

演算增幅器를 사용한 多重 채널能動휠타의 具現

논문
24~4~5

Realization of Multi-Channel Active Filters by Using Operational Amplifiers

金 定 德*
(Chung Duk Kim)

Abstract

This paper presents a synthesis procedure of multi-channel active filters, which realizes an arbitrary $N \times N$ matrix of real rational functions in the complex variable s as a voltage transfer matrix. The resultant network reveals a transformerless grounded active RC $(2N+1)$ -terminal network. The active network is consisted of six $2N$ -port RC networks with $2N$ single-ended operational amplifiers.

1. 緒 論

복잡한 回路網에서 入力 및 出力間의 電壓傳達函數는 一般的으로 $J \times I$ 行列로 表示되며 要求되는 電壓傳達行列을 回路網으로 具現하는 것은 實際問題에 利用度가 대단히 높다.

最近의 論文에서 複素變數로 表示된 임의의 $N \times N$ 行列을 短絡어드미탄스行列로서 具現하는 方法이 발표되었다[1]. 다른 論文에서도 演算增幅器(op. amp.)를 사용하여 能動 RC 回路網을 具現하는 方法이 발표되었지만 [2,3] 任意的 $J \times I$ 行列을 電壓傳達行列로서 具現하는 方法은 많은 研究가 되어 지질 않았다[5]. 本論文에서는 임의의 $J \times I$ 電壓傳達行列 具現方法을 설명함에 있어 주어진 行列을 $N \times N$ 行列(正方形行列)로 變換하는 方法을 提議하고 다음에는 이 $N \times N$ 行列을 미리가정한 구조를 가진 能動 RC 回路網으로 具現하는 方法을 알아 보겠다.

2. 電壓傳達行列의 變換

복잡한 回路網에서 入力 (E_1, E_2, \dots, E_I)과 出力(E_1', E_2', \dots, E_J')間의 電壓傳達行列은 $J \times I$ 行列이 되며 다음과 같이 定義된다.

$$\begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \\ \vdots \\ E_J' \end{pmatrix} = [T(s)] \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1I} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{J1} & T_{J2} & \dots & T_{JI} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_I \end{pmatrix}$$

이 $J \times I$ 行列을 실제의 能動回路網으로 具現하기 위하여는 正方形行列로 바꾸는 것이 편리하다. 直四角形 行列인 $J \times I$ 行列을 正四角形으로 바꾸기 위하여는 任意的 電壓變數를 插入한다. 例로서 $J > I$ 이라고 하면 E_i :

$i = I+1, I+2, \dots, J$ 를 가정하여 다음과 같이 만든다.

$$\begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \\ \vdots \\ E_J' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1I} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{J1} & T_{J2} & \dots & T_{JI} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_I \end{pmatrix}$$

여기에서 $T_{jk} : j=1, 2, \dots, J, k=I+1, I+2, \dots, J$ 는 임의로 정한 값이며 0이라 두어도 좋다. 만일 $N = \max(I, J)$ 라 두고 주어진 行列을 $N \times N$ 로 變換한 다음 各 行의 要素들이 polynomial augmentation 方法에 의하여 公動분모를 갖도록 하면

$$\begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \\ \vdots \\ E_N' \end{pmatrix} = [T(s)] \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P_{11}}{Q_1} & \frac{P_{12}}{Q_1} & \dots & \frac{P_{1N}}{Q_1} \\ \frac{P_{21}}{Q_2} & \frac{P_{22}}{Q_2} & \dots & \frac{P_{2N}}{Q_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{P_{N1}}{Q_N} & \frac{P_{N2}}{Q_N} & \dots & \frac{P_{NN}}{Q_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_N \end{pmatrix} \quad (1)$$

식 (1)에서의 變形된 傳達函數 $[T]$ 는 2개의 行列곱으로 표시가 가능하다.

$$[T] = [Q]^{-1} [P] \dots \dots \dots (2)$$

여기에서

$$[Q] = \text{diag} [Q_1, Q_2, \dots, Q_N]$$

$$[P] = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N1} & P_{N2} & \dots & P_{NN} \end{pmatrix}$$

따라서 여하한 電壓行列일지라도 $[Q]^{-1} [P]$ 로서 표시가 가능하며 여기에서 $[Q]$ 는 對角行列이다.

