되었다. 近來에는 Image Processing, Seismic, Magnetic Data Processing에 Potential Application을 豫見하고 Multidimensional Filtering, 그리고 Multivariable Realizability Theory는 계속 硏究의 對象이 되고 있다. 開發速度는 느린 便인데 그 理由는 다음에 言及하겠지만 이 問題가 次元이 다른 內質的으로 어려운 要素를 包含하고 있기 때문이라 하겠다.

* Professor of Electrical Engineering, University of Manitoba, Canada.
韓國科學院 招聘 敎授(工博)

2. Multivariable Positive Real Function

위선 Multivariable Function의 定義를 Single Variable Function의 그것과 比較해 보기로 한다.

Single Variable로 나타낼 수 있는 System의 Transfer Function이 주어질 때 實際는 Driving-point Function을 誘導하여 그에 起因하여 合成을 하는 수가 많다. Cauer의 Ladder Development나 Darlington의 Insertion Loss Theory等이 좋은 例인데 Positive Real Function이라는 鮮明하고 아름다운 Concept를 利用하려는 것이다. Multivariable Function合成의 경우도 同一한 理由로 Positive Reality로 시작하므로 그의 定義를 Single Variable의 경우와 對應시켜 해보기로 하자.

Definition 1.

Single Variable Function $F(s)$이 아래의 條件을 滿足시킬 때 Positive Real Function이라 한다. (a). s가 實數일 때 $F(s)$도 實數가 된다. (b). $F(s)$가 $\mathrm{Re}\ s>0$인 Domain에서 Analytic하고 또 $F(s)$의 實數部 即 $\mathrm{Re}\ F(s)$는 Nonnegative이다.

Definition 2.

Multivariable Function $F(p_1, p_2, \cdots, p_m)$이 아래 條件을 滿足시킬 때 Positive Real라 한다. (a). $p_1, p_2, \cdots, p_m$이 實數일 때 F도 實數가 된다. (b). F가 $\mathrm{Re}\ p_1>0$, $\mathrm{Re}\ p_2>0$, $\cdots$, $\mathrm{Re}\ p_m>0$ Domain에서 Analytic하고 Re F가 Nonnegative이다.

表面上으로는 위의 두 定義가 大同小異인데 事實上으로는 定義 2의 (b)를 Test하는 것은 거의 不可能한 일이다. 뿐만 아니라 더 顯著하게 다른 點은 Single Variable의 경우는 위 定義 1이 合成에 關한 必要하고 充分한 條件이 되며 또 어떠한 合成, 例를 들어 Brune方式이 可能하다는 것은 同時에 他方式 即 Bott-Duffin이나 Cascade方式도 可能하다는 것을 意味하는데 反해 Multivariable의 경우는 定義 2가 充足되드라

도 合成이 保障되지 않을 뿐더러 合成이 可能한 경우라도 回路網의 構造에 따라 函數의 構造에 課해지는 制約이 아주 嚴하다. 이러한 難調에 逢着했을 때 어떠한 制約下에서 어떠한 合成이 可能한가를 탐색하는 것은 自然스러운 일이고 또 窮極에 가서 General Method가 存在한다면 그것을 追求하는 努力이기도 하다. 아래에 몇가지 方式을 소개해 보기로 한다.

3. Decomposition

合成이란 結局 주어진 函數의 Complexity를 Realizability 限度內에서 減少시키는 過程이라고 볼 수 있다. 그러한 見地에서 展開된 Theorem과 Corollary로서 아래와 같은 것이 있다.

Theorem 1

Let $Z(\underline{p})$ be a multivariable positive real(m.p.r.) function of a set of complex variables $\underline{p}=(p_1, p_2, \cdots\cdots p_m)$. Then $Z(\underline{p})$ can be decomposed as

$$Z(\underline{p})=Z_1(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_l)+Z_2(p_{l+1}, p_{l+2}, \cdots\cdots, p_m), \quad l<m \qquad (1)$$

where $Z_1(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_l)$ is m.p.r. in $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_l$ and $Z_2'(p_{l+1}, p_{l+2}, \cdots\cdots p_m)$ is m.p.r. in $p_{l+1}, p_{l+2}, \cdots\cdots, p_m$, if and only if

$$Z(\underline{p})\text{-}Z(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_l, 1, 1, \cdots\cdots, 1) \qquad (2)$$

is not a function of $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_l$.

