恒星의 對流層과 그 進化

玄 正 晙
서울大學校 自然科學大學 天文學科

(1975年 9月 1日 接受, 1975年 12月 15日 修正)

On the Stellar Convective Zone and the Stellar Evolution

Jong June Hyun
Department of Astronomy, College of Natural Science, Seoul National University

(Received September 15, 1975, revised December 15, 1975)

Abstract

Effect of the ratio of mixing length to the pressure scale-height $\alpha = l/\mathrm{Hp}$ on the effective temperature has been investigated under some simplifying assumptions.

The result is compared with that of the existing model calculations. The role of convection zone in the stellar evolution is briefly summarized.

§1. 序 論

恒星의 進化過程을 계산하는데 있어서 아직도 완전히 究明되지 못한 問題點의 하나로서(Iben, 1967)

"처음의 化學成分이 주어졌을 때 吸收係數, 對流의 諸變數, 에너지 生成率등에 관한 不確定性이 恒星의 進化經路에 어느 정도까지 영향을 줄 것인가?"

란 의문을 들 수 있다.

여기에서는 그중 對流의 問題에 국한하여 低溫의 별(특히 赤色巨星)의 外部對流層을 특징지우는 파라메터가 進化에 미치는 영향을 생각해 보기로 한다.

對流는 輻射傳達과 더불어 별 內部에서 에너지 傳達의 주된 方法의 하나이므로 별의 內部構造와 進化에 큰 영향을 가지고 있다. 별은 主系列 이전의 重力收縮의 단계에서 全的인 對流構造를 겪고 또 主系列이후의 赤色巨星의 膨脹단계에서 다시 그 內部의 대부분에 걸쳐서 對流層을 가지게 된다.

완전한 對流(輻射가 없는)傳達인 경우에는 斷熱近似($\nabla = \nabla_A$, $\nabla = \frac{d\ln T}{d\ln P}$, ∇_A=斷熱變化때의 ∇)를 씀으로써 混合길이 (mixing length)와 같은 不確定한 量을 계산에서 제외 할 수 있으나 部分的으로 對流가 에너지傳達을 분담할 경우에는 계산에 不確定한 量을 넣지 않을 수 없다.

이것은 對流不安定의 조건이

$$\nabla > \nabla_A$$

처럼 不等式으로 되어 있다는 點에서도 明白하듯이 對流의 理論이 非可逆過程의 熱力學과 같은 難點을 지니게 되는 것을 짐작할 수 있다.

보통 對流의 理論에 쓰이는 混合길이 l란 주위보다도 高溫(低溫)인 流體덩어리가 上昇(下降)하여 주위와 완전히 섞여서 그 個性이 없어질 때까지의 이동거리를 말하는 것인데 별의 對流의 경우 이것을 理論的으로나 觀測的으로 確定지을 수 없다는 것이 이 理論의 弱點으로 생각되고 있다.

이 길이는 對流로 傳達되는 에너지(對流束, convective flux F_c)를 계산하는데 쓰이고 있으

므로 별의 內部構造를 결정하는데 근본적인 不確定性이 남게 되는 것이다.

다음의 考察에서는 이 混合길이의 不確定性이 별의 有效溫度 T_e에 어떤 영향을 미칠것인가를 몇가지의 假定아래 알아보기로 한다.

§2. 對流의 代表的 길이

별 內部에서의 對流는 보통 Reynolds數가 매우 큰 흐름이기 때문에 亂流로 생각되고 있는데 이것은 對流의 理論을 正確히 다루는데 큰 難點을 이룬다.

混合길이의 理論의 不確定性을 理論的으로 없애려면 流體力學의 Navier-Stokes方程式에서 출발하여 그 解를 구해야 할것을 지적한 사람도 있다(Kippenhahn, 1963).

또 太陽의 觀測으로 混合길이를 確定하려는 생각에서 對流의 代表的 길이로서 다음과 같은 것을 들 수 있다 (Schwarzschild, 1975).