3. 具現方法

식 (2)에 있는 電壓傳達行列을 具現하기 위하여 그

*正會員·陸軍士官學校教授(工博) 當學會 理事
接受日字: 1975年6月7日

림 1에 있는 能動 회로網을 생각해 보자. 이 회로網은 6個의 2N-단자 RC 회로網과 2N個의 單一段 演算增幅器로서 構成되어 있다. 그림에서 2個의 線으로 연결된 端子들은 N個의 端子가 서로 연결되어 있음을 단순화하여 그린 것이다.

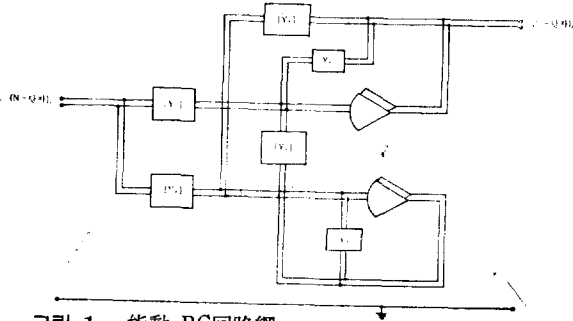


그림 1. 能動 RC 회로網
Fig. 1. 2N-PORT ACTIVE RC NETWORK

演算增幅器가 理想的이어서 電壓利得이 無限大라 가정하면 그림의 (N-단자)₁과 (N-단자)₂ 사이에는 다음과 같은 電壓傳達行列이 나타남을 誘導할 수 있다.

$$[T] = \{ ([Y_6]^T)^{-1} [Y_4]^T - ([Y_6]^T)^{-1} [Y_3]^T \}^{-1} \{ ([Y_6]^T)^{-1} [Y_2]^T - ([Y_5]^T)^{-1} [Y_1]^T \} \dots (3)$$

여기에서 $[Y_1], [Y_2], [Y_3], [Y_4], [Y_5], [Y_6]$ 들은 各構成 RC 회로網의 傳達어드미탄스 行列이다.

식 (3)은 단순화하기 위하여

$$[Y_6] = [Y_6], \det[Y_6] \neq 0 \dots (4)$$

라 가정하면

$$[T] = ([Y_4]^T - [Y_3]^T)^{-1} ([Y_2]^T - [Y_1]^T) \dots (5)$$

이제 문제는 식 (2)로 표시된 電壓傳達行列을 식 (5)와 等式으로 놓아 具現 가능한 회로網變數 $[Y_1], [Y_2], [Y_3], [Y_4]$ 를 찾으면 된다. 이 회로網變數들은 短路어드미탄스行列이 아니라 傳達어드미탄스 行列이므로 各行列의 要素들은 正의 RC어드미탄스函數가 되어야 한다. 먼저 多項式 $q(s)$ 를 擇하되 다음의 條件을 만족하도록 한다.

$$\deg q(s) \geq \max \{ \deg [Q], \deg [P] \} - 1$$

$q(s)$ 로서 식 (2)의 $[T]$ 을 변형시키면

$$[T] = \left\{ \frac{[Q]}{q(s)} \right\}^{-1} \left\{ \frac{[P]}{q(s)} \right\} \dots (6)$$

(6)식과 (5)식을 비교하면

$$\begin{aligned} [Y_4]^T - [Y_3]^T &= \frac{[Q]}{q(s)} \\ [Y_2]^T - [Y_1]^T &= \frac{[P]}{q(s)} \dots (7) \end{aligned}$$

(7)식의 右邊은 2개의 多項式的 差로 나타낼 수 있다.