Corollary 1

A necessary and sufficient condition for an m.p.r. function $Z(\underline{p})$ to be decomposed as

$$Z(\underline{p})=\sum_{i=1}^{m} Z_i(p_i),$$

where $Z_i(p_i)$ is a single variable p.r. function in p_i, is that

$$Z(\underline{p})\ Z(1, \cdots\cdots, 1, p_i, 1, \cdots\cdots, 1)$$

is not a function of p_i, for $i=1, 2, \cdots\cdots m\text{-}1$.

Theorem 2

A necessary and sufficient condition for a multivable reactance function

$$Z(\underline{p})=\frac{N(\underline{p})}{D(\underline{p})}$$

to be decomposed as:

$$Z(\underline{p})=\sum_{i=1}^{m} Z_i(p_i),$$

(i) If $d_i(p_i)$ does not vanish at the origin, then $Z_i(p_i)=Z(0. \cdots\cdots, 0, p_i, 0, \cdots\cdots 0)$.

(ii) If $d_i(p_i)$ vanishes at the origin, defining a new function

$$\hat{Z}(\underline{p})=Z(\underline{p})-\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{p_i},$$

where A_i is the residue of $Z(\underline{p})$ at $p_i=0$, then

$$Z_i(p_i)=\hat{Z}(0, \cdots\cdots, 0, p_i, 0, \cdots\cdots, 0)+\frac{A_i}{p_i}$$

Examples

1. An illustrative example 1 for Theorem 1

Consider the following m.p.r. function in $\underline{p}=(p_1, p_2, p_3, p_4)$

$$Z(\underline{p})=\frac{p_1p_2p_3p_4+p_1p_3p_4+3p_1p_2p_3+2p_1p_2+p_3p_4+2p_1+3p_3+2}{(p_1p_2+1)\ (p_3p_4+2)}$$

It is observed that

$$Z(\underline{p})-Z(p_1, p_2, 1, 1)=\frac{3p_3-p_3p_4-2}{p_3p_4+2}$$

is not a function of p_1 and p_2, therefore, it follows from Theorem 1 that $Z(\underline{p})$ can be decomposed as

$$Z(\underline{p})=Z_1(p_1, p_2)+Z_2p_3, p_4)$$

$$Z_1(p_1, p_2)=Z(p_1, p_2, 1, 1)-\min_{\omega_1, \omega_2} \text{Re}\ Z(j\omega_1, j\omega_2, 1, 1) =\frac{p_1}{p_1p_2+1}$$

Hence the desired decomposition is

$$Z(\bar{d})=\frac{p_1}{p_1p_2+1}+\frac{p_3p_4+3p_3+2}{p_3p_4+2}.$$

2. An illustrative example 2 for Theorem 2

It is desired to determine whether the following multivariable reactance function in $\underline{p}=(p_1, p_2, p_3)$

$$Z(\underline{p})=\frac{N(\underline{p})}{D(\underline{p})}=\frac{5p_1^2p_2^2p_3+p_2^2p_1+p_1^2p_2+20p_2^2p_3+30p_1^2p_3+6p_1+4p_2+120p_3}{p_1^2p_2^2+4p_2^2+6p_1^2+24}$$

cam be decomposed as a sum of single variable reactance functions. $D(\underline{p})$ is factorable as a product of single variable polynomials as

$$D(\underline{p})=(p_2^2+6)p_1^2+4p_2^2+24 =(p_2^2+6)(p_1^2+4),$$

and hence using Theorem 2 the given function is decomposed as follows

$$Z_1(p_1)=Z(p_1, 0, 0)=\frac{p_1}{p_1^2+4}$$

$$Z_2(p_2)=Z(0, p_2, 0)=\frac{p_2}{p_2^2+6}$$

$$Z_3(p_3)=Z(0, 0, p_3)=5p_3$$

$$Z(\underline{p})=\frac{p_1}{p_1^2+4}+\frac{p_2}{p_2^2+6}+5p_3.$$

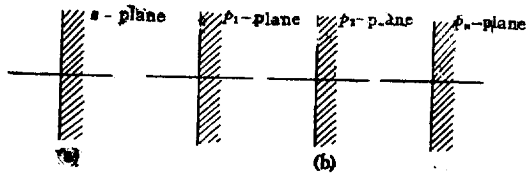

Fig. 1. (a) The domain (shaded area) of the Definition 1.
(b) The domains of Definition 2.