1. 壓力尺度(pressure scale-height)

$$H_p=-\frac{dr}{dlnP}=\frac{P}{\rho g}$$

2. 密度尺度(density scale-height)

$$H_D=-\frac{dr}{dln\rho}=H_p\frac{dln\ P}{dln\rho}=\frac{1}{g}\ \frac{dP}{d\rho}$$

3. H 또는 He의 電離層의 길이
4. $\triangle\nabla T=\nabla-\nabla_A=\max.$의 길이(Böhm, 1958)
5. 쌀알무늬(granule)의 길이(~700km)
6. 超쌀알무늬(super-granule)의 길이(~10000 km)
7. 吸收係數 K의 最大의 길이

그러나 이들의 크기도 구구하기 때문에 그 어느 것을 택하는가에 따라 不確定性은 남는다.

보통은 $l=\alpha H_p$로 하여 $\alpha\sim1$—2가 흔이 쓰이고 있다.

太陽의 경우 쌀알무늬의 觀測된 크기는 $1H_p$ 또는 $2H_p$와 비등하므로 위의 가정을 뒤받침하는 것으로 볼 수 있다.

§3. 混合길이와 有效溫度

최근의 별 模型의 進化計算은 電子計算器로 상당히 細密한 數値積分이 가능하게 된 반면에 그 結果의 物理的인 뜻이 不透明해진다는 결함이 없지 않다. 가령 $\alpha=\frac{l}{H_p}$의 값을 변화시키면 별의 溫度 T_e는 어떻게 변할까 하는 의문은 직접 계산기를 움직여 보아야만 답할 수 있다는 실정은 아무리 문제가 복잡하고 어려운 데에 연유한다 하더라도 滿足스러운 일이 못된다.

이런 문제를 解析的으로 다루기 위해서 다음과 같은 假定을 두어 보자.

1. 對流層에서는 에너지가 모두 對流로 傳達된다.
2. 對流層위의 얇은 輻射層에서는 吸收係數가 $K=K_0P^aT^b$ 와 같다.

假定 1은 赤色巨星의 두꺼운 對流層의 신정에 어울린다. 또 이것은 對流層의 윗境界(光球의 밑바닥)를 $F_c=\max.$인 길이로 近似하는 셈이 된다.

사실 Mihalas(1965)의 對流大氣模型($\theta_e=\frac{5040}{T_e}=0.650$, $\log g=4.0$)의 경우 F_c의 最大값은 全에너지束의 ~90%($l/H_p=1$), >95% ($l/H_p=2$)로 되어 있다.

假定 2는 실제로 H^-의 吸收인 경우

$$K=x(1-x)P_e\ f(T)$$

$$P_e=(x+\frac{1}{A})\mu XP$$

여기서 x : H의 電離度 X : 1gr속의 H의 질량
P_e : 電子壓 P : 總壓力
A : H와 金屬의 原子數의 比
μ : 平均分子量

그리고 $f(T)$는 溫度 T의 느린 函數인데 별의 表面근처에서는 K는 P, T의 增加函數이므로 $a, b>0$인 常數로 近似할 수 있다(Kippenhahn, 1963).

Eddington의 灰色大氣의 理論에서 溫度 T와 길이 τ의 관계는

$$T=T_e\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\tau\right)^{\frac{1}{4}} \tag{1}$$

로 주어진다. 그러므로 별의 有效溫度 T_e는 $\tau=\frac{2}{3}$인 길이에서의 溫度와 같다.

또 별의 光度 L은

$$L=4\pi R^2\sigma T_e^4 \tag{2}$$

R : 별의 半徑
σ : Stefan의 常數 (5.67×10^{-5} $C.G.S.$)

이므로 T_e는 별과 같은 에너지를 輻射할 半徑 R의 黑體球面의 溫度로서 별의 表面溫度로 定義하고 있는 셈이다.

그런데 低溫의 별의 경우 이 T_e는 그 밑의 對流層의 윗 境界의 溫度로 생각할 수 있으므로(cf. 부록) 對流束을 특징지우는 파라메터 $\alpha=\frac{l}{H_p}$와 T_e의 관계를 다음과 같이 얻을 수 있다.