$$\frac{[Q]}{q(s)} = \frac{[Q_1]}{q_1(s)} - \frac{[Q_2]}{q_2(s)}$$

$$\frac{[P]}{q(s)} = \frac{[P_1]}{q_3(s)} - \frac{[P_2]}{q_4(s)} \dots (8)$$

단 $[Q_1]/q_1(s), [Q_2]/q_2(s), [P_1]/q_3(s), [P_2]/q_4(s)$ 는 具現 가능한 正의 RC어드미탄스行列이라야 한다. (7)식과 (8)식을 비교하면

$$\begin{aligned} [Y_4] &= \frac{[Q_1]^T}{q_1(s)} \\ [Y_3] &= \frac{[Q_2]^T}{q_2(s)} \\ [Y_2] &= \frac{[P_1]^T}{q_3(s)} \dots (9) \\ [Y_1] &= \frac{[P_2]^T}{q_4(s)} \end{aligned}$$

식 (2)에서 $[Q]$ 는 對角行列이므로 식 (8)의 $[Q_1]$ 과 $[Q_2]$ 도 對角行列로 가정할 수 있다. 따라서 傳達어드미탄스 行列 $[Y_3]$ 과 $[Y_4], [Y_1]$ 과 $[Y_2]$ 를 가진 회로網의 構造는 그림 2와 같이 나타낼 수 있다. 또한 식 (4)로부터 $[Y_5]$ 와 $[Y_6]$ 는 單位行列로 편의상 擇할 수 있으며 이때 회로網構造는 그림 2-(b)와 같이 된다.

以上으로 任意로 주어진 電壓傳達行列의 具現過程이 完成된다.

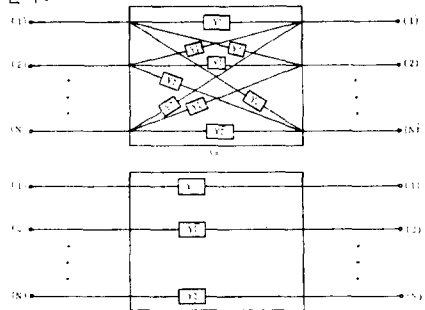


그림 2. 부속회로망 구조 (a) $[Y_1], [Y_2]$
(b) $[Y_3], [Y_4]$

Fig. 2. STRUCTURE OF SUBNETWORKS

4. 數値例

例로서 다음의 電壓傳達行列 具現方法을 알아보자.

$$E_1' \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s} & \frac{s+1}{s} & 1 \\ \frac{s}{s-1} & \frac{s+2}{s-1} & \frac{s}{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \dots (10)$$

그림 1과 같은 RC演算增幅器 회로網으로 具現하기 위하여는 새로운 電壓變數 E_3' 을 導入, 3×3 行列로 바꾸어야 한다.

$$E_1' \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s} & \frac{s+1}{s} & \frac{s}{s} \\ \frac{s}{s-1} & \frac{s+2}{s-1} & \frac{s}{s-1} \\ \frac{0}{s+2} & \frac{0}{s+2} & \frac{0}{s+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

上記式の [T] 行列을 變形하면

$$[T] = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s-1 & s+1 & s \\ s & s+2 & s \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$q(s) = s+2$ 로 택하여 $[Q]/q(s)$ 와 $[P]/q(s)$ 를 두개의 具現 가능한 RC어드미탄스行列의 差로 나타내면

$$\begin{pmatrix} [Q]^{-1} \\ [q(s)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [P] \\ [q(s)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s}{s+2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s-1}{s+2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+2} & \frac{s+1}{s+2} & \frac{s}{s+2} \\ \frac{s}{s+2} & 1 & \frac{s}{s+2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

혹은

$$\frac{[Q]}{q(s)} = \begin{pmatrix} \frac{s}{s+2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1.5s}{s+2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{[P]}{q(s)} = \begin{pmatrix} \frac{1.5s}{s+2} & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s}{s+2}\right) & \frac{s}{s+2} \\ \frac{s}{s+2} & 1 & \frac{s}{s+2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 식 (9)로부터 다음과 같이 assign할 수 있다.