4. Cascade Realizations

A. Commensurate Line이 들어 있는 경우

Multivariable Function 理論을 應用한 대표적인 것의 하나로 Cascade realization을 들 수 있다. Fig. 1에서 lumped two-ports와 一方 delay가 같은 Commensurate lines이 Cascade로 되어 있으므로 驅動點函數가 irrational인데. 普通 쓰이는 Complex frequency Variable를 s로 하고 $e^{-2\tau s}=p$로 놓으면 驅動點函數는 Rational function이 된다.

$$Z(s,p)=\frac{b_o(s)+b_1(s)p+\cdots\cdots+b_n(s)p^n}{a_0(s)+a_1(s)p+\cdots\cdots+a_n(s)p^n}=\frac{M(s,p)}{N(s,p)}$$

Cascade structure이기 때문에 M과 N 사이에 Even Part Constraint

$$M(s,p)N_*(s,p)+M_*(s,p)N(s,p)=C(s)$$

가 成立되어야 한다. $N_*(s.p)\equiv N(\text{-}s,\text{-}p)$이고 s만의 函數인 $C(s)$는 $C(ji)\geq 0$ for $-\infty\leq\omega\infty$과는 條件을 滿足시킨다.

Theorem 1.

(i) Fig. 2에 있는 r個의 line을 갖인 Cascade 回路의 驅動點函數는 항상 아래와 같은 irreducible form을 갖는다.

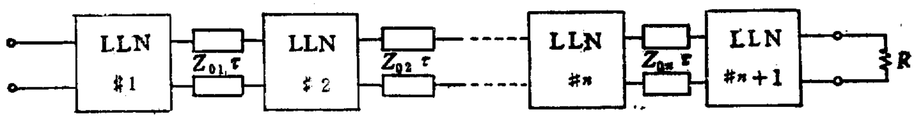

Fig. 2. Resistor-terminated cascade of lumped lossless 2-ports and commensurate TEM lines all having the same one-way delay

$$Z(s,p)=\frac{b_o(s)+b_1(s)p+\cdots\cdots+b_n(s)p^n}{a_o(s)+a_1(s)p+\cdots\cdots+a_n(s)p^n}=\frac{M(s,p)}{N(s,p)}$$

여기서 $p=e^{-2\tau s}$, $n\leq r$

(ii) $Z(s,p)$는 Two-variable Positive Real Function 이다.

(iii) $M(s,p)N_*(s,p)+M_*(s,p)N(s,p)=C(p)$이고 $C(p)$는 Even Polynomial. 即

$C(p)=C_*(p)$이고

$C(jw)\geq 0 \qquad -\infty<\omega<\infty$

(iv) Lower Triangular Matrices

$$A_r(s)=\begin{bmatrix} a_0(s) & & \\ a_1(s) & a_o(s) & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_r(s) & a_{r-1}(s)\cdots\cdots & a_o(s)\end{bmatrix}$$

$$B_r(s)=\begin{bmatrix} b_o(s) & & \\ b_1(s) & b_o(s) & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ b_r(s) & b_{r-1}(s)\cdots\cdots & b_o(s)\end{bmatrix}$$

를 構築하여 parahermitian matrix

$$K(s)=\frac{A_{n-1}(s)B_{n-1}{}^*(s)+B_{n-1}(s)A_{n-1}{}^*(s)}{2}$$

를 求했을 때 이것이 아래와 같이 factorizable할 뿐더러 $L(s)$는 lower triangular minimum phase matrix 이다.

$$K(s)=L(s)\ L_*(s)$$

$$|L(s)|\neq 0.\ Re\ s>0_0$$

위의 4가지 條件을 滿足시킬 때 Two variable positive real function $Z(s,p)$는 Fig. 2의 Cascade型으로 合成할 수 있다는 것이다.

