

# 새로운 機械回路素子로서의 機械相互 spring

## Mechanical Mutual Spring-A New Mechanical Network Element

논문  
24~4~4

李 相 培\*  
(Sang Bae Lee)

### Abstract

It is suggested in this paper that an elastic lever may be used as a mechanical network element having mutual spring. The cantilever spring is examined as an example of the elastic lever, and the spring compliances, compatibility condition and design procedure of the cantilever spring are briefly investigated.

### 1. 序 論

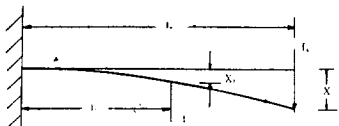
機械振動系統의 研究에서 電氣의 相似法(analogy)이 사용되고 있음은 잘 알려진 事實이다<sup>1,2)</sup>. 電氣回路理論을 機械振動問題에 適用하려면 電氣回路素子들에 對應하는 機械回路素子들이 있어야 하겠다. 機械回路의 三要素는 mass, spring 그리고 damper(viscous)이며 이들은 電氣回路의 capacitor, inductor와 抵抗에 各各 對應시킬 수가 있다. simple lever와 simple support lever와 같은 機械素子들은 그 特性이 電氣回路의 變壓器와 같으므로 機械 transformer(或은 變速器)로 알려져 있다<sup>2,3)</sup>.

이 論文에서는 電氣의 相互 inductance에 對應하는 機械素子를 탄성 lever를 使用하므로써 實現하려고 試圖하였다. 本論文에서는 機械 mobility 相似法을 使用하며 線形성을 維持할 수 있는 적은 變位만이 일어난다고 假定한다.

### 2. 탄성 Lever Spring

Cantilever와 같은 탄성 lever를 그림 1과 같이 한편을 固定시킨 境遇를 생각하자. 여기서 lever는 mass가 없고 마찰도 없는 線形 spring이라고 假定하며 外部 힘에 依한 lever의 變位는 x 방향으로만 存在한다고 생각

그림 1.



한다. 탄성 spring의 線形성을 維持하기 爲한 적은 變位를 假定했으므로 중첩의 原理를 適用하면 變位 \$x\_1\$과

\$x\_2\$를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x_1 = k_{11}f_1 + k_{12}f_2$$

$$x_2 = k_{21}f_1 + k_{22}f_2 \tag{1}$$

여기서 \$f\_1\$과 \$f\_2\$는 外部에서 加한 힘들이고 \$k\_{ij}\$는 spring compliance 들이다.

線形 時不變 系統에서는 可逆定理를 適用할 수 있으므로 式(1)을 다시 쓰면

$$x_1 = k_1 f_1 + k_m f_2$$

$$x_2 = k_m f_1 + k_2 f_2 \tag{2}$$

여기서 \$k\_1, k\_2, k\_m\$은 탄성 lever spring의 1次, 2次, 相互 compliance들이다. 이들 compliance들은 다음과 같이 定義된다.

$$k_1 = \frac{x_1}{f_1} \Big|_{f_2=0}$$

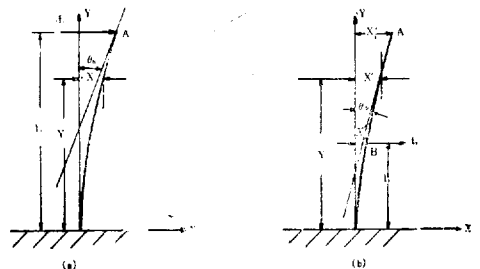
$$k_2 = \frac{x_2}{f_2} \Big|_{f_1=0}$$

$$k_m = \frac{x_1}{f_2} \Big|_{f_1=0} = \frac{x_2}{f_1} \Big|_{f_2=0} \tag{3}$$

### 3. Simple Cantilever Spring

탄성 lever의 한 例로써 그림 2에 보인 simple cantilever를 생각하자.

그림 2.



\* 正會員 · 서울大學校工科大学(工博)

첫째로 그림 2의 (a)에 보인 바와 같이 外部힘  $f_1$ 이 cantilever의 끝點인 A에 加해졌을 때 lever의 길이가  $y$ 인 任意的 點에서의 變位  $x$ 는 다음과 같이 얻어진다<sup>4)</sup>.

$$x = \frac{y^2}{6EI} (3l_1 - y) f_1 \quad (4)$$

여기서 EI는 cantilever의 bending rigidity이다. 變位角  $\theta$ 는 (4)式으로 부터 다음과 같이 求할 수 있다.

$$\theta = \frac{dx}{dy} = \frac{y}{2EI} (2l_1 - y) f_1 \quad (5)$$

外部힘  $f_2$ 가 그림 2의 (b)와 같이 B點에 加해졌을 때 lever의 길이가  $y$ 가  $l_2$ 보다 큰 任意的 點에서의 變位는 다음과 같이 얻어진다.

$$x' = \frac{l_2^2}{6EI} (3y - l_2) \quad (6)$$

만약에 外部힘  $f_1$ 과  $f_2$ 가 同時に 加해졌다면 중첩의 原理를 適用하여 兩端子 A와 B에서의 變位는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x_A = \frac{l_1^3}{3EI} f_1 + \frac{l_2^2}{6EI} (3l_1 - l_2) f_2 \quad (7)$$

$$x_B = \frac{l_2^2}{6EI} (3l_1 - l_2) f_1 + \frac{l_2^3}{3EI} f_2$$

(7)式과 (2)式을 比較하므로써 Cantilever의 1次, 2次 및 相互 compliance를 다음과 같이 求할 수 있다.