假定 1에 의하여 $\tau=\frac{2}{3}$증서

$$F_c=L=4\pi R^2\sigma T_e^4 \tag{3}$$

한편 對流의 混合길이의 理論에 의하면 (Mihalas, p. 204)

$$F_c=\frac{1}{4\sqrt{2}}(gH_pQ)^{\frac{1}{2}}(\rho C_pT)(\nabla-\nabla_E)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{l}{H_p}\right) \tag{4}$$

이다. 여기서 $g=\frac{GM}{R^2}$ C_p : 定壓比熱

M : 별의 質量

$Q=1-\left(\frac{\partial ln\ \mu}{\partial ln\ T}\right)_p$

∇ : 對流層속의 $\frac{dlnT}{dlnP}$

∇_E : 對流하는 氣塊속의 ∇

이다.

에너지를 모두 輻射로 운반하는데 필요한 $\frac{dlnT}{dlnP}$를 ∇_R라 하면 실제의 ∇는

$$\nabla_R>\nabla>\nabla_E>\nabla_A$$

인 관계가 있다. $\nabla_R>\nabla$은 對流가 운반에 가담하기 때문이고 $\nabla_E>\nabla_A$은 氣塊가 輻射損失등으로 斷熱狀態에서 어긋나기 때문이다.

그러므로 $\nabla-\nabla_E<\nabla-\nabla_A$

이 $\nabla-\nabla_A$(super-adiabatic T gradient, QTS)는 太陽의 경우 그 최대값이 0.56(Schwarzschild, 1975)이고

Stothers (1972)의 赤色超巨星(15 M$_\odot$)의 경우 1—0.3이다.

또 $Q=\left(\frac{\partial ln\rho}{\partial lnT}\right)_p=1-\left(\frac{\partial ln\mu}{\partial lnT}\right)_p$는 電離度가 急變하는데를 제외하면 ~1로 볼 수 있다.

(4)에서 $\nabla-\nabla_E$, Q를 1로 두기로 하고

$\rho C_pT=U$: 內部에너지 密度

$$=\frac{3}{2}P \tag{5}$$

로 가정하면

$$F_c=\frac{3}{8\sqrt{2}}(g\ H_p)^{\frac{1}{2}}\ P\ \alpha^2$$

또 T_e의 정의에서 $=\sigma T_e^4$ (6)

한편 對流層 위의 얇은 輻射層의 ∇_R은 작은 密度로 인하여 急減하므로 여기서는 溫度 T_e의 等溫層으로 近似하면(Hoyle and Schwarzschild, 1955) $\tau=\frac{2}{3}$에서

$$\tau=\int_{r_p}^{\infty}K\rho dr=\frac{2}{3} \quad r_p:\tau=\frac{2}{3}\text{인 중심거리}$$

$$=K_oT_e^b\int_{r_p}^{\infty}P^a\rho dr$$

또 $\rho=-\frac{1}{g}\ \frac{dP}{dr}$ 이므로

$$\frac{2}{3}=-K_oT^b{}_e\frac{1}{g}\int_{r_p}^{\infty}P^adP=\frac{K_oT_e^bP^{a+1}}{(a+1)g} \tag{7}$$

(6), (7)에서 P를 消去하면

$\left(H_p=\frac{P}{\rho g},\ P=\frac{k\rho}{\mu m_H}\ T\text{를 써서}\right)$

$$T_e=\left[\frac{2}{3K_o}(a+1)\ \frac{GM}{R^2}\left(\frac{3(\mu m_Hk)^{\frac{1}{2}}}{8\sqrt{2}\ \sigma}\alpha^2\right)^{a+1}\right]^{1/n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

(단 $n=b+3.5(a+1)$ m_H : H原子의 質量)

를 얻는다.

윗式에서 T_e와 α의 관계

$$T_e\propto\alpha^{2(a+1)/n}$$

임을 알 수 있다.

吸收係數$K=K_oP^aT^b$의 指數 a, b는(Stein, 1966) 種族 I 의 별 ($X=0.6$, $Y=0.38$, $Z=0.02$)에서 $T_e\sim3500°K$일 때

$$K=6.9\times10^{-26}\ P^{0.7}T^{5.3}$$

으로 補間되므로 $a=0.7$, $b=5.3$, $n=11.3$이다.