B. Noncommsurate Line이 들어 있는 경우

여기서는 더 普遍的인 경우를 생각해 보기로 한다. 그렇게 어려운 Multivariable positlve Reality 代身에 Algorithmic한 方法을 展開하여 훨씬 簡單한 合成方法을 探求해 보기로 한다.

Theorem 2.

A multivariable Function $Z(s,p)$, $p=p_1,p_2,\cdots\cdots p_m$, 이 Fig. 3의 Cascade 回路로 合成되려면

(i) 이 函數가 a set $p=(p_1,p_2,p_3,\cdots\cdots p_m)$ 속의 各變數와 bilinear한 關係를 갖는다.

(ii) $Z(s,p)+Z_*(s,p)\neq 0$, 그리고 $p_i=1$ $i=1,2,\cdots\cdots m$,에서 零이 된다.

(iii) $Z(s,p)$가 multivariable Positive Real Function 이다.

위의 條件을 훨씬 부드럽게 하고 또 合成에 關한 algorithm를 提供하는 것이 아래와 같은 theorem이다.

Theorem 3.

$Z(s,p)$가 $p=p_1,p_2,\cdots\cdots p_m$의 各變數와 bilinear한 關係가 있고 또 아래의 條件이 滿足될 때 Fig. 3과 같은

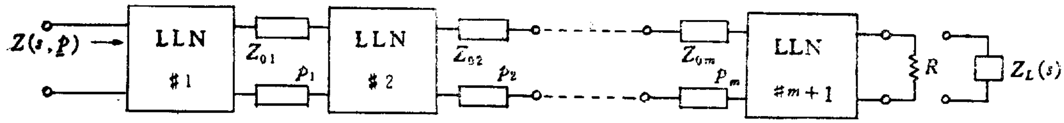

Fig. 3. A resistively terminated cascade of m noncommensurate transmission lines separated by lumped lossless two-ports.

Cascade 回路로서 合成할 수 있다.

(i) $Z[s,(p)^{i}{}_{1,2,\cdots i-1}]=-Z_*[s,(p)^{i}{}_{1,2,\cdots i-1}]=\dfrac{n_i(p)}{d_i(p)}$

$(p)^{i,j\cdots}_{k,l\cdots}$ 는 $p_i=p_j\cdots\cdots=1$, $p_k=p_l=\cdots=0$를 意味한다.

(ii) $\dfrac{h_i}{g_i}=\dfrac{(d_{i-1}+d^*_{i-1})n_i-(n_{i-1}-n^*_{i-1})d_i}{-(d_{i-1}-d^*_{i-1})n_i+(n_{i-1}+n^*_{i-1})d_i}$

가 $i=1,2,\cdots\cdots,m+1$에서 positive real하다.

$n_o=d_o=1$이고 $\dfrac{n_{m+1}}{d_{m+1}}=Z[s,(p)_{1,2,\cdots m}]$이다.

Characteristic impedance는

$$Z_{ok}=\prod_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{\beta_i}\quad \text{for}\quad k=1,2,\cdots\cdots,m$$

$$\alpha_i=\begin{cases}h_i(0) & \text{if } h_i(0)\neq 0\\ 1 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\beta_i=\begin{cases}g_i(0) & \text{if } g_i(0)\neq 0\\ 1 & \text{otherwise}\end{cases}$$

Lumped Two-ports를 爲한 Chain matrices는

$$[T]_k=\frac{1}{F_k}\begin{bmatrix}A_k & B_k\\ C_k & D_k\end{bmatrix}$$

$$A_k=(h_k+h_k^*)/\alpha_k$$

$$B_k=\prod_{i=1}^{k-1}\frac{\alpha_i}{\beta_i}(h_k-h_k^*)$$

$$C_k=\prod_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{\alpha_i}(g_k-g_k^*)/\alpha_k$$

$$D_k=(g_k+g_k^*)/\beta_k$$

$$FF^*=A_kD_k-C_kB_k$$

Termination은 $Z_L=Z_{om}\dfrac{h_{m+1}}{g_{m+1}}$으로 表示된다.