$$[Y_4] = \begin{pmatrix} \frac{s}{s+2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1.5s}{s+2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [Y_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[Y_2] = \begin{pmatrix} \frac{1.5s}{s+2} & \frac{s}{s+2} & 0 \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s}{s+2}\right) & 1 & 0 \\ \frac{s}{s+2} & \frac{s}{s+2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$[Y_1] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

또한 식 (4)로부터 $[Y_5]$ 및 $[Y_6]$ 는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$[Y_5] = [Y_6] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이상의 回路變數를 具現한 能動回路網은 그림 3에 표시되어 있다.

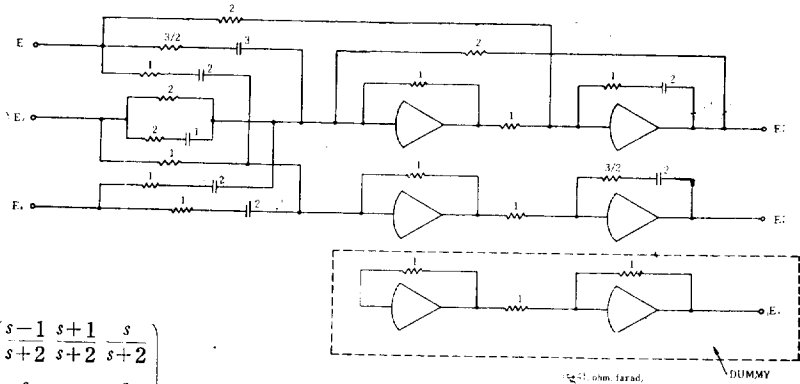


그림 3. 식 (10)의 電壓行列을 具現한 回路網
Fig. 3. REALIZATION OF THE TRANSFER VOLTAGE MATRIX IN (10)

5. 結 論

지금까지 入, 出力端이 여러개 일때 多重채널能動회로 具現方法을 설명하였다. 이 방법에 의하면 任意的 $J \times I$ 電壓傳達行列을 $N \times N$ 行列(但 $N = \max(J, I)$)로 變換한 다음 6개의 $2N$ -port RC 回路網과 $2N$ 個의 演算增幅器를 사용한 能動回路網으로 具現된다.

數值例에서 볼 수 있는바와 같이 出力端의 數가 J 個이고 入力端의 數가 I 個이며 $J < I$ 일때는 $2J$ 개의 演算增幅器가 실제로 사용되며 $2(J-I)$ 個는 dummy로 사용될을 알 수 있다. 만일 T_{kj} ($j=1, 2, \dots, J, k=I+1, I+2, \dots, J$)를 0이 아닌 임의의 값을 택하였다 할지라도 사용된 演算增幅器의 數에는 變換이 없고 부속수동회로망이 복잡하게 나타난다.

따라서 $J \times I$ 의 電壓傳達行列을 具現하기 위하여는 $2J$ 個의 單一段 演算增幅器만이 소요된다.

參 考 文 獻

- (1) N.W. Cox and K.L. Su, "An investigation on the realizability of RC-operational amplifier networks," Proc. 12th Midwest Symp. CT, April 1969.
- (2) M. Golman and Ghauri, "On the realization of rational admittance matrices using voltage-controlled voltage source and one-ports," IEEE Trans. on CT, vol CT-16, Nov. 1969, pp. 544-546.
- (3) R.D. Joseph and D. Hilberman, "Immittance matrix synthesis with active networks," IEEE Trans. on CT, Vol CT-13, Sept. 1966, p. 324
- (4) C.D. Kim and K.L. Su, "On the sufficiency of $2N$ operational amplifiers to realize an arbitrary $N \times N$ voltage transfer matrix," IEEE Trans. on CT, vol. CT-18, Nov. 1971, pp. 729-732.