T_e와 α의 관계를 실제의 模型計算과 위의 (8)에 의한 計算의 結果와 비교하기 위하여 Hofmeister (1967)의 $5M_\odot$ ($X=0.602$ $Z=0.044$)의 模型의 경우를 들어 본다. (그림)

點線이 나타내는 $\alpha=2.1$인 模型과 實線의 $\alpha=1.5$인 模型과 $\log T_e$의 差는 0.04로 볼 수 있다.

(8) 式으로 계산해 보면

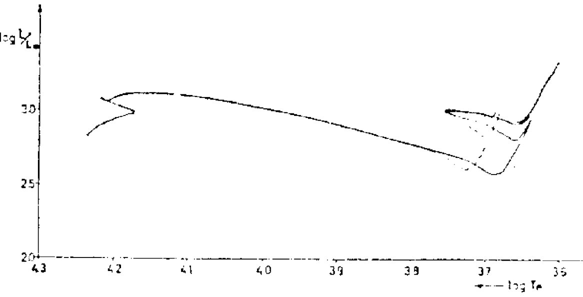
$$\triangle\log\ T_e=\triangle(\log\ e\ ln\ T_e)=0.43\ \triangle ln\ T_e$$

$$=0.43\ \frac{2(a+1)}{n}\ \triangle ln\ \alpha$$

$\triangle ln\alpha=0.40$이므로 위의 $a=0.7$ $n=11.3$을 써

서 $\triangle \log T_e = 0.05$를 얻는다.

이 模型의 化學成分과 溫度가 앞의 값과 若干 다른 점을 고려하면 위의 두 결과는 비교적 잘 들어맞는 것으로 볼 수 있다.



5Mo의 進化經路 (Hofmeister, 1967)
—— : $\alpha=1.5$
…… : $\alpha=2.1$

또 太陽의 主系列以前의 進化過程($X=0.602$, $Z=0.022$)의 계산(Ezer and Cameron, 1966)에 대해서 유사한 비교를 하면 $T_e=4000\sim5000°K$과 $\alpha=1$, $\alpha=2$에 대해서

$\triangle T_e \sim 790°$ (模型의 계산)

이고 (8)에 의한 계산은

$\triangle T_e \sim 920°$

로써 약 100°정도의 차이가 난다.

§4. 結　　論

별의 進化에 있어서 對流層이 가지는 역할은 크게 두가지로 나누어

$$\left.\begin{array}{l}\text{對流核}\\ \text{外部 또는 中間의 對流層}\end{array}\right\}\text{으로}$$

생각할 수 있다. 對流核에 대해서는 斷熱條件이 잘 만족되기 때문에 斷熱近似로서 混合길이의理論을 피할 수 있다. 그러나 核外部로의 對流束의 噴出(overshooting)의 문제가 있다.

즉 $\triangle\nabla T=0$은 對流의 推進力이 되는 δT, $\delta\rho=0$를 뜻하지만 對流의 速度 $V_c=0$를 뜻하지 않기 때문에 여기서 對流核의 限界가 문제가 된다. 이것은 進化의 時間的 尺度에 不確定性을 주는 원인으로 생각되고 있다(Iben, 1967).

한편 外部對流層은 主系列의 경우 A型의 별에서 이미 $\tau\sim0.2$근처에서 發生하기 시작하여 溫度가 낮아질수록 그 두께는 차츰 커져서 $F3-F5$에서 $F_c \sim F_{total}$로 된다.

또 主系列 이후의 赤色巨星으로의 進化段階에서 對流層은 두꺼워지고 그 効果는 마침내 별의 內部構造를 全的으로 決定하기에 이른다. 層이 두꺼울 만큼 對流의 파라메터의 不定性의 영향도 커진다.

HR圖에서의 進化의 경로는 별의 質量 損失을 無視하면 $\log T_e$, $\log L$은 主로 반경 R에 따르는 변화로 나타난다.

對流가 중요한 경우 (8)에서

$$\left(\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln R}\right)_M = -\frac{2}{n}$$

이고 $n=11.3$이므로 이 변화는 HR圖에서 T_e軸에 거의 수직한 경로로 나타난다.