Illustrative Example 3

$$Z(s,p)=\frac{N(s,p)}{D(s,p)}$$

where $N(s,p)=(9p_1p_3+6p_1p_2)s^4$
$+(11p_1p_2p_3+9p_1p_3+6p_1p_2+9p_1+12p_2$
$+18p_3)s^3$
$+(9p_1p_2p_3+29p_1p_3+21p_1p_2+20p_2p_3+9p_1$
$+6p_2+9p_3+15)s^2$
$+(11p_1p_2p_3+20p_1p_3+15p_1p_2+9p_2p_3$
$+12p_1+27p_2+38p_3+6)s$
$+(18p_1p_3+12p_1p_2+4p_2p_3+6p_1+12p_2$
$+18p_3+6)$

$D(s,p)=(18p_1p_2p_3+12p_1)s^4$
$+(18p_1p_2p_3+12p_1p_2+36p_2p_3+13p_1p_3$
$+12p_1+24)s^3$
$+(25p_1p_2p_3+13p_1p_3+12p_1p_2+18p_2p_3$
$+21p_1+18p_2+22p_3+12)s^2$
$+(9p_1p_2p_3+9p_1p_2+11p_1p_3+20p_2p_3+9p_1$
$+6p_2+9p_3+15)s$
$+(7p_1p_2p_3+3p_1p_2+9p_2p_3+2p_1p_3+6p_1$
$+3p_2+2p_3+6)$

Extraction order를 決定하기 爲하여

$$Z[s,(p)^{1,2,3}]=\frac{s^2+s+2}{2s^2+s+1}$$

$$Z[s,(p)^{1}_{2,3}]=\frac{3s^2+2s+2}{4s^3+4s^2+3s+2}$$

$$Z[s,(p)^{1}_{2,3}]=\frac{s^2+s+2}{2s^2+s+1}$$

$$Z[s,(p)^{3}_{1,2}]=\frac{3s^2+2s+6}{4s^2+3s+2}$$

$Z[s,(p)^{2}_{1,3}]=Z[s,(p)^{1,2,3}]$이기 때문에 첫번째 Extract하는 line은 p_2이다.

그리고 $Z[s,(p)^{1}_{3,2}]=\dfrac{3s^2+2s+6}{4s^2+3s+2}=Z[s,(p)^{3}{}_{2,1}]$

이어서 두번째 Extract하는 line은 p_3이고 p_1이 그를 따른다. Realization을 爲하여 아래와 같은 것을 求한다.

$$Z[s,(p)^2]=-Z^*[s,(p)^2]=\frac{n_1}{d_1}=\frac{s^2+s+2}{2s^2+s+1}$$

$$Z[s,(p)^3{}_2]=-Z^*[s,(p)^3{}_2]=\frac{n_2}{d_2}=\frac{3s^2+2s+6}{4s^2+3s+2}$$

$$Z[s,(p)^{1}{}_{2,3}]=-Z^*[s,(p)^{1}{}_{2,3}]=\frac{n_3}{d_3}=\frac{3s^2+2s+2}{4s^3+4s^2+3s+2}$$

$$\frac{h_1}{g_1}=\frac{s^2+s+2}{2s^2+s+1},\quad \frac{h_2}{g_2}=\frac{3}{2},\quad \frac{h_3}{g_3}=\frac{1}{3s+3},$$

$$\frac{h_4}{g_4}=\frac{1}{s+1}$$

$Z_{02}=2,\quad Z_{03}=3,\quad Z_{01}=1,$

$$[T]_1=\frac{1}{s^2+1}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}s^2+1 & s\\ \frac{1}{2}s & 2s^2+1\end{bmatrix},\quad [T]_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$[T]^3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ s & 1\end{bmatrix},$$

그리고 $Z_L=\dfrac{1}{s+1}$이다.

合成된 回路가 Fig. 4이다.