$$k_1 = \frac{l_1^3}{3EI}$$

$$k_2 = \frac{l_2^3}{3EI} \quad (8)$$

$$k_m = \frac{l_2^2}{6EI} (3l_1 - l_2)$$

여기서 相互 spring,  $k_m$ ,은 電氣的 相互 inductance에 對應하는 새로운 機械素子이다. (8)式에 주어진 cantilever spring의 compliance들 사이에는 恒常 다음과 같은 關係가 成立함을 알 수 있다.

$$k_1 \geq k_m \geq k_2 (\because l_1 > l_2) (l_1 > l_2 \text{ 일때}) \quad (9)$$

#### 4. Cantilever Spring의 設計

주어진 compliance에 맞는 cantilever spring을 設計하려면 cantilever의 길이, 中端子點(mid-terminal point)과 bending rigidity를 決定하여야 한다. 그러나 주어진 compliance를 (8)式에 代入해서는 一般解를 求할 수가 없으므로 compatibility 條件을 求하여야 하겠다. (8)式으로 부터 cantilever의 길이比  $a$ 를 다음과 같이 求할 수 있다.

$$a = \frac{l_1}{l_2} = \sqrt[3]{\frac{k_1}{k_2}} \quad (10)$$

$$a = \frac{l_1}{l_2} = \frac{k_2 + 2k_m}{3k_2} \quad (11)$$

윗 두식으로부터 compatibility 條件은 다음과 같이 求할 수 있다.

$$k_1 = \frac{(k_2 + 2k_m)^3}{27 k_2^2} \quad (12)$$

주어진 compliance에 맞는 cantilever를 設計하기 爲하여는 (12)式은 반드시 滿足되어야 한다. 만약에 이 式을 滿足시키지 않으면 解는 存在하지 않으며 따라서 設計는 어려워진다. (12)式이 만족될 境遇에는 다음 式들에 依하여 cantilever를 設計할 수 있다.

(1) 任意的  $l_1$ 에 對하여

$$l_2 = l_1 \sqrt[3]{\frac{k_2}{k_1}} \quad (13)$$

$$EI = \frac{1}{3} \frac{l_1^3}{k_1}$$

(2) 任意的  $l_2$ 에 對하여

$$l_1 = l_2 \sqrt[3]{\frac{3EI}{k_1}} \quad (14)$$

$$EI = \frac{1}{3} \frac{l_2^3}{k_2}$$

(3) 任意的 EI에 對하여

$$l_1 = \sqrt[3]{\frac{3EI}{k_1}} \quad (15)$$

$$l_2 = \sqrt[3]{\frac{3EI}{k_2}}$$

따라서 주어진 compliance가 (12)式을 滿足하면 (13), (14), (15)式에 依하여 cantilever를 設計할 수 있으며 세 變數 中 한 變數는 機械의 한 部品으로써의 條件, 妥當性 등을 考慮하여 任意로 決定할 수 있다.

#### 5. 機械回路素子로써의 탄성 Lever

機械回路의 한 素子로써 端子速度와 힘 사이의 關係를 複素變數  $s$ 의 函數로써 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_1(s) = sk_1 F_1(s) + sk_m (-F_2(s)) \quad (16)$$

$$U_2(s) = sk_m F_1(s) + sk_2 (-F_2(s))$$

여기서  $F_2(s)$  앞의 負符號는 二次側의 힘이 基準方向과 反對되기 때문이다. 힘의 基準方向은 Energy가 傳達되는 方向으로 잡는 것이 普通이다.

二端子(電氣的 四端子) 素子로써 탄성 lever의 機械 mobility回路를 그림 3과 같이 表示하였다. 여기에 힘과 速度의 基準方向과 compliance를 보였으며 速度의 正方向은 힘의 方向과 一致한다.

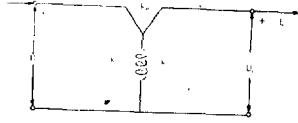
#### 6. 結 論

탄성 lever를 二端子 機械素子로써 使用할 수 있으며 두 端子사이에는 相互 spring 特性이 있음을 보였 다. simple cantilever spring의 境遇 lever의 spring compliance, compatibility 條件 그리고 設計過程을 誘導說明하였다. 또한 機械回路素子로써의 레버의 記號를 그림 3과 같이 表示하여 보았다.

이 새로 考案한 탄성레버는 機械振動 系統의 設計에 重要한 役割을 하리라 생각되며 機械 filter 製作設計에

도 도움을 줄 것이다.

그림 3



謝辭 : 本研究에 協助하여 주신 Newcastle 大學校의 A.G.J. Holt 教授에게 感謝한다.

참 고 문 헌

1) Plunkett, R. ed.  
 "Mechanical Impedance Methods for Mechanical

Vibration," ASME, 1958.

2) Olson, H.F.,  
 "Dynamic Analogies," second edition, D. Van Nostrand Co., Inc., 1958.  
 3) Harman, W.W. and Lytle, D.W.,  
 "Electrical and Mechanical Networks," McGraw-Hill Book Co., 1962.  
 4) Timoshenko, S.,  
 "Strength of Materials" Part I, third ed., Van Nostrand Reinhold Co., 1955.