또 輻射가 중우한 경우에는(Stein, 1966)

$$L \propto r^2 \frac{T^3}{K\rho} \frac{dT}{dr}$$

에서 $T^3 \propto \frac{1}{R^3} \propto \frac{1}{\rho}$, K는 별의 內部에서 거의 一定하므로

$$L \propto RT_c \sim \text{Const.} \quad (T_c : \text{中心溫度})$$

로 되어 進化의 경로는 HR圖에서 거의 水平에 가까운 曲線이 된다.

模型의 계산된 進化경로는 大體로 이러한 수직, 水平의 두 傾向을 反映하고 있으며 主系列이후의 進化段階에서 α에 따르는 變化는 T_e가 낮은 HR圖의 오른 쪽에서 일어나고 있다는 사실에서 알수 있다.

앞에서 얻은 (8)의 表現은 이런 段階에서의 α가 T_e에 미치는 영향을 仔細한 數値計算을 거치지 않고 가늠하기 위한 方法으로 이용할 수있다

本 硏究에 1974年度 文敎部硏究補助費가 큰 도움을 준 것을 感謝하는 바이다.

(부록)　　對流層의 윗境界

對流條件의 境界

$$\nabla = \nabla_A = \frac{\gamma-1}{\gamma}$$

에서

$$\frac{d\ln T}{d\tau} = \frac{d\ln T}{d\ln P}\frac{d\ln P}{d\tau} = \nabla \cdot \frac{1}{P}\frac{dP}{d\tau}$$

$$= \nabla_A \frac{1}{P}\frac{dP}{d\tau} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{1}{P}\frac{dP}{d\tau}$$

즉 $\dfrac{dT}{d\tau}=\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\dfrac{T}{P}\dfrac{dP}{d\tau}$

(1)에서 $\dfrac{dT}{d\tau}=\dfrac{3}{16}\dfrac{T_e}{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\tau\right)^{\frac{3}{4}}}$

또 重力平衡의 式에서

$$\frac{dP}{d\tau}=\frac{g}{K}$$

이므로 윗式은

$$\frac{3}{16}\frac{T_e}{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\tau\right)^{\frac{3}{4}}}=\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{T}{P}\frac{g}{K}$$

(1)을 다시 쓰면

$$T=T_e\left(\frac{16PK}{3Ag}\right)^{\frac{1}{4}}\quad\left(A=\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)$$

이 된다. 이 境界溫度 T가 T_e와 같으려면

$$\frac{PK}{g}=\frac{3}{16}A$$

가 되어야 한다.

이것과 앞의 (7)이 兩立하려면

$$\frac{3}{16}A=\frac{2}{3}(a+1)$$

그런데 $A=\dfrac{\gamma-1}{\gamma}<1$ 이므로 $a>0$인 경우

$\dfrac{3}{16}A<\dfrac{2}{3}(a+1)$ 즉 $T<T_e$이다. 對流層은 $\tau<\dfrac{2}{3}$에서 시작이 되는 셈이다.

Mihalas (1965)의 對流大氣模型($\theta_e=0.065$, $\log g=4$)의 경우 다음과 같다.

τ	T	$F_c/F_{c(max.)}$
$\frac{1}{2}$	7520°	3×10^{-8}
$\frac{2}{3}$	7750° (T_e)	5×10^{-7}
⋮	⋮	⋮
8.00	11000°	1.00

References

Böhm, K.H. 1958, Zs. f. Ap., **6**, 245.

Ezer, D. and Cameron, A.G.W. 1966, *Stellar Evolution* (New York: Plenum Press)

Hofmeister, E. 1967, Zs. f. Ap., **65**, 164.

Hoyle, F. and Schwarzschild, M. 1955, Ap. J. Suppl. **2**, 1.

Iben, I. 1967, Ann. Rev. Astron. Ap., **5**, 571.

Kippenhahn, R.1963, *Star Evolution*(NewYork: Academic Press)

Mihalas, D. 1965, Ap. J. **141**, 564.

______ 1970, *Stellar Atmosphere*(San Francisco: Freeman & Co.)

Schwarzschild, M. 1975, Ap. J. **195**, 137.

Stein, R. 1966, *Stellar Evolution* (New York: Plenum Press)

Stothers, R. 1972, Astr. and Ap. **18**, 325.