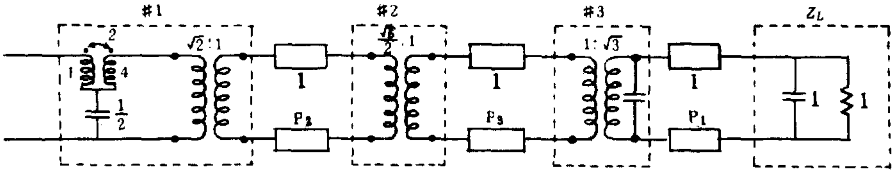

Fig. 4. A realization of the example 3.

5. Multivariable Positive Real Matrix 와 그의 合成

對稱이건 非對稱이건 間에 그의 Order가 (n×n)인 Multivariable positive real matrix가 multivariable n-port로 合成될 수 있다.

Definition 1. Square matrix $W(s)$가 아래와 같은 條件을 滿足시킬 때 Positive real matrix라 한다.

(i) 右半面에서 analytic하다.

(ii) 虛數軸上의 pole는 單 pole이고 pole의 residue로 構成된 各 matrix는 nonnegative Hermitian 이다.

(iii) $W+W_*$가 虛軸上에서 nonnegative Hermitian 이다.

Definition 2. Square matrix $W(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_m)$가 아래와 같은 條件을 滿足시킬 때 Multivariable Positive real matrix라 한다.

W 안에 있는 各變數를 rational reactance function으로 代置할 때, 即 $p_i=f_i(s)$, $1\leq i\leq m$,로 할 때 W가 s에 關한 Single variable positive matrix로 化한다.

Theorem 1.

$W(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_m)$를 $(n\times n)$ reactance matrix라 할 때

$$W=W_{11}-W_{12}(W_{22}+P_mI)^{-1}W_{21}$$

으로 分解할 수 있고 W_1을

$$W_1=W_1(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_{m-1})=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} m & s \end{array} & \\ \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} m \\ s \end{array} \end{array}$$

로 表記할 때 W가 Fig. 5처럼 合成된다.

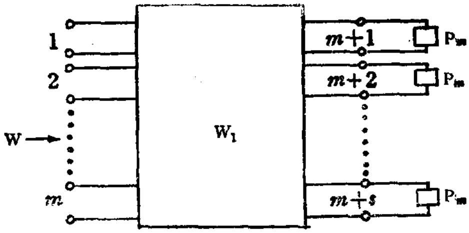

Fig 5. The realization of Win terms of W_1.

이 Theorem의 要點은 W_1의 變數는 W의 그것보다 하나 적다는 것이다. 即 이 減縮節次를 $(m-1)$번 반복하면 $W_{m-1}=W_{m-1}(p_1)$인 single variable function으로 되어 W의 合成을 完了하는 셈이다.

Theorem 2.

$W(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_m)$를 $(n\times n)$ positive real matrix라 할 때 아래와 같은 變數가 하나 增加한 multivariable reactance function W_1을 誘導할 수 있다.

$$W_1=W_1(p_1, p_2, \cdots\cdots p_m, p_{m+1})$$

W_1의 合成은 Theorem 1에 따르면 되는 것이다.

6. 問 題 點

A. 數學的인 것

Theory of polynomials of several variables, 特히 Decomposability, Separability, Reducibility等이 充分한 開發이 되어 있지 않다.

B. Incompatibility

Single variable의 경우 完全히 General한 것이 multivariable에서는 particular한 것으로 退化한다.

C. Approximation

어떠한 Specification과 쓸 수 있는 素子가 定해졌을 때 數個의 variable를 갖인 realizable function을 찾아내는 것, 誤差를 minimize하는 것等 아주 重要한 問題가 크게 開發되지 못한 狀態에 있다.

7. 結　　論

대한전기학회로부터 技術解說에 관한 내용의 原稿를 依賴받고 주저했으나 結局은 着手하기로 했다. Multivariable function 理論이 開花하면 應用面에 있어 豫測하기 어려울만큼 큰 將來가 約束된다고 믿어져 執筆을 했는데 내 自身의 깊은 硏究가 不足한데다가 時間의 制約까지 받게 되어 組織, 表現等이 粗野하고, 一貫性을 缺한 感이 있다. 英文을 그대로 실은 대목도 있고 紙面節約上 證明은 省略했다. 補完이 될까 생각되어 代表的인 論文들을 參考로 添付한다. 큰 開發이 要求되는 이 分野에 우리 나라에서도 關心을 갖는 분이 많이 생겨 提起된 問題 解決에 貢獻 있기를 바라면서 이 글을 맺는다.

Multivariable Functions

Reference

(A) General

1. H. Ozaki and T. Kasami "Positive real func-

tions of several variables and their applications to variable networks," IRE Trans. on Circuit Theory, pp.251~260, Sept· 1960.

2. T. Koga, "Synthesis of finite passive n-ports with prescribed Two-variable reactance matrices," IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-13, pp.31~52, Mar. 1966.
3. T. Koga, "Synthesis of finite passive n-ports with prescribed positive real matrices of several variables," IEEE Trans. Circuit Theory Vol. CT-15, pp.2~23, Mar. 1968.
4. N.K. Bose, "A note on multivarible positive real function," IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-19, pp.194~195, Mar. 1972.
5. V. Ramachandran and A. Sreenivasa, "The real part of a multivariable positive real functions," IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-21, pp.598~605, Sep. 1974.

(B) Decomposition. Reducibility

1. A.M. Soliman and N.K. Bose, A cemposition theorem for multivariable reactance functions," Proc. IEEE, Vol. 59, pp.309~311, Feb. 1971.
2. N.K. Bose, "An algorithm for synthesis of a class of multivariable positive real functions," Proc. IEEE, Vol. 68, pp.1615~1616, Nov. 1974.
3. C.S. Plan and H K. Kim, "Decomposition ofa class of multivariable positive real functions," Proc. Allerton Conference on Circuit and System Theory, Oct. 1975.
4. S. Chakrabarti, N.K Bose, and S.K. Mitra, "Sum and product separability of multivariable functions and applications," J. Franklin Inst., Vol. 299, pp.53~66, Jan. 1975.

(C) Cascade Synthesis

1. M. Saito, "Synthesis of transmission line networks by multivariable techniques, "Symp. on Generalized Networks, P.I.B. April 1966.
2. Y. Kamp, "Realization of multivariable functions by a cascade of lossless two-ports separated by noncommensurate stubs," Philips Res. Repts Vol. 26, pp.443~452, 1971.
3. T. Koga, "Synthesis of resistively terminated cascade of uniform lossless transmission lines and lumped passive lossless two-ports," IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-18, pp.444~455, July 1971.
4. J.D. Rhodes and P.C. Marston, "Cascade synthesis of two-variable one-element-kind networks," IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-19, pp. 78~80, Jan. 1972.
5. D. Youla, J.D. Rhodes, and P.C. Marston, "Driving-point synthesis of resistor-terminated cascades composed of lumped lossless passive 2--ports and commensurate TEM lines," IEEE Trans Circuit Theory, Vol. CT-19, pp.648~664, Nov. 1972.
6. D.C. Youla, J.D. Rhodes, and P.C. Marston, "Recent developments in the synthesis of a class of lumped-distributed filters," Int. J. Circuit Theory and Applications, Vol. 1, pp.59~70; 1973.
7. K.Zaki and R. Newcomb, "A note on lumped-distributed synthesis," IEEE Trans. Vol. CAS-21, Sep. 1974.
8. H.K. Kim and C.S. Phan, "Synthesis of cascaded noncommensurate transmission lines separated by lumped lossless two-ports," to be published,

(D) Transformerless Realizations

1. M.Saito, "Synthesis of transmission line networks by multivariable techniques," Symp. Generalized Networks, P.I.B. pp.353~393 April. 1966.
2. A.M. Soliman and N.K. Bose, "Synthesis of a class of multivariable positive real functions using Bott-Duffin techniques," Midwest Symp. May. 1970.
3. Y. Kamp and V. Belevitch, "A Class of multivariabe positive real functions realized by the Bott-Duffin method," Philips Res. Repts, Vol-26, No. 6, pp.433~442, 